ESTADISTICA II

INGENIERIA INFORMATICA, 3ER Curso

10 - junio - 2008 **Primera Parte - Test**

Apellidos y Nombre: ....

D.N.I. : ....

Nota : En la realización de este examen sólo esta permitido utilizar calculadoras que, a lo sumo, tengan funciones estadísticas básicas. **No se pueden utilizar calculadoras programables.**

Existe una sóla respuesta correcta por pregunta.

Cada respuesta correcta se valorará con 1 punto y cada incorrecta con -1/3. Las preguntas no contestadas no se valoran. Si se marcan varias respuestas a la vez se considerará la pregunta no contestada.

El valor de esta primera parte del examen es de CINCO PUNTOS sobre diez.

Responder con letras mayúsculas y bolígrafo.

Las respuestas elegidas que se considerarán válidas son las que se consignen en el cuadro que se adjunta a continuación.

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Respuesta	C	D	B	C	B	B	A	D
Pregunta	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Respuesta	B	D	B	A	D	C	C	B

CUESTIONES

1. En un contraste de hipótesis, cuando el p-valor es grande (comparado con el nivel de significación):

A. La hipótesis nula es cierta.

B. La hipótesis alternativa es cierta.

C. Aceptamos la hipótesis nula. **Solución**

D. Rechazamos la hipótesis nula.

2. Si el p-valor de un test t unilateral (p.e. sobre una media) es de 0.6, entonces el p-valor del correspondiente contraste bilateral es:

- **A.** 0.3
- **B.** 0.4
- **C.** 0.6
- **D.** 0.8 **Solución**

3. Se observa una muestra de diez tiempos (en milisegundos) de respuesta de un sistema informático:

33.1 38.4 31.9 37.2 34.2 33.0 46.2 38.2 34.0 32.9

Para estudiar la aleatoriedad de los datos, se aplica el test del número total de rachas (mediana = 34.1) obteniéndose:

- **A.** $R = 7$ y se acepta la aleatoriedad porque el $p - valor < 0.05$
- **B.** $R = 7$ y se acepta la aleatoriedad porque el $p - valor > 0.1$ **Solución**
- **C.** $R = 5$ y se acepta la aleatoriedad porque el $p - valor > 0.1$
- **D.** $R = 5$ y se rechaza la aleatoriedad porque el $p - valor < 0.05$

SOLUCION
Se obtienen las rachas:

33.1	38.4	31.9	37.2	34.2	33.0	46.2	38.2	34.0	32.9
−	+	−	+	+	−	+	+	−	−

$n_1 = n_2 = 5$ y $R = 7$
$p - valor = 2 * 0.357 \gg 0.1 \Rightarrow$ se acepta (con mucha seguridad) la aleatoriedad

4. Considerando los datos de la cuestión anterior, si F_n es la correspondiente función de distibución empírica, se obtiene que:

- **A.** $F_n(35) = 0.4$
- **B.** $F_n(35) = 0.5$
- **C.** $F_n(35) = 0.6$ **Solución**
- **D.** $F_n(35) = 0.7$

5. Cuando el resultado del contraste del ANOVA es estadísticamente significativo (p-valor pequeño), entonces aceptamos que las medias correspondientes a las k poblaciones (grupos) son:

- **A.** Todas distintas.
- **B.** Al menos dos distintas. **Solución**
- **C.** Al menos dos iguales.
- **D.** Todas iguales.

6. En el ANOVA I, el cuadrado medio entre tratamientos MS_{Tr} tiende a tomar valores en torno a la varianza común σ^2:

- **A.** Siempre.

B. Solamente cuando la hipótesis nula es cierta. **Solución**

C. Solamente cuando la hipótesis alternativa es cierta.

D. Nunca.

7. En el ANOVA I, si se aceptó la hipótesis nula, ¿es necesario comparar todas las combinaciones posibles de valores medios (comparaciones múltiples)?

A. No, porque ya admitiríamos que todos son iguales. **Solución**

B. No, porque ya admitiríamos que todos son distintos.

C. Si, para verificar si alguna combinación es distinta.

D. Si, para verificar si alguna diferencia es nula.

8. La siguiente tabla muestra los resultados de un ANOVA II:

Fuente de variación	SS	gl	MS	F	p-valor
Factor A	0.892	3	0.297	1.214	0.319
Factor B	1.274	2	0.637	2.602	0.088
Interacción	8.847	6	1.475	6.022	0.000
Residual	8.815	36	0.245		
Total	19.828	47			

A partir de ellos, considerando un nivel de significación del 5%, admitiríamos que:

A. Ninguno de los factores influye en la respuesta.

B. Solo el factor A influye en la respuesta.

C. Solo el factor B influye en la respuesta.

D. Ambos factores influyen en la respuesta. **Solución**

9. En el ANOVA, cuando el resultado del test de Levene es estadísticamente significativo (p-valor pequeño), entonces podemos pensar que:

A. No se verifica la hipótesis de igualdad de varianzas y por tanto es adecuado aplicar el método ANOVA.

B. No se verifica la hipótesis de igualdad de varianzas y por tanto puede no ser adecuado aplicar el método ANOVA. **Solución**

C. Se verifica la hipótesis de igualdad de varianzas y por tanto puede no ser adecuado aplicar el método ANOVA.

D. Se verifica la hipótesis de igualdad de varianzas necesaria para aplicar el método ANOVA.

10. En regresión lineal, cuando el resultado del contraste de regresión no es estadísticamente significativo (i.e. aceptamos la hipótesis nula) entonces admitimos que:

A. Hay relación entre las variables.

B. No hay relación entre las variables.

C. Hay una relación lineal entre las variables.

D. No hay una relación lineal (si es que hay alguna) entre las variables. **Solución**

11. En regresión lineal múltiple, ¿en qué intervalo toma valores el coeficiente de correlación parcial?:

A. (-1,1)

B. [-1,1] **Solución**

C. [0,1].

D. (0,1).

12. En regresión lineal (múltiple) el coeficiente de correlación lineal múltiple ¿puede tomar valores negativos?:

A. Nunca, porque es la raíz cuadrada positiva del coeficiente de determinación múltiple. **Solución**

B. Si, cuando el coeficiente de determinación múltiple es negativo.

C. Si, cuando hay una relación lineal negativa entre la variable respuesta y las variables explicativas.

D. Si, ya que es el coeficiente de correlación lineal entre los valores observados de la variable respuesta y los valores pronosticados.

13. En regresión lineal si el valor de un coeficiente de tolerancia es de 0.02, podemos decir que:

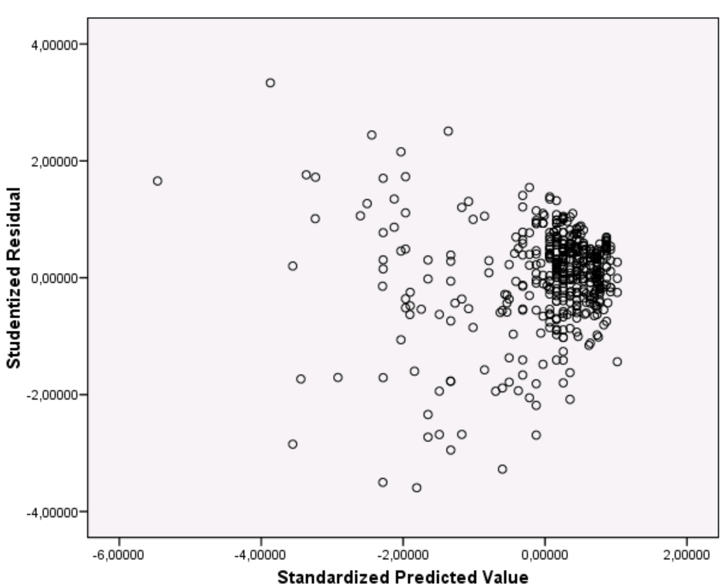
A. El 2% de la variabilidad de la correspondiente variable es explicada por las demás, por lo tanto puede haber problemas de multicolinelidad.

B. El 2% de la variabilidad de la correspondiente variable es explicada por las demás, por lo tanto no hay problemas de multicolinelidad.

C. El 2% de la variabilidad de la correspondiente variable no es explicada por las demás, por lo tanto no hay problemas de multicolinelidad.

D. El 2% de la variabilidad de la correspondiente variable no es explicada por las demás, por lo tanto puede haber problemas de multicolinelidad. **Solución**

14. A continuación se muestra un gráfico de residuos frente a valores pronosticados de un ajuste de regresión lineal:



De este gráfico se deduce que, aparentemente:

- **A.** Se verifican las hipótesis de linealidad e igualdad de varianzas.
- **B.** No se verifican las hipótesis de linealidad ni de igualdad de varianzas.
- **C.** No se verifica la hipótesis de igualdad de varianzas. **Solución**
- **D.** No se verifica la hipótesis de linealidad.

15. En la selección de variables en regresión lineal múltiple, como criterio de salida se excluye la variable:

- **A.** De mayor disminución significativa en la proporción de variabilidad explicada (mayor valor del estadístico F).
- **B.** De mayor disminución en la proporción de variabilidad explicada de las que no tienen una disminución significativa.
- **C.** De menor disminución en la proporción de variabilidad explicada de las que no tienen una disminución significativa (menor valor del estadístico F). **Solución**
- **D.** De menor disminución en la proporción de variabilidad explicada de las que tienen una disminución significativa.

16. En el método de selección de variables paso a paso, si queremos obtener modelos con un número mayor de variables explicativas, podemos:

- **A.** Fijar el nivel de significación del criterio de salida y el de entrada más pequeños.
- **B.** Fijar el nivel de significación del criterio de salida y/o el de entrada más grandes. **Solución**
- **C.** Fijar el nivel de significación del criterio de salida más pequeño y el de entrada más grande.
- **D.** Fijar el nivel de significación del criterio de entrada igual al del criterio de salida.

ESTADISTICA II, Ingeniería Informática,
Problemas, 10 - junio - 2008

Apellidos y Nombre: ....

D.N.I. : ....

Cada una de los dos problemas tiene una valoración de 2.5 puntos sobre diez.

Para aprobar el examen es necesario obtener una puntuación igual o superior a 1 punto en cada uno de los dos problemas.

Problema 1.

Se realizó un experimento para estudiar cuatro algoritmos para la planificación de las rutas de entrega de una empresa de entregas express privada. La variable respuesta fué el tiempo (en minutos) necesario para resolver el problema. Debido a las diferencias entre los problemas que pueden surgir, se escogieron cuatro de los problemas habituales y se consideraron niveles de una variable bloque escenario. Los datos se muestran en la siguiente tabla:

	Escenario			
Algoritmo	E1	E2	E3	E4
A1	13.8	15.1	14.5	13.9
A2	19.5	20.0	20.8	21.1
A3	14.8	13.9	15.3	15.2
A4	10.9	11.5	11.5	12.2

$$\Sigma y_{ij} = 244$$
$$\Sigma y_{ij}^2 = 3889.54$$

P.1. Formular el modelo de diseño de experimentos asociado a este problema, indicando las hipótesis que se asumen, y obtener las estimaciones puntuales de los efectos de los factores.

Solución:

Se trata de un diseño en bloques completamente aleatorizado (ANOVA II sin interacción) con $I = J = 4$ niveles en el factor y bloque ($K = 1$, diseño clásico). La formulación matemática del modelo es la siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

con ε_{ij} v.a. independientes con distribución $N\left(0, \sigma^2\right)$. Se supone, por tanto, normalidad, igualdad de varianzas, independencia y ausencia de interacción entre factor y bloque.

Para estimar los efectos del algoritmo y del escenario, calculamos las medias por filas y por columnas respectivamente y la media muestral gobal $\overline{y}_{..} = 15.25$.

$\overline{y}_{i.}$	$\widehat{\alpha}_i = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..}$	$\overline{y}_{.j}$	$\widehat{\beta}_j = \overline{y}_{.j} - \overline{y}_{..}$
14.325	-0.925	14.75	-0.5
20.35	5.1	15.125	-0.125
14.8	-0.45	15.525	0.275
11.525	-3.725	15.6	0.35

P.2. Obtener la tabla ANOVA, realizando los contrastes (con un nivel de significación del 5%) y calculando los coeficientes de determinación correspondientes.

Solución:
Las sumas de cuadrados son:

$$
\begin{aligned}
ss_\alpha &= J\sum_{i=1}^{I}\widehat{\alpha}_i^2 = 4\times(0.925^2+5.1^2+0.45^2+3.725^2) = 163.775 \\
ss_\beta &= I\sum_{j=1}^{J}\widehat{\beta}_j^2 = 4\times(0.5^2+0.125^2+0.275^2+0.35^2) = 1.855 \\
ss_T &= \sum_{ij}(y_{ij}-\overline{y}_{..})^2 = \sum_{ij} y_{ij}^2 - n\overline{y}_{..}^2 = \\
&= 3889.54 - 16\times 15.25^2 = 168.54 \\
ss_R &= \sum_{ij} e_{ij}^2 = ss_T - ss_\alpha - ss_\beta \\
&= 168.54 - 163.775 - 1.855 = 2.91
\end{aligned}
$$

y la tabla ANOVA:

F. var.	**SS**	**gl**	**MS**	**F**	**p-valor**
Algoritmo	163.775	3	54.59	168.84	$p < P(F_{3,9} \geq 8.72) = 0.005$
Escenario	1.855	3	0.62	1.91	$p > P(F_{3,9} \geq 3.86) = 0.05$
Residual	2.91	9	0.323		
Global	168.54	15			

Se acepta (con mucha seguridad) que hay diferencias en el tiempo medio de computación entre los distintos algoritmos, mientras que el escenario no influye significativamente en el tiempo medio de computación.

Los coeficientes de determinación son:

$$
\begin{aligned}
R^2(\text{"Algoritmo"}) &= \frac{163.775}{168.54} = 0.97 \\
R^2(\text{"Escenario"}) &= \frac{1.855}{168.54} = 0.01 \\
R^2(\text{"Explicado"}) &= 1 - \frac{2.91}{168.54} = 0.98
\end{aligned}
$$

El modelo explica un 98% de la variabilidad de la respuesta.

P.3. Obtener estimaciones puntuales y por intervalo de confianza (al 95%) de la varianza y del tiempo medio de computación con el algoritmo 1 (DMS).

Solución:
Estimación puntual de la varianza $\hat{\sigma}^2 = \hat{S}_R^2 = 0.323$
Estimación por intervalo de confianza de la varianza:

$$IC_{0.95}(\sigma^2) = \left(\frac{ss_R}{\chi^2_{9,0.975}}, \frac{ss_R}{\chi^2_{9,0.025}} \right) = \left(\frac{2.91}{19.023}, \frac{2.91}{2.7} \right)$$

En las estimaciones de las medias de los distintos algoritmos el valor crítico es $t_{9,0.975} = 2.2622$.y en el error estandar es $\hat{\sigma}\left(\overline{y}_{i.}\right) = \hat{S}_R\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{0.323}{4}} = 0.265.$ Obteniéndose:
$\hat{\mu}_{1.} = \overline{y}_{1.} = 14.325$
$I_{0.95}(\mu_{1.}) = (14.325\ \pm 2.2622 \cdot 0.265) = (13.726, 14.924)$

P.4. Obtener estimaciones puntuales y por intervalo de confianza al 95% para las diferencias de los tiempos medios de computación entre el algoritmo 1 y las de los otros (comparaciones múltiples).

Solución:
Nos piden estimaciones puntuales y por intervalos de confianza de estadísticos del tipo $\theta_{ik} = \mu_{i.} - \mu_{k.}$.La estimación puntual será:

$$\hat{\theta}_{ik} = \hat{\mu}_{i.} - \hat{\mu}_{k.} = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{k.}$$

En el calculo de los intervalos de confianza, si se utiliza el método de Scheffé el valor crítico sería:

$$\omega_S = \sqrt{(I-1)\, F_{I-1,(I-1)(J-1),(1-\alpha)}} = \sqrt{3 \cdot F_{3,9,0.95}} = \sqrt{3 \cdot 3.86} = 3.403$$

Si se utiliza el método DMS (LSD) el valor crítico sería:

$$t_{9,0.975} = 2.2622.$$

Como se trata de un diseño equilibrado en todos los casos el error estandar es el mismo:

$$\sigma\left(\hat{\theta}_{ik}\right) = \hat{S}_R\sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{0.323}{2}} = 0.402$$

- $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$:

$$\begin{aligned}
\overline{y}_{1.} - \overline{y}_{2.} &= 14.325 - 20.35 = -6.025 \\
I_{0.95}^{DMS}(\mu_{1.} - \mu_{2.}) &= (-6.025 \pm 2.2622 \cdot 0.402) \\
&= (-6.025 \pm 0.909) = (-6.934, -5.116) \\
I_{0.95}^{Scheff\acute{e}}(\mu_{1.} - \mu_{2.}) &= (-6.025 \pm 3.403 \cdot 0.402) \\
&= (-6.025 \pm 1.368) = (-7.393, -4.657)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3$:

$$\begin{aligned}
\overline{y}_{1.} - \overline{y}_{3.} &= 14.325 - 14.8 = -0.475 \\
I_{0.95}^{DMS}(\mu_{1.} - \mu_{3.}) &= (-0.475 \pm 0.909) = (-1.384, 0.434) \\
I_{0.95}^{Scheff\acute{e}}(\mu_{1.} - \mu_{3.}) &= (-0.475 \pm 1.368) = (-1.384, 0.893)
\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_4$:

$$\begin{aligned}
\overline{y}_{1.} - \overline{y}_{4.} &= 14.325 - 11.525 = 2.8 \\
I_{0.95}^{DMS}(\mu_{1.} - \mu_{4.}) &= (2.8 \pm 0.909) = (1.891, 3.709) \\
I_{0.95}^{Scheffé}(\mu_{1.} - \mu_{4.}) &= (2.8 \pm 1.368) = (1.432, 4.168)
\end{aligned}$$

A partir de los intervalos anteriores, con ambos métodos, se deduce que aceptaríamos: $\mu_{1.} < \mu_{2.}$, $\mu_{1.} = \mu_{3.}$ y $\mu_{1.} > \mu_{4.}$

P.5. Considerando unicamente el escenario como un factor de efectos aleatorios, obtener la correspondiente tabla ANOVA y, en caso de ser necesario, estimar la proporción de variabilidad debida al factor.

Solución:
Sumando las SS y gl del factor Algoritmo a la fila de la variabilidad residual obtenemos:

F. var.	SS	gl	MS	F	p-valor
Escenario	1.855	3	0.62	0.04	$p \gg P(F_{3,9} \geq 3.86) = 0.05$
Residual	166.685	12	13.89		
Global	168.54	15			

$\Rightarrow$ **Se acepta** $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$, el factor "*escenario*" no influye en la varibilidad de la respuesta.

Se pide estimar:

$$p = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \sigma^2}$$

Sin embargo, no tiene setido estimar σ_α^2 porque aceptamos que es nula (i.e. p nula). Si lo hiciésemos:

$$\begin{aligned}
E(MS_R) &= \sigma^2 \\
&\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \hat{s}_R^2 = 13.89
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(MS_{Tr}) &= \sigma^2 + c\sigma_\alpha^2 \\
&\Rightarrow \hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{\hat{s}_\alpha^2 - \hat{s}_R^2}{c} = \frac{0.62 - 13.89}{4} = -3.317 < 0!!
\end{aligned}$$

ESTADISTICA II, Ingeniería Informática,
Problemas, 10 - junio - 2008

Apellidos y Nombre: ....

D.N.I. : ....

Problema 2:

Una empresa de software está interesada en estudiar que caracteristicas de los microprocesadores influyen en el rendimiento de una aplicación (variable de interés). Para ello recogieron el rendimiento Y, la cantidad de memoria cache X_1 (en MB) y la cantidad de memoria principal X_2 (en GB) de 18 microprocesadores. A partir de dicha muestra se obtuvieron los siguientes datos:

$$X'X = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 16.844 \\ 24 & 43.44 & 24.086 \\ 16.844 & 24.086 & 18.938 \end{pmatrix} \qquad X'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 896 \\ 1329.4 \\ 922.484 \end{pmatrix}$$

$$\left(X'X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.0805 & -0.2534 \\ -0.0805 & 0.0943 & -0.0483 \\ -0.2534 & -0.0483 & 0.3396 \end{pmatrix} \qquad Y^tY = \sum_{i=1}^{18} y_i^2 = 47730$$

P.6. Describir el modelo y obtener las estimaciones de los parámetros (coeficientes y varianza)

Solución:

Modelo:

$$\begin{aligned} &Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i \\ &\varepsilon_i \ i.i.d. \ N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

Estimaciones coeficientes:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.0805 & -0.2534 \\ -0.0805 & 0.0943 & -0.0483 \\ -0.2534 & -0.0483 & 0.3396 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 896 \\ 1329.4 \\ 922.484 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.626 \\ 8.678 \\ 22.019 \end{pmatrix}$$

i.e.: $rendimiento \simeq 17.6 + 8.7 cache + 22.02 memoria$

Estimación varianza:

$$SS_R = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}' X'\mathbf{Y} = 47730 - \begin{pmatrix} 17.626 & 8.678 & 22.019 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 896 \\ 1329.4 \\ 922.484 \end{pmatrix} = 88.396$$

$\hat{s}_R^2 = \frac{88.396}{18-3} = 5.893$

P.7. Contrastar si hay una relación lineal significativa entre la respuesta y las variables explicativas (tabla ANOVA). En caso afirmativo estudiar la bondad del ajuste.

Solución:

$$\begin{aligned} SS_R &= 88.396 \\ SS_T &= \sum y_i^2 - 18\bar{y}^2 = 47730 - \frac{896^2}{18} = 3129.1 \\ SS_E &= \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = SS_T - SS_R = 3129.1 - 88.396 = 3040.7 \end{aligned}$$

F. var.	SS	gl	MS	F	p-valor
Explicado	3040. 7	2	1520.35	257.99	< 0.005
Residual	88. 396	15	5.893		
Total	3129. 1	17	184.065		

$$F_{2,15,0.95} = 3.68 \ll 257.99$$
$$p = P\left(F_{2,15} > 257.99\right) \ll 0.005$$

Hay una relación lineal significativa (equiv.: aceptamos, con mucha seguridad, que hay relación lineal entre la respuesta y las variables explicativas).

Para estudiar la bondad del ajuste, en lugar del coef. de determinación:

$$R^2 = \tfrac{3040.7}{3129.1} = 0.972$$

es preferible utilizar la corrección por gl:

$$\bar{R}^2 = 1 - \tfrac{5.893}{184.065} = 0.968$$

$\Rightarrow$Un 97% de variabilidad explicada por la regresión$\Rightarrow$ Muy buen ajuste

P.8. Estudiar si la primera observación ($y_1 = 55, x_{1,1} = 0.5, x_{1,2} = 1$) es influyente a priori y atípica. Obtener el correspondiente intervalo confianza para la media y de predicción al 95%.

Solución:

$$\begin{aligned} h_{11} &= x_1^t \left(X'X\right)^{-1} x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & -0.0805 & -0.2534 \\ -0.0805 & 0.0943 & -0.0483 \\ -0.2534 & -0.0483 & 0.3396 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0.1276 < 2 \times \frac{3}{18} = 0.33333 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$No influyente a priori

$$\hat{m}_1 = \hat{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17.626 \\ 8.678 \\ 22.019 \end{pmatrix} = 43.984$$

$e_1 = 55 - 43.984 = 11.016$
$\widehat{Var}(e_1) = \hat{s}_R^2 \left(1 - h_{11}\right) = 5.893 \cdot (1 - 0.1276) = 5.141$
$\frac{11.016}{\sqrt{5.141}} = 4.8585 > 3$
$\Rightarrow$Atípico

$\widehat{Var}(\hat{m}_1) = \hat{s}_R^2 h_{11} = 5.893 \cdot 0.1276 = 0.752$
$t_{15,0.975} = 2.1315$
$IC_{95\%}(m_1) = \left(43.984 \pm 2.1315\sqrt{0.752}\right) = (42.136, 45.832)$

$\widehat{Var}(\hat{y}_1) = \hat{s}_R^2 \left(1 + h_{11}\right) = 5.893 \cdot 1.1276 = 6.645$
$IP_{95\%}(y_1) = \left(43.984 \pm 2.1315\sqrt{6.645}\right) = (38.489, 49.479)$

P.9. Contrastar, considerando un nivel de significación del 5%, si los coeficientes del modelo son significativamente distintos de cero (contrastes individuales).

Solución:

$$\begin{aligned}\widehat{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) &= \hat{s}_R^2\left(X'X\right)^{-1} \\ &= 5.893\cdot\begin{pmatrix} 0.4 & -0.0805 & -0.2534 \\ -0.0805 & 0.0943 & -0.0483 \\ -0.2534 & -0.0483 & 0.3396 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

de donde

$\hat{\beta}_i$	17.626	8.678	22.019
$\hat{\sigma}\left(\hat{\beta}_i\right)$	$\sqrt{2.357} = 1.535$	$\sqrt{0.556} = 0.746$	$\sqrt{2.001} = 1.415$
$\hat{T}_i = \dfrac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}\left(\hat{\beta}_i\right)}$	11.483	11.633	15.561
$p_i = 2P\left(t_{15} \geq \left\|\hat{T}_i\right\|\right)$	$\ll 0.01$	$\ll 0.01$	$\ll 0.01$

Todos los coeficientes son significativamente distintos de cero, por tanto no se podría simplificar el modelo (produciría una pérdida significativa en la proporción de variabilidad explicada).