Tema 2. Modelos de programación lineal y aplicaciones

Mª Luisa Carpente Rodríguez

Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Objetivos

1. Conocer la estructura de un problema de programación lineal.
2. Saber modelar como un problema de programación lineal una amplia clase de problemas.
3. Aplicar las técnicas de solución gráfica a los problemas de dos variables.

Calendario previsto

	Semanas														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T															
P															
	Tema 2														

1. **Formulación de problemas de programación lineal. Ejemplos**
   - Introducción
   - Formulación de problemas de programación lineal
   - Ejemplos
2. **Solución gráfica de problemas de programación lineal con dos variables. Interpretación**
   - Solución gráfica de problemas de programación lineal con dos variables
   - Interpretación

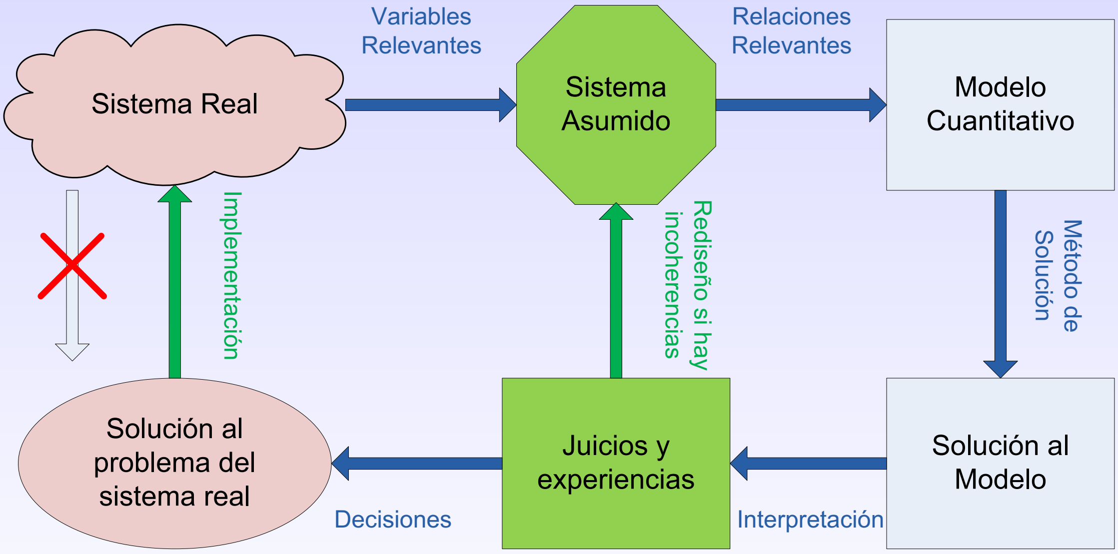
- Muchos clasifican el desarrollo de la programación lineal entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, su impacto desde 1950 ha sido extraordinario y muchas empresas ahorran gran cantidad de dinero gracias a la utilización de sus técnicas.
- El término programación no se refiere a la programación en ordenadores, sino que proviene de su significado original "planificación".
- El témino lineal hace referencia a que todas las funciones que intervienen en el modelo van a ser de ese tipo.

Formulación de problemas de programación lineal
Solución gráfica
Introducción

- Un problema de programación lineal (PPL), en general, trata elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas con el fin de minimizar los costes asociados o de maximizar los beneficios obtenidos.
- Como lo que subyace es un problema de decisión, hay que suponer que, en principio, existen varias alternativas para la elección de dichos niveles.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA
M.L. Carpente
Departamento de Matemáticas
Modelos de programación lineal y aplicaciones

La metodología de la Programación Lineal sigue el esquema general de la metodología empleada en la IO.



Características básicas de un PPL

- El criterio para seleccionar el nivel de las actividades (variables de decisión) puede describirse mediante una función lineal de esas variables, denominada función del objetivo.
- Las reglas que gobiernan los procesos (relaciones entre las variables) pueden expresarse como un conjunto de ecuaciones o inecuaciones lineales. Este conjunto se denomina conjunto de restricciones.

Notación básica de un PPL

Para un problema con n variables de decisión y m restricciones:

- z es el valor de la función del objetivo.
- x_j es el nivel de la actividad j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
- c_j es incremento en z que resulta al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
- b_i es la cantidad del recurso i disponible, $(i = 1, 2, \ldots, m)$.
- a_{ij} es cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Suposiciones básicas de un PPL

- Proporcionalidad: la contribución de cada actividad al valor de la función objetivo y al consumo de recursos (restricciones) es proporcional al nivel de actividad.
- Aditividad: cada función en un modelo de programación lineal (ya sea la función del objetivo o el lado izquierdo de las restricciones) es la suma de las contribuciones individuales de las variables respectivas.
- Divisibilidad: Las variables de decisión en un modelo de programación lineal pueden tomar cualquier valor.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Limitaciones de los modelos lineales

- Determinístico: el valor de los parámetros que intervienen en el modelo debe ser conocido y constante.
- Estático: la variable tiempo no se involucra formalmente en el modelo.
- No suboptimiza: o se encuentra la solución óptima o se concluye que ésta no existe.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Pasos para la construcción del modelo

1. Identificación de las variables.
2. Definir el objetivo y representarla como una función lineal de las variables que habrá que maximizar o minimizar.
3. Definir las relaciones entre las varibles: restricciones. Representarlas como un conjuto de ecuaciones o inecuaciones lineales.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Un problema de producción

Consideremos una empresa que fabrica dos productos, que denominaremos P1 y P2. Éstos son de tipo continuo, es decir, se pueden dividir de forma indefinida, como refrescos, gasolina, aceite o pintura. La empresa utiliza dos recursos o materias primas, que denominaremos M1 y M2. La siguiente tabla contiene datos que indican la disponibilidad diaria de cada recurso, la cantidad empleada de cada recurso para producir una tonelada de cada producto, y el beneficio económico, en miles de euros/ton. para cada producto. Además la producción de P2 no debe superar a la de P1. Se trata de determinar la producción que dé el máximo beneficio.

ton. \ ton.	P_1	P_2	disponible/día (tons.)
M_1	6	4	24
M_2	1	2	6
beneficio/ton. (k€)	5	4	

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Modelo del problema de producción

1. Identificación de las variables.
   - x_1: toneladas a producir de P1.
   - x_2: toneladas a producir de P2.
2. Definir el objetivo: hay que maximizar el beneficio.

$$max z = 5x_1 + 4x_2$$

3. Definir las restricciones:
   - Restricción del recurso M1: $6x_1 + 4x_2 \leq 24$
   - Restricción del recurso M2: $x_1 + 2x_2 \leq 6$
   - La producción de P2 no debe superar a la de P1: $x_1 - x_2 \geq 0$
   - Las variables son no negativas: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Modelo del problema de producción

$$
\begin{array}{rll}
max z = & 5x_1 + 4x_2 & \\
sa & 6x_1 + 4x_2 & \leq 24 \\
 & x_1 + 2x_2 & \leq 6 \\
 & x_1 - x_2 & \geq 0 \\
 & x_1 & \geq 0 \\
 & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

El problema de la dieta

George J. Stigler: Nacido en Seattle (Washington) en 1911, recibió el Nobel de Economía en 1982. Atraído por distintos temas económicos, son conocidos sus estudios sobre la teoría de los precios "Readings in Price Theory". En 1946 publica su trabajo de programación lineal, denominado *El coste de la subsistencia*, en el que desarrolla el llamado "problema de la dieta" y encuentra una solución aproximada al mismo.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

El problema de la dieta

En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: N1, N2 y N3. Una unidad de A vale 1 euro y contiene 2 unidades de N1, 1 de N2 y 1 de N3. Una unidad de B vale 2.40 euros y contiene 1, 3, y 2 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Se quiere determinar cantidades de alimentos A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo.

Modelo de programación lineal para el problema de la dieta

$$
\begin{aligned}
max z = \quad & x_1 + 2{,}4x_2 & \\
sa \quad & 2x_1 + x_2 & \geq 4 \\
& x_1 + 2x_2 & \geq 6 \\
& x_1 + 3x_2 & \geq 5 \\
& x_1 & \geq 0 \\
& x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolución gráfica de PPLs

- Nos centraremos en el caso sencillo en que el PPL tiene sólo dos variables de decisión.
- El interés principal de esta técnica es que su estudio nos proporcionará una valiosa comprensión intuitiva sobre las propiedades fundamentales de los PPLs.

Pasos básicos del procedimiento de resolución gráfica de PPLs

- Supongamos que nos se quiere resolver un PL con dos variables de decisión, x_1 y x_2.
- Se puede interpretar el par (x_1, x_2) como las coordenadas de un punto en el plano.
- Así se pinta cada una de las restricciones del problema. Cada ecuación da lugar a una línea recta y cada inecuación a un semiplano. La región resultado de intersecar todas las condiciones es la región factible. En caso de que esta región sea vacía el problema es no factible o sin solución.

Pasos básicos del procedimiento de resolución gráfica de PPLs

- Se pinta la función del objetivo para un determinado valor. Se desplaza esta recta, trazando paralelas, a lo largo de la región factible en la dirección que aumente su valor (si el problema es de maximización) o que dismuya su valor (si el problema es de minimización). Las rectas que representan ciertos valores del objetivo se suelen denominar rectas de nivel.
- La recta de nivel que proporcione el valor mayor (si el problema es de maximización) o menor (si el problema es de minimización) nos da el valor óptimo del problema.

Formulación de problemas de programación lineal
Solución gráfica
Solución gráfica de problemas de programación lineal con dos variables

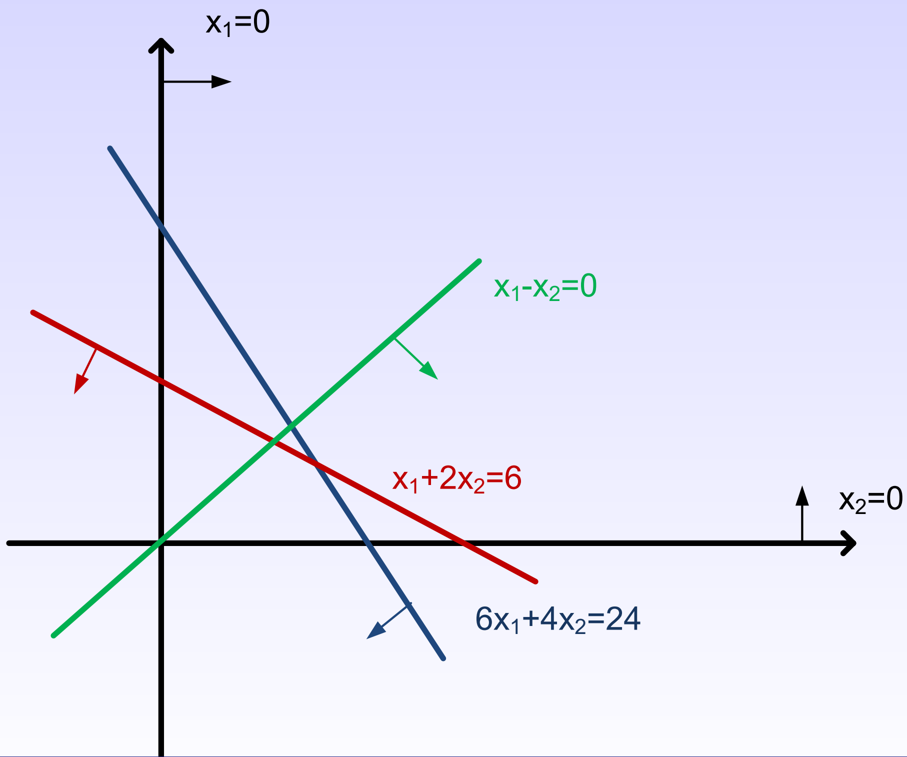
Ejemplo

Se trata de resolver gráficamente el problema de producción previamente planteado.

$$
\begin{aligned}
maxz = \quad & 5x_1 + 4x_2 & \\
sa \quad & 6x_1 + 4x_2 & \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 & \leq 6 \\
& x_1 - x_2 & \geq 0 \\
& x_1 & \geq 0 \\
& x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

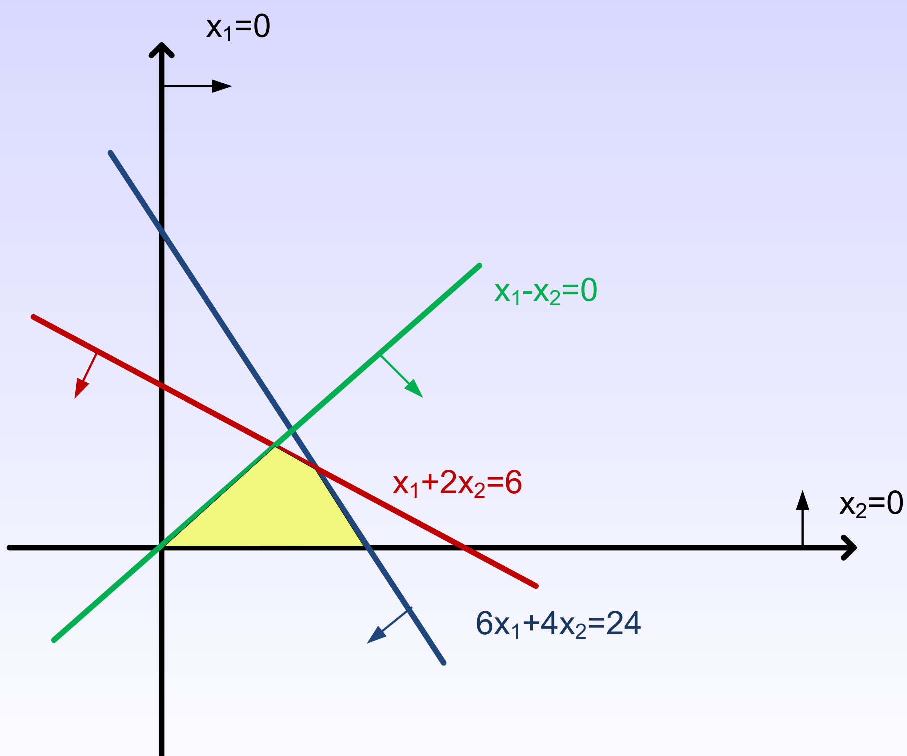
UNIVERSIDADE DA CORUÑA
M.L. Carpente
Departamento de Matemáticas
Modelos de programación lineal y aplicaciones

Pintado de las restricciones:



Formulación de problemas de programación lineal
Solución gráfica
Solución gráfica de problemas de programación lineal con dos variables

Determinar la región factible:

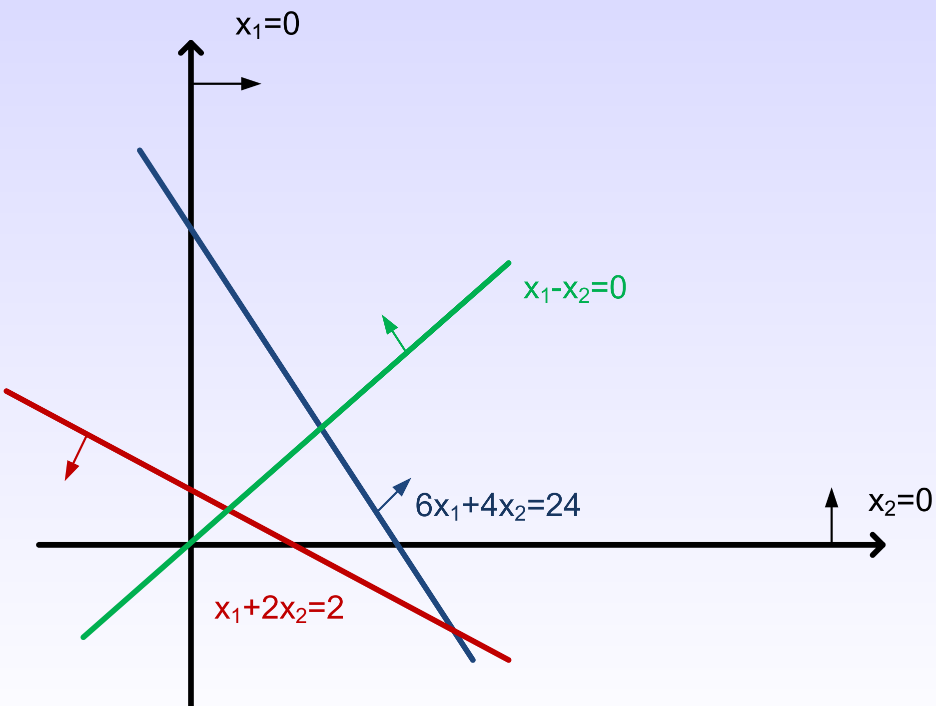


M.L. Carpente
Departamento de Matemáticas
Modelos de programación lineal y aplicaciones

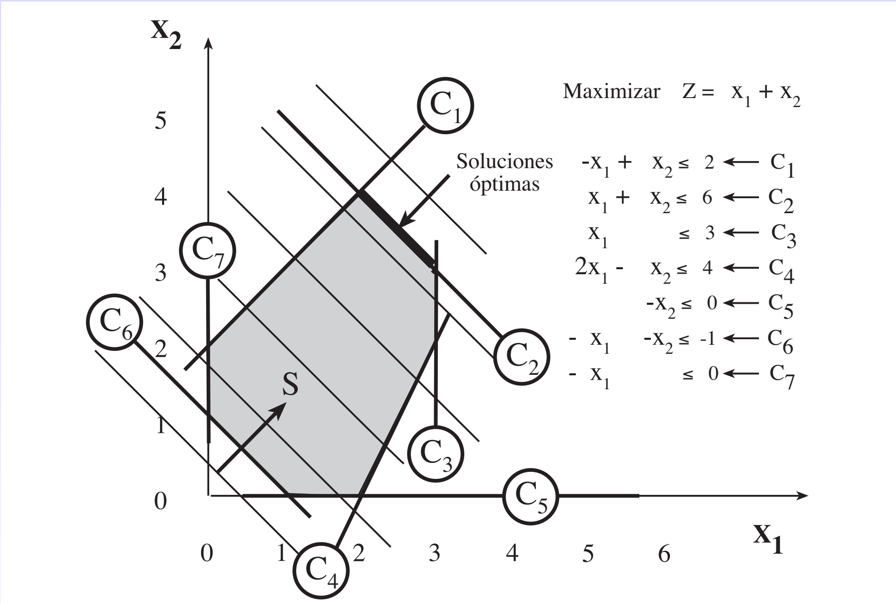
Ejemplo de problema no factible o sin solución

$$
\begin{aligned}
max z = \quad & 5x_1 + 4x_2 \\
sa \quad & 6x_1 + 4x_2 \geq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& x_1 - x_2 \leq 0 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo de problema no factible o sin solución



Ejemplo de problema con múltiples soluciones



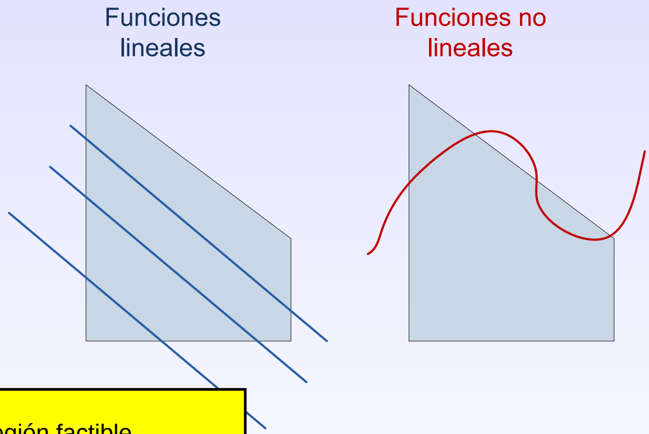
La combinación lineal de soluciones óptimas es una solución óptima.

Solución no acotada

- Además de la posibilidad de que un PPL no tenga ninguna solución factible también puede ocurrir que un PPL tenga soluciones factibles, pero que ninguna de ellas sea óptima.
- En el caso de PPLs con dos variables, detectamos tal situación cuando podemos desplazar las rectas de nivel de la función objetivo de forma ilimitada en la dirección que aumenta (si estamos maximizando) o disminuye (si estamos minimizando) su valor. En tales casos, decimos que el PPL es no acotado.

Elementos importantes para la demostración del teorema fundamental

- La linealidad de la función del objetivo.



Convexidad de la región factible.

La extensión natural del método gráfico a más dimensiones puede pensar en calcular todas las intersecciones del las ecuaciones que delimitan la región factible, evaluarlas con la función del objetivo y elegir la mejor. En esto consiste el procedimiento algebraico de solución.