2. Sea f la función dada por: $f(x) = 3x - \frac{1}{3+x}$.

   (a) Demuestra que existe una única raíz, α, de $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$.

   (b) Si utilizamos el método de bisección (dicotomía) para aproximar el valor de la raíz α de $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$, ¿con cuántas iteraciones nos aseguramos de cometer un error de truncamiento menor que $0'25$? Justifica analíticamente tu respuesta.

   (c) Plantea el algoritmo de Newton-Raphson para aproximar la raíz α de $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ y analiza su convergencia global en ese intervalo. Calcula x_1 a partir de $x_0 = 0$ utilizando este algoritmo.

   (d) Transforma el problema de hallar la raíz α de $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$, en otro equivalente que consista en calcular el único punto fijo de una función g en [0,1]. Plantea el método de punto fijo que utiliza esa función g y demuestra su convergencia global en [0,1]. ¿Se puede asegurar que el orden de convergencia de este algoritmo es dos? Justifica tu respuesta.

3. Se desea aproximar $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ mediante la fórmula de integración de tipo interpolatorio polinómico que usa los nodos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

   (a) Plantea el sistema de ecuaciones lineales necesario para obtener los coeficientes de la fórmula de tipo interpolatorio polinómico que utiliza esos nodos. Si denotamos por $\mathbf{A}$ a la matriz de coeficientes del sistema, ¿existe la factorización de Cholesky de $\mathbf{A}$? Justifica matemáticamente tu respuesta.

   (b) Resuelve el sistema del apartado anterior.

   (c) ¿Es la fórmula de integración numérica obtenida una fórmula de Newton-Cotes? Justifica la respuesta. En cualquier caso, empléala para aproximar $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x+3}dx$.

   (d) Utiliza las propiedades de los coeficientes de las fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico para aproximar:

      i) $\int_{0}^{3} f(x)dx$, a partir de la fórmula obtenida en los apartados anteriores

      ii) $\int_{0}^{1} f(x)dx$, a partir de la fórmula obtenida en i).

   (e) Para $f(x) = \frac{1}{x+3}$, aproxima $f'(1)$ de dos formas distintas:

      i) usando la fórmula centrada con paso $h = \frac{1}{2}$;

      ii) usando la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico con los nodos $\{-2, 1\}$.

   Calcula el error absoluto y relativo en cada una de las dos aproximaciones. ¿Cuál es mejor en este caso? Justifica tu respuesta.

COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Facultad de Informática
8 de septiembre de 2010

Nombre: __________________ Apellidos: ____

☐ Ingeniería Informática ☐ I. T. I. de Gestión ☐ I. T. I. de Sistemas

Ejercicio	1	2	3	Prácticas	Total
Puntuación	3	3	3	1	10
Evaluación					

Tiempo de realización: 3h 30min.

No se permite el uso de aparatos electrónicos (calculadora, teléfono móvil,...).
No se aceptarán exámenes total o parcialmente realizados a lápiz.
Cada ejercicio se entregará en uno o varios folios, independiente(s) de los demás ejercicios.
No se valorará ninguna respuesta no justificada.

1. Sea el método iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \text{ arbitrario,} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \qquad k \geq 0, \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sabiendo que el método anterior es consistente con el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$, donde $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$ (aquí $\mathbf{I}$ denota la matriz identidad 3-dimensional), analiza si el método es convergente.

(b) Analiza la convergencia del método de Jacobi y la del método de relajación con parámetro $\omega = 1$, cuando se emplean para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$.

(c) En los casos convergentes de los tres métodos analizados en los dos apartados anteriores, ¿cuál es el algoritmo más lento? ¿Por qué?

(d) Calcula $\mathbf{x}^{(2)}$ a partir de $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, utilizando el método iterativo de matriz $\mathbf{B}$.

(e) Si existiese una norma matricial subordinada $\|\ \|$, tal que $\|\mathbf{B}\| = \frac{1}{5}$ y $\|\mathbf{c}\| = 0'1$, ¿podría obtenerse una cota del error de truncamiento cometido al utilizar el iterante $\mathbf{x}^{(2)}$ (calculado en el apartado anterior), para aproximar la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$? En caso afirmativo, calcúlala.

(f) Sabiendo que la matriz inversa de $\mathbf{A}$ es $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula **razonadamente** el condicionamiento de $\mathbf{A}$ en norma infinito.

(g) Partiendo de $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, calcula los cuatro primeros iterantes de la sucesión generada por el método de Jacobi, cuando se usa para resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$. ¿Se puede extraer alguna conclusión sobre el vector $\mathbf{x}$ solución exacta del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$? Justifica tu respuesta.