Examen TP (EI) 31 Mayo 2011 – Solución

Apellidos: ____

Nombre: __________________________________

Calificación: ______ + ______ + ______ + ______ + ______ = ______ (de 10; nota mínima: 4)

Valoración: 1: **1** pto.; 2: **3,5** ptos.; 3: **2,5** ptos.; 4: **2** ptos.; 5: **1** pto.

Firma aquí si acudiste a la revisión del examen: __________________________

INSTRUCCIONES:

Escribir a bolígrafo azul. Para corregir errores sólo se permite tachar a bolígrafo. Contestar en el espacio disponible en estos folios. Podrán pedirse folios para escribir en sucio. Los folios en sucio y en blanco deberán ser entregados aparte. Tiempo: 3 h.

EJERCICIOS:

1. Sean α, β proposiciones; σ un selector; b un array; e una expresión; i, m, n enteros con $m \leq i \leq n$; $EST(\gamma)$ el conjunto de estados que hacen cierta una proposición γ. Escribe a la izquierda de cada afirmación una **V** si es verdadera o una **F** si es falsa. (Nota: cada error anula un acierto, pero la suma de este ejercicio nunca será negativa)

   a) Si $\alpha \Rightarrow \beta$, entonces α es más débil que β

   b) Si α es más débil que β, entonces $EST(\alpha) \subseteq EST(\beta)$

   c) T cand $F = F$ cand T

   d) $(\exists i \in [m,n] : b[i] = e) = ((\mathsf{N} i \in [m,n] : b[i] = e) = 1)$

   e) En las asignaciones sobre arrays con selectores, el paso recursivo de la definición sobre la longitud del selector es:
   $(b; [i] \circ \sigma : e)[j] = \begin{cases} b[j] & \text{si} \quad i = j \\ (b; \sigma : e) & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$

   Solución: F, F, V, F, F.

2. Sea $b[0:n-1][0:n-1]$ un array de enteros. Estudia formalmente la corrección parcial del siguiente programa respecto a las aserciones (while interior: 1 pto.; resto: 2 ptos.). Explica también el propósito del programa en términos de un ejemplo de entrada y su salida, de la forma más breve posible y sin describir las operaciones intermedias (0.5 ptos.).

$\{PRE : n \geq 0\}$
```
      i := 0;
```
$\{INV1 : \forall k, l(0 \leq l < k \leq i-1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i \leq n\}$
```
      while (i != n) do
           (j := 0;
```
$\{INV2 : INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j-1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq j \leq i < n\}$
```
           while (j != i) do
                (b[i][j] := b[j][i];
                j := j + 1); // fin while interior
           i := i + 1) // fin while exterior
```
$\{POST : \forall k, l(0 \leq l < k \leq n-1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k])\}$

Estudiamos la corrección por partes, empleando el cálculo de la precondición más débil (wp)

Precondición:

$wp(\texttt{i := 0}, INV1) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq 0-1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq 0 \leq n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq -1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq n) =$

$\boxed{\text{No existe ningún entero entre } 0 \text{ y } -1 \text{ (rango vacío)}}$

$= (T \wedge n \geq 0) =$
$= (n \geq 0) =$
$= PRE$

$PRE \Rightarrow wp(\texttt{i := 0}, INV1)$

Dentro del bucle exterior y antes del comienzo del bucle interior:

$wp(\texttt{j := 0}, INV2) =$
$= (INV1[0/j] \wedge \forall l(0 \leq l \leq 0-1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq 0 \leq i < n) =$
$= (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq -1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq i < n) =$

$\boxed{\text{No existe ningún entero entre } 0 \text{ y } -1 \text{ (rango vacío)}}$

$= (INV1 \wedge T \wedge 0 \leq i < n) =$
$= (INV1 \wedge 0 \leq i < n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i-1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i \leq n \wedge 0 \leq i < n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i-1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i < n)$

$(INV1 \wedge i \neq n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i-1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i < n)$

$(INV1 \wedge i \neq n) \Rightarrow wp(\texttt{j := 0}, INV2)$

Bucle interior:

$wp(\texttt{b[i][j] := b[j][i]; j := j + 1}, INV2) =$
$= wp(\texttt{b[i][j] := b[j][i]}, INV1[j+1/j] \wedge \forall l(0 \leq l \leq j+1-1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq j+1 \leq i < n)) =$
$= wp(\texttt{b[i][j] := b[j][i]}, INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge -1 \leq j < i < n)) =$

$\boxed{\text{Sea } b' = (b; [i][j] : b[j][i])}$

$= (INV1[b'/b] \wedge \forall l(0 \leq l \leq j \Rightarrow b'[i][l] = b'[l][i]) \wedge -1 \leq j < i < n)) =$
$= (INV1[b'/b] \wedge \forall l(0 \leq l \leq j-1 \Rightarrow b'[i][l] = b'[l][i]) \wedge \forall j(0 \leq j \Rightarrow b'[i][j] = b'[j][i]) \wedge -1 \leq j < i < n)) =$

$\boxed{\text{La condición del segundo cuantificador universal, } j \geq 0\text{, está garantizada en este punto por } INV2 \wedge j \neq i.}$

$= (INV1[b'/b] \wedge \forall l(0 \leq l \leq j-1 \Rightarrow b'[i][l] = b'[l][i]) \wedge (b'[i][j] = b'[j][i]) \wedge -1 \leq j < i < n)) =$

$\boxed{\text{Sólo se modifica una posición del array: } [i][j]\text{. El resto de las que aparecen están fuera de esos índices.}}$

$= (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j-1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge (b[j][i] = b[j][i]) \wedge -1 \leq j < i < n)) =$
$= (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j-1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge T \wedge -1 \leq j < i < n)) =$

$\boxed{\text{Si hubiésemos considerado } j = -1\text{, daría también } T\text{, por resultar } F \text{ la condición del segundo cuantificador.}}$

$= (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j-1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge -1 \leq j < i < n))$

$(INV2 \wedge j \neq i) =$
$= (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j-1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq j < i < n))$

$(INV2 \wedge j \neq i) \Rightarrow wp(\texttt{b[i][j] := b[j][i]; j := j + 1}, INV2)$

$\boxed{\text{Ya que } 0 \leq i \Rightarrow -1 \leq i.}$

Fuera del bucle interior y antes del fin del bucle exterior:

$(INV2 \wedge j = i) =$
$= (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j - 1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq j \leq i < n) \wedge j = i) =$
$= (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq j - 1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq j = i < n) \Rightarrow$
$\Rightarrow (INV1 \wedge \forall l(0 \leq l \leq i - 1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq i < n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i - 1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i \leq n) \wedge \forall l(0 \leq l \leq i - 1 \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq i < n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i-1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i \leq n) \wedge \forall l(0 \leq l < i \Rightarrow b[i][l] = b[l][i]) \wedge 0 \leq i < n) =$

Podemos juntar los dos cuantificadores universales porque el segundo sería el caso $0 \leq l < k = i$.

$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i < n)$

$wp(\texttt{i := i + 1}, INV1) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i + 1 - 1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i + 1 \leq n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge -1 \leq i < n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge -1 \leq i < n)$

$(INV2 \wedge j = i) \Rightarrow wp(\texttt{i := i + 1}, INV1)$

Ya que $0 \leq i \Rightarrow -1 \leq i$.

Postcondición:

$(INV1 \wedge i = n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i - 1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i \leq n \wedge i = n) =$
$= (\forall k, l(0 \leq l < k \leq i - 1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq i = n) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall k, l(0 \leq l < k \leq n - 1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k]) \wedge 0 \leq n) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall k, l(0 \leq l < k \leq n - 1 \Rightarrow b[k][l] = b[l][k])) =$
$= POST$

$(INV1 \wedge i = n) \Rightarrow POST$

Se satisface la corrección parcial.

El programa convierte la matriz b en simétrica copiando los valores que están por encima de la diagonal principal en las posiciones que están por debajo de ella, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Entrada: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

Salida: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}$

3. Estudia formalmente la corrección <u>total</u> del siguiente programa respecto a las aserciones (cota: 0,3 ptos.; terminación: 0,6 ptos.; while: 1 pto.; resto: 0,6 ptos.).

$\{PRE : n \geq 2\}$
```
      f := 1;
      i := 2;
```
$\{INV : f = \prod_{j=1}^{i-1} j \wedge 2 \leq i \leq n\}$
```
      while (i != n) do
           (f := f * i;
           i := i + 1)
```
$\{POST : f = (n-1)! \wedge n \geq 2\}$

Estudiamos la corrección por partes, empleando el cálculo de la precondición más débil (wp)

<u>Corrección parcial</u>

Precondición:

$wp(\texttt{f := 1; i := 2}, INV) =$
$= wp(\texttt{f := 1}, f = \prod_{j=1}^{2-1} j \wedge 2 \leq 2 \leq n) =$
$= wp(\texttt{f := 1}, f = \prod_{j=1}^{1} j \wedge 2 \leq n) =$
$= wp(\texttt{f := 1}, f = 1 \wedge n \geq 2) =$
$= (1 = 1 \wedge n \geq 2) =$
$= (T \wedge n \geq 2) =$
$= (n \geq 2) =$
$= PRE$

$PRE \Rightarrow wp(\texttt{f := 1; i := 2}, INV)$

Bucle:

$wp(\texttt{f := f * i; i := i + 1}, INV) =$
$= wp(\texttt{f := f * i}; f = \prod_{j=1}^{i+1-1} j \wedge 2 \leq i+1 \leq n) =$
$= wp(\texttt{f := f * i}; f = \prod_{j=1}^{i} j \wedge 1 \leq i < n) =$
$= (f * i = \prod_{j=1}^{i} j \wedge 1 \leq i < n) =$
$= (f * i = (\prod_{j=1}^{i-1} j) * i \wedge 1 \leq i < n) =$

$\boxed{\text{Como } i \geq 1,\ i \neq 0, \text{ y por lo tanto } i \text{ es simplificable.}}$

$= (f = \prod_{j=1}^{i-1} j \wedge 1 \leq i < n)$

$(INV \wedge i \neq n) =$
$= (f = \prod_{j=1}^{i-1} j \wedge 2 \leq i < n)$

$(INV \wedge i \neq n) \Rightarrow wp(\texttt{f := f * i; i := i + 1}, INV)$

$\boxed{\text{Ya que } 2 \leq i \Rightarrow 1 \leq i.}$

Postcondición:

$(INV \wedge i = n) =$
$= (f = \prod_{j=1}^{i-1} j \wedge 2 \leq i \leq n \wedge i = n) =$
$= (f = \prod_{j=1}^{n-1} j \wedge 2 \leq i = n) =$
$= (f = (n-1)! \wedge 2 \leq i = n) \Rightarrow$
$\Rightarrow (f = (n-1)! \wedge n \geq 2) =$
$= POST$

$(INV \wedge i = n) \Rightarrow POST$

<u>Terminación</u>

Cota: $t = n - i$

Cota positiva:

$(INV \wedge i \neq n) =$
$= (f = \prod_{j=1}^{i-1} j \wedge 2 \leq i < n) \Rightarrow$
$\Rightarrow (n > i) =$
$= (n - i > 0)$

Cota decreciente:

$wp(\texttt{t}_1 \texttt{ := n - i; f := f * i; i := i + 1}, n - i < t_1) =$
$= wp(\texttt{t}_1 \texttt{ := n - i; f := f * i}, n - (i+1) < t_1) =$
$= wp(\texttt{t}_1 \texttt{ := n - i; f := f * i}, n - i - 1 < t_1) =$
$= wp(\texttt{t}_1 \texttt{ := n - i}, n - i - 1 < t_1) =$
$= (n - i - 1 < n - 1) =$
$= (-1 < 0) =$
$= T$

$(INV \wedge i \neq n) \Rightarrow wp(\texttt{t}_1 \texttt{ := n-i; f := f * i; i := i + 1}, n - i < t_1)$

Se satisface la corrección total.

4. Estudia formalmente la corrección del siguiente programa respecto a las aserciones.

$\{PRE : m \geq 2\}$
```
      if (x != 0) then
           (if (x<0) then
                (x := -x); // fin if interior
           y := x mod m) // fin then exterior
      else
           (y := 0) // fin if exterior
```
$\{POST : x \geq 0 \wedge m \geq 2 \wedge y = x \texttt{ mod } m\}$

Estudiamos la corrección por partes, empleando el cálculo de la postcondición más fuerte (sp)

If exterior:

$sp(\texttt{if (x != 0) then (if (x<0) then (x := -x); y := x mod m) else (y := 0)}, PRE) =$
$= sp(\texttt{if (x<0) then (x := -x); y := x mod m}, x \neq 0 \wedge m \geq 2) \vee sp(\texttt{y := 0}, x = 0 \wedge m \geq 2)$

Hacemos por separado las dos partes de la disyunción (then y else exteriores)...

Then exterior:

$sp(\texttt{if (x<0) then (x := -x); y := x mod m}, x \neq 0 \wedge m \geq 2) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, sp(\texttt{if (x<0) then (x := -x)}, x \neq 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, sp(\texttt{if (x<0) then (x := -x) else (skip)}, x \neq 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, sp(\texttt{x := -x}, x < 0 \wedge x \neq 0 \wedge m \geq 2) \vee (sp(\texttt{skip}, x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, sp(\texttt{x := -x}, x < 0 \wedge x \neq 0 \wedge m \geq 2) \vee (x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, sp(\texttt{x := -x}, x < 0 \wedge m \geq 2) \vee (x > 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, \exists x'((x < 0 \wedge m \geq 2)[x'/x] \wedge x = (-x)[x'/x]) \vee (x > 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, \exists x'(x' < 0 \wedge m \geq 2 \wedge x = -x') \vee (x > 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, \exists x'(x' < 0 \wedge m \geq 2 \wedge x' = -x) \vee (x > 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, (-x < 0 \wedge m \geq 2) \vee (x > 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, (x > 0 \wedge m \geq 2) \vee (x > 0 \wedge m \geq 2)) =$
$= sp(\texttt{y := x mod m}, x > 0 \wedge m \geq 2) =$
$= \exists y'((x > 0 \wedge m \geq 2)[y'/y] \wedge y = (x \text{ mod } m)[y'/y]) =$
$= \exists y'(x > 0 \wedge m \geq 2 \wedge y = x \text{ mod } m) =$
$= (x > 0 \wedge m \geq 2 \wedge y = x \text{ mod } m)$

Else exterior:

$sp(\texttt{y := 0}, x = 0 \land m \geq 2) =$
$= \exists y'((x = 0 \land m \geq 2)[y'/y] \land y = (0)[y'/y]) =$
$= (x = 0 \land m \geq 2 \land y = 0)$

...Continuamos con el if exterior:

$sp(\texttt{if (x<0) then (x := -x); y := x mod m}, x \neq 0 \land m \geq 2) \lor sp(\texttt{y := 0}, x = 0 \land m \geq 2) =$
$= (x > 0 \land m \geq 2 \land y = x \text{ mod } m) \lor (x = 0 \land m \geq 2 \land y = 0) =$
$= (x > 0 \land m \geq 2 \land y = x \text{ mod } m) \lor (x = 0 \land m \geq 2 \land y = 0 \text{ mod } m) =$
$= (x > 0 \land m \geq 2 \land y = x \text{ mod } m) \lor (x = 0 \land m \geq 2 \land y = x \text{ mod } m) =$
$= (x \geq 0 \land m \geq 2 \land y = x \text{ mod } m) =$
$= POST$

$sp(\texttt{if (x != 0) then (if (x<0) then (x := -x); y := x mod m) else (y := 0)}, PRE) \Rightarrow POST$

El programa es correcto.

5. Simplifica al máximo y paso a paso la siguiente expresión.

$(b; j : b[i])[(b; j : b[i])[i]] = j$

$$(b; j : b[i])[i] = \left\{ \begin{array}{lll} b[i] & \text{si} & j = i \\ b[i] & \text{si} & j \neq i \end{array} \right\} = b[i]$$

$$(b; j : b[i])[(b; j : b[i])[i]] = (b; j : b[i])[b[i]] = \left\{ \begin{array}{lll} b[i] & \text{si} & j = b[i] \\ b[b[i]] & \text{si} & j \neq b[i] \end{array} \right.$$

$((b; j : b[i])[(b; j : b[i])[i]] = j) \equiv$
$\equiv ((b; j : b[i])[b[i]] = j) \equiv$
$\equiv (j = b[i] \wedge b[i] = j) \vee (j \neq b[i] \wedge b[b[i]] = j) \equiv$
$\equiv (j = b[i]) \vee (j \neq b[i] \wedge b[b[i]] = j) \equiv$
$\equiv (j = b[i] \vee j \neq b[i]) \wedge (j = b[i] \vee b[b[i]] = j) \equiv$
$\equiv T \wedge (b[i] = j \vee b[b[i]] = j) \equiv$
$\equiv (b[i] = j \vee b[b[i]] = j)$