Tema 3. El método del Simplex.

Mª Luisa Carpente Rodríguez

Departamento de Matemáticas

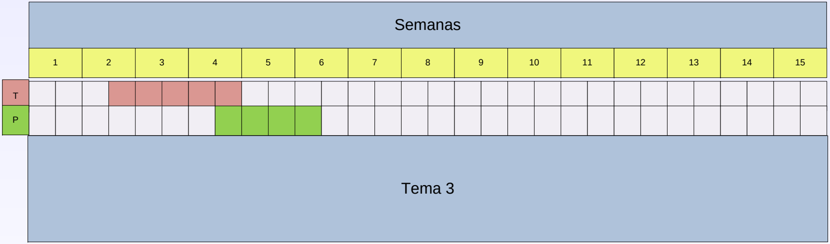
UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Objetivos

1. Conocer el funcionamiento de los algoritmos diseñados: el Simplex.
2. Conocer y manejar correctamente algún tipo de *software* para resolver este tipo de problemas.
3. Interpretar correctamente las soluciones.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Calendario previsto



UNIVERSIDADE DA CORUÑA

1. Problemas de programación lineal en forma estándar
2. Repaso de notación y nociones básicas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales
3. Definiciones básicas: solución factible, variables básicas y no básicas, sistema canónico, solución básica y solución factible básica
4. Esquema básico de funcionamiento del método del Simplex. Definiciones básicas: beneficios relativos y pivotaje
5. El método del Simplex por tablas: criterio de entrada, criterio de salida (regla de la mínima proporción)y elemento pivote

La forma estándar de un PPL com m restricciones y n variables se escribe:

$$
\begin{array}{rll}
max(\acute{o}min)z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \\
s.a. & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\
& \ldots\ldots\ldots & \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n & \geq 0
\end{array}
$$

donde $b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

En notación matricial

La forma estándar de un PPL com m restricciones y n variables se escribe:

$$\begin{aligned} max(\acute{o}\, min) \quad & z = cx \\ s.a. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde

- A $(m \times n)$: es la matriz de coeficientes
- x $(n \times 1)$: es el vector solución, de actividades o de decisiones
- b $(m \times 1)$: es el vector de restricciones o de recursos
- c $(1 \times n)$: es el vector de costes o de beneficios

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Cualquier PPL se puede pasar a forma estándar:

- Para convertir las desigualdades en igualdades se introducen las variables de holgura

Ejemplo

- Si se tiene $x_1 + x_2 \leq 8$ pasa a ser $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ con $x_3 \geq 0$
- Si se tiene $x_1 + x_2 \geq 8$ pasa a ser $x_1 + x_2 - x_3 = 8$ con $x_3 \geq 0$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

- Si algún b_j es negativo se multiplica toda la restricción por -1
- Si un x_i es ≤ 0, se introduce una variable ≥ 0, x_k, tal que $x_i = -x_k$
- Si una variable x_i es no restringida (puede tomar cualquier valor), se introducen dos variables ≥ 0, x_k x_l, tal que $x_i = -x_k - x_l$

Ejemplo

Sea el siguiente PPL:

$$
\begin{aligned}
maxz = \quad & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2 \\
& 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

La forma estándar del PPL es:

$$
\begin{aligned}
max z = \quad & 5x_1 + 2x_2^- + 3x_3^+ - 3x_3^- \\
s.a. \quad & x_1 - x_2^- + x_3^+ - x_3^- + x_4 = 7 \\
& x_1 + x_2^- + x_3^+ - x_3^- - x_5 = 2 \\
& -3x_1 - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- = 5 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2^- \geq 0 \\
& x_3^+ \geq 0 \\
& x_3^- \geq 0 \\
& x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dado el PPL estándar

$$\begin{aligned} max(ó min) \quad & z = cx \\ s.a. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

se tiene que:

- Una solución factible es un vector no negativo x tal que $Ax = b$
- La región factible,S, es es conjunto de todas las soluciones factibles

$$S = \{x/Ax = b, x \geq 0\}$$

- Si $S = \emptyset$ entonces el problema se dice no factible

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

- Una solución óptima es un vector x^o tal que es una solución factible y maximiza (o minimiza) la función del objetivo, es decir $cx^o = maxcx$ (o $cx^o = mincx$)
- El valor óptimo de un PPL es el valor del objetivo correspondiente a la solución óptima ($z^o = cx^o$)

- Los sistemas de ecuaciones lineales pueden resolverse por el método de eliminación de Gauss-Jordan.
- Si un sistema de ecuaciones tiene más incógnitas que ecuaciones, entonces tiene más de una solución. A la colección de todas las posibles soluciones se le llama conjunto solución.
- Dos sistema de ecuaciones se dicen equivalentes si ambos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

- Sea el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$

- Si en el sistema anterior cambiamos la segunda ecuación sumándole la primera cambiada de signo, eliminamos la variable x_1

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

- Eliminamos ahora x_2 de la primera ecuación

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 &= 6 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

- Si hacemos

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

  se obtiene

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 2$$

- Una variable es básica si aparece en una única ecuación del sistema con coeficiente 1. Las variables que no cumplen esto, se dicen no básicas.
- Un sistema de ecuaciones se llama canónico si en cada ecuación aparece una variable básica.
- Un pivotaje es una sucesión de operaciones elementales que reduce un sistema de ecuaciones dado a uno equivalente.

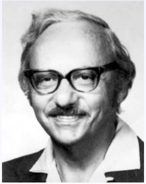
- Una solución es básica si se obtiene de hacer las variables no básicas cero y se calcula el valor de las básicas en cada ecuación.
- Una solución es factible básica si es básica y los valores de las variables básicas son no negativos.
- Dado un PPL con n variables y m restricciones, el número de soluciones básicas está acotado por $\binom{n}{m}$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Introducción

George Dantzig

Nacido en Oregón en 1914, hijo de inmigrantes de origen ruso, estudia matemáticas en la Universidad de Maryland. Poco después de doctorarse por la Universidad de Berkeley, en 1947, formula el enunciado estándar de un problema general de Programación Lineal y desarrolla el método del Simplex.



- Una de las primeras aplicaciones del Simplex fue la resolución del llamado “puente aéreo de Berlín”. A mediados de 1948, en plena guerra fría, la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres con Berlín. Utilizando la Programación Lineal, se diseñó un plan de abastecimiento aéreo que en pocos meses consiguió igualar a los anteriores suministros realizados por carretera y ferrocarril.
- En 1951 el ordenador SEAC (Standards Eastern Automatic Computer) resolvía problemas con 48 restricciones y 72 variables.
- En 1963 el IBM 7090 resolvía problemas con 1024 restricciones y 10 años más tarde otro IBM, el modelo 360, era ya capaz de utilizar 32000 restricciones.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Principios del Simplex

Es un procedimiento iterativo para resolver PPLs en forma estándar.

1. Empezar obteniendo una solución factible básica inicial (poniendo el sistema de ecuaciones en forma canónica).
2. Mejorar dicha solución si es posible. En ese caso el Simplex ya dejará de considerar todas aquellas soluciones factibles básicas cuya función del objetivo sea peor que la actual.
3. Repetir el paso 2 hasta encontrar la mejor solución factible básica.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Sea el problema:

$$
\begin{aligned}
max z = \quad & 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 & \\
s.a. \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 8 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 & = 7 \\
& x_i \geq 0 &
\end{aligned}
$$

La siguiente es una solución factible básica:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$x_4 = 8$$

$$x_5 = 7$$

$$z = -1$$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

- El cambio neto en el valor de z para un incremento unitario de una variable se denomina beneficio relativo y se denotará por $\bar{c}$.

Calculamos el beneficio relativo de x_1 (se mantiene $x_2 = x_3 = 0$). Si $x_1 = 1$ entonces:

$$x_4 = 7$$

$$x_5 = 4$$

$$z = 2$$

Luego aumentar el valor de x_1 en una unidad hace que el objetivo aumente en $2 - (-1) = 3$ unidades ($\bar{c}_1 = 3$). Sabemos que la anterior solución factible básica no es óptima. Haciendo el mismo razonamiento obtenemos $\bar{c}_2 = 0$ y $\bar{c}_3 = 4$.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

- Una solución básica adyacente a una SB específica difiere de la solución básica considerada en una única variable básica.

En el ejemplo anterior, si incluimos en la base la variable que tenía el mejor beneficio relativo, x_3, el máximo valor que puede tomar ésta lo condicionan las restricciones:

$$2x_3 + x_4 = 8$$

$$x_3 + x_5 = 7$$

Como $x_4, x_5 \geq 0$ se tiene

$$x_4 = 8 - 2x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 4$$

$$x_5 = 7 - x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 7$$

Por tanto, $x_3 \leq 4$ y la variable x_4 se anula, pasando a no ser básica. La solución obtenida así es adyacente de la primera SFB.

El método del Simplex para un problema de maximización

1. Empezar con una SBF del sistema en forma canónica.
2. Comprobar si esa solución es óptima, calculando los beneficios relativos de las variables no básicas. Si todos son ≤ 0, la solución actual es óptima y se finaliza. En otro caso, seguir.
3. Seleccionar la variable no básica con el mayor beneficio relativo. Esta variable entrará en la base.
4. Determinar la variable que sale de la base por la regla de la mínima proporción: las restricciones en las que la variable no básica seleccionada tiene coeficiente positivo, restringen el crecimiento de la variable al cociente entre la constante de la derecha y el valor del coeficiente positivo (los ceros o negativos no limitan el crecimiento de la variable).
5. Resolver el nuevo sistema y volver a 2.

Veremos el Simplex por tablas en el problema:

$$
\begin{aligned}
max z = \quad & 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 \\
s.a. \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 7 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Coeficientes del objetivo

b

Variables básicas

	5	2	3	-1	1	
-1	1	2	2	1	0	8
1	3	4	1	0	1	7
	3	0	4	0	0	-1

A

Beneficios relativos

z

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

- Para calcular los beneficios relativos:

$$\bar{c}_i = c_i - c_B P_i$$

donde c_B son los coeficientes en el objetivo de las variables básica y P_i es la columna en la tabla de la variable x_i.

- Tras un pivotaje:
  - Nueva fila pivote = fila antigua pivote divida por el valor del pivote.
  - Nueva fila = fila antigua-(coeficiente de la columna pivote)×(nueva fila pivote)

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

TABLA 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	5	2	3	-1	1	
-1	1	2	2	1	0	8
1	3	4	1	0	1	7
	3	0	4	0	0	-1

TABLA 2

	5	2	3	-1	1	
3	1/2	1	1	1/2	0	4
1	5/2	3	0	-1/2	1	3
	1	4	0	-2	0	15

TABLA 3

	5	2	3	-1	1	
3	0	2/5	1	3/5	-1/5	17/5
5	1	6/5	0	-1/5	2/5	6/5
	0	-26/5	0	-9/5	-2/5	81/5

Óptima

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Observaciones

- Si en la tabla óptima alguna variable no básica tiene beneficio relativo cero, entonces hay óptimos alternativos.
- Si el problema es de minimización:
    - Se cambia de signo la función del objetivo y se resuelve como uno de maximización.
    - Se utiliza el algoritmo descrito, variando que la variable no básica que entra es la de menor beneficio relativo y finalizando cuando todos los beneficios relativos sean no negativos.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA