Ingeniería Informática

Problemas del tema 2

Conceptos básicos de señales y sistemas

Curso 2007-08

22/10/2007

Enunciados

1. La siguiente igualdad se conoce con el nombre de relación de Euler

$$e^{j\phi} = cos\phi \ + \ j \ sen\phi$$

Utilice esta relación para demostrar las siguientes igualdades

a) $cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)$

b) $sen\phi = \frac{1}{2j}\left(e^{j\phi} - e^{-j\phi}\right)$

c) $cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + cos2\phi)$

d) $(sen\theta)(sen\phi) = \frac{1}{2}cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}cos(\theta + \phi)$

2. Sea z un número complejo con coordenadas polares r, ϕ y coordenadas cartesianas x, y. Obtenga las expresiones de las coordenadas cartesianas de los siguientes números complejos en términos de x, y.

a) $z_1 = re^{-j\phi}$

b) $z_2 = r$

c) $z_3 = re^{j(\phi+\pi)}$

d) $z_4 = re^{j(-\phi+\pi)}$

e) $z_5 = re^{j(\phi+2\pi)}$

3. Sea z una variable compleja

$$z = x + jy = re^{j\phi}$$

El conjugado de z se denota por z^* y se define como

$$z^* = x - jy = re^{-j\phi}$$

Demuestre que se cumplen las siguientes relaciones, donde z, z_1 y z_2 son números complejos arbitrarios.

a) $zz^* = r^2$

b) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\phi}$

c) $|z| = |z^*|$

d) $z + z^* = 2\Re\{z\} = 2x$

e) $z - z^* = 2\Im\{z\} = 2y$

f) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

g) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$, donde a es un número real cualquiera.

h) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

4. Dibuje cada una de las siguientes señales contínuas

   a) $x(t) = 2u(t) - u(t-1)$ y $dx(t)/dt$.

   b) $x(t) = u(t+2) - 2u(t) + u(t-1)$ y $dx(t)/dt$.

   c) $x(t) = t[u(t+1) - u(t-2)]$ y $dx(t)/dt$.

   d) $x(t) = \delta(t+\pi) - 2\delta(t-\pi)$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

   e) $x(t) = (cos\pi t)[\delta(t) + \delta(t-1)]$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

   f) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$.

   g) $x(t) = e^{-bt}\left[\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right] u(t+\varepsilon)$, siendo $b > 0$ y $0 < \varepsilon < T$.

5. Dibuje cada una de las siguientes señales discretas

   a) $x(n) = u(n) - 2u(n-4)$ y $y(n) = x(n) - x(n-1)$.

   b) $x(n) = 2u(n+1) + u(n) - 3u(n-2)$.

   c) $x(n) = (1-n)[u(n+2) - u(n-3)]$.

   d) $x(n) = \delta(n+2) - 2\delta(n-1)$ y $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

   e) $x(n) = n^2[\delta(n+2) - \delta(n-2)]$ y $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

   f) $x(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$

   g) $x(n) = cos\dfrac{\pi n}{N}\left[\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)\right] u(n)$

6. Clasifique las siguientes señales como señales de energía finita o de potencia media finita. Calcule la energía o la potencia media según cada caso.

   a) $x(t) = e^{-2t}u(t)$

   b) $x(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$

   c) $x(t) = A\ cos\omega_o t$

   d) $x(t) = \begin{cases} A\ cos\omega_o t & -T_o/2 \le t \le T_o/2, \quad \text{siendo} \quad T_o = 2\pi/\omega_o \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

   e) $x(t) = \begin{cases} A\ exp(-at) & t > 0, \quad \text{siendo} \quad a > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

f) $x(t) = cos2\pi t + 5cos4\pi t$

7. Calcule las siguientes integrales

   a) $\int_{-\infty}^{t} (cos\tau)u(\tau)d\tau.$

   b) $\int_{-\infty}^{t} (cos\tau)\delta(\tau)d\tau.$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} (cos\tau)\delta(\tau)d\tau.$

   d) $\int_{-\infty}^{\infty} (cos\tau)u(\tau-1)\delta(\tau)d\tau.$

   e) $\int_{0}^{2} exp(t^2-3t+2)\delta(t-1)dt.$

8. Sea $x(t)$ la señal de la figura 1. Dibuje las siguientes señales:

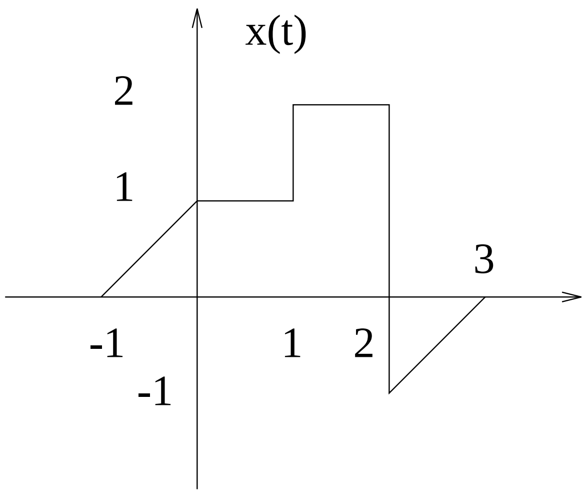


Figura 1:

   a) $x(t-2)$
   b) $x(1-t)$
   c) $x(2t+2)$
   d) $x(2-t/3)$
   e) $[x(t)+x(2-t)]u(1-t)$
   f) $x(t)[\delta(t+3/2)-\delta(t-3/2)]$.

9. Considere la señal discreta $x(n)$ de la figura 2. Dibuje las siguientes señales:

   a) $x(n-2)$
   b) $x(4-n)$
   c) $x(2n)$

d) $x(2n+1)$

e) $x(n)u(2-n)$

f) $x(n-1)\delta(n-3)$

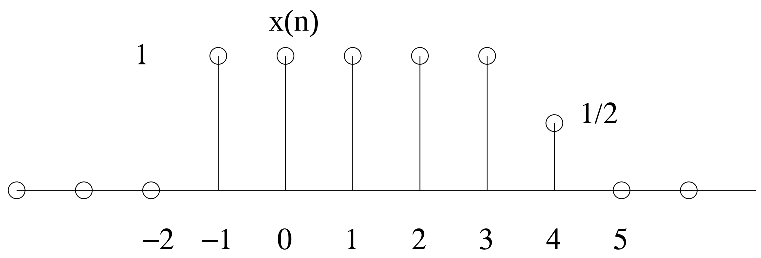


Figura 2:

10. Dibuje las siguientes sinusoides reales contínuas.

    a) $sen\ 2\pi t$

    b) $sen\ (2\pi t - \pi/4)$

    c) $sen\ (2\pi t + \pi/4)$

    d) $sen\ (2\pi t + \pi/2)$

    e) $sen\ 4\pi t$

    f) $Re\left[e^{j4\pi t}\right]$

11. Determine cuales de las siguientes señales son periódicas. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

    a) $x(t) = 3\ cos(4t + \pi/3)$

    b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

    c) $x(t) = cos^2(2t - \pi/3)$

12. Determine si cada uno de estos sistemas es lineal, invariante en el tiempo, causal o estable:

    a) $y(t) = t^2 x(t-1)$

    b) $y(t) = e^{x(t)}$

    c) $y(t) = x(t-1) - x(1-t)$

    d) $y(t) = [cos(3t)]x(t)$

    e) $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau)d\tau$

    f) $y(t) = x(t/2)$

13. Suponga que $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica de periodo T.

a) Demuestre que $\tilde{x}(t)$ se puede expresar de la siguiente forma

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

donde $x(t)$ es la forma de onda de un periodo.

b) Dibuje $\tilde{x}(t)$ cuando $x(t)$ tiene la forma de la siguiente figura y $T = 2$.

c) Repita el apartado anterior cuando $T = 3$.

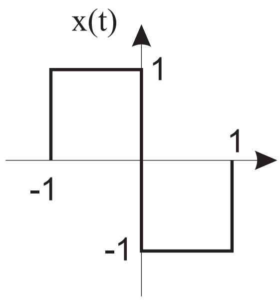


Figura 3: Ejercicio 13

14. Una señal $x(t)$ tiene la siguiente expresión analítica

$$x(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Dibuje $x(t)$.

b) Calcule y dibuje $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

c) Calcule y dibuje $z(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

Soluciones

2. a) $\Re(z_1) = x$, $\Im(z_1) = -y$

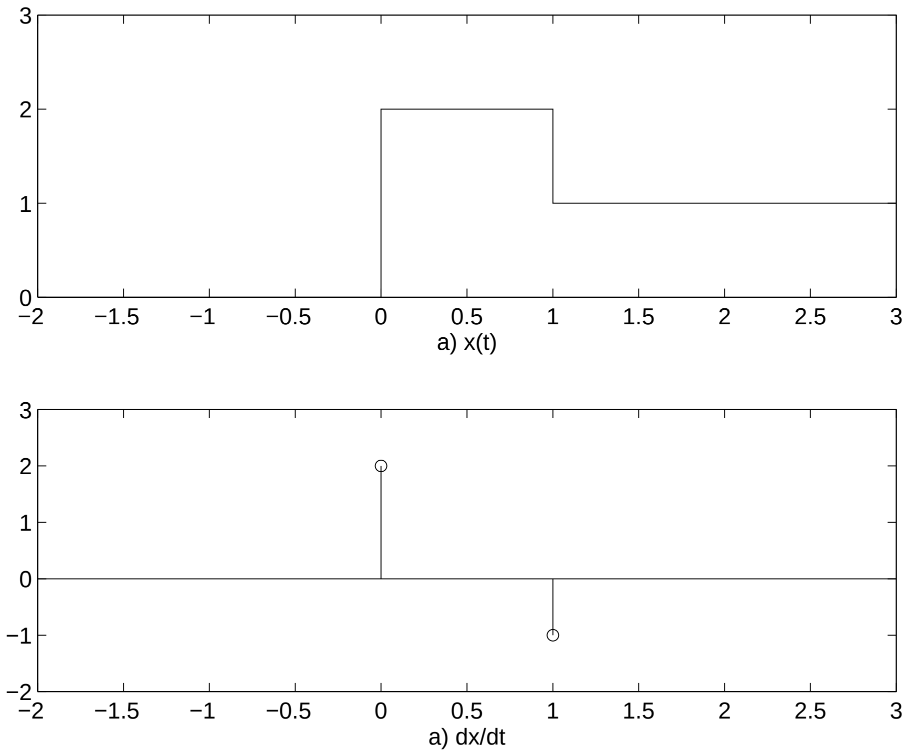
   b) $\Re(z_2) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, $\Im(z_2) = 0$

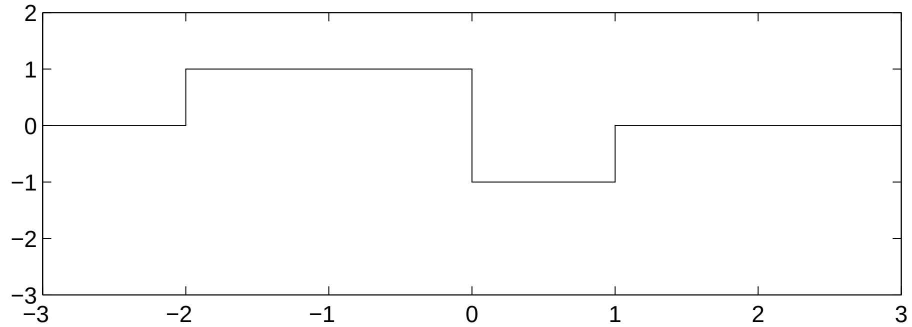
   c) $\Re(z_3) = -x$, $\Im(z_3) = -y$

   d) $\Re(z_4) = -x$, $\Im(z_4) = y$

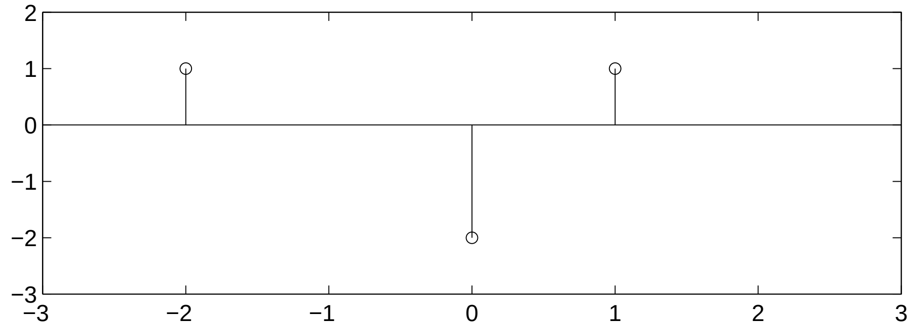
   e) $\Re(z_5) = x$, $\Im(z_5) = y$

4.

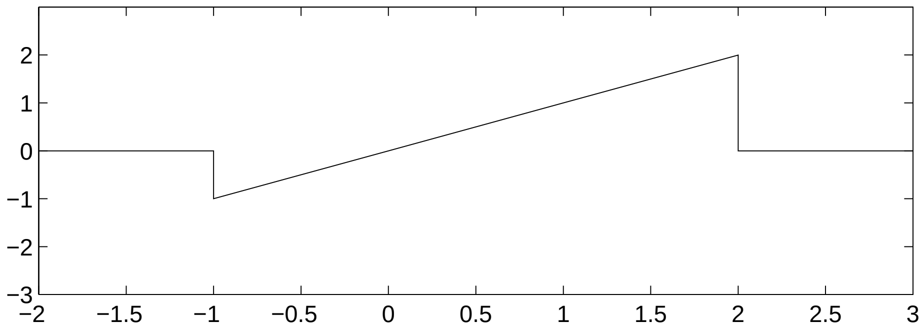




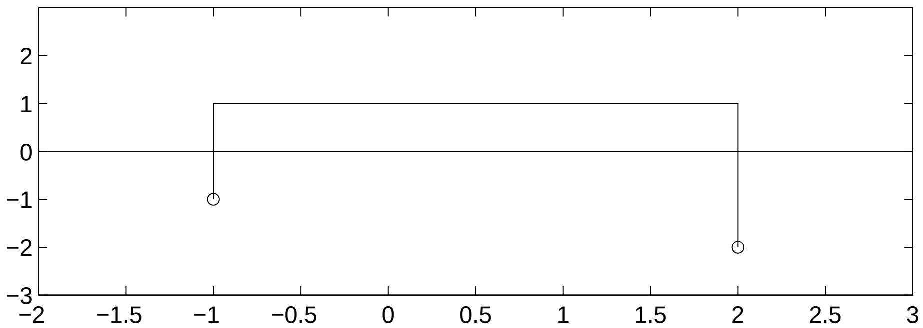
b) x(t)



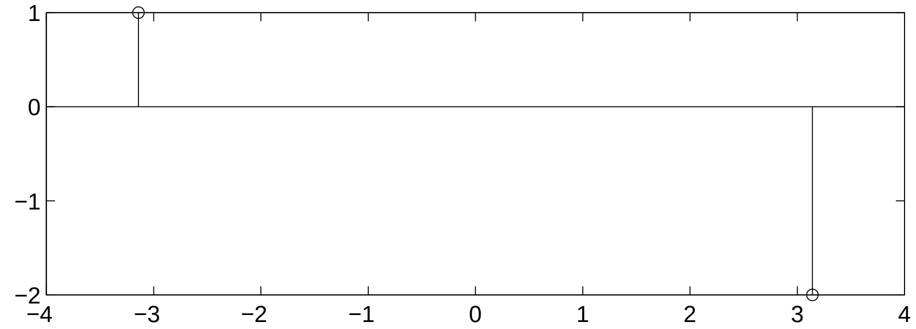
b) dx/dt



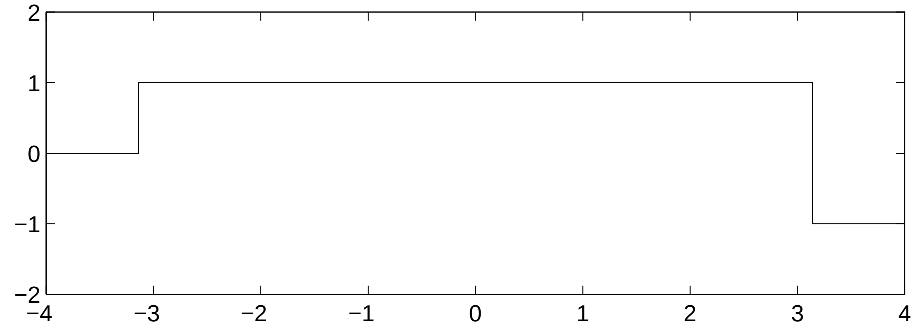
c) x(t)



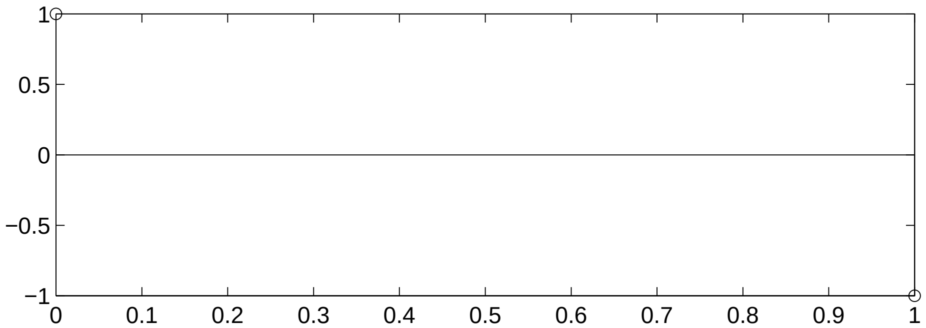
c) dx/dt



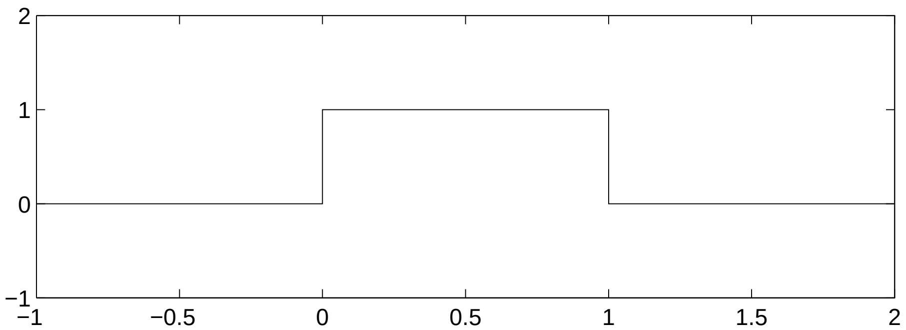
d) x(t)



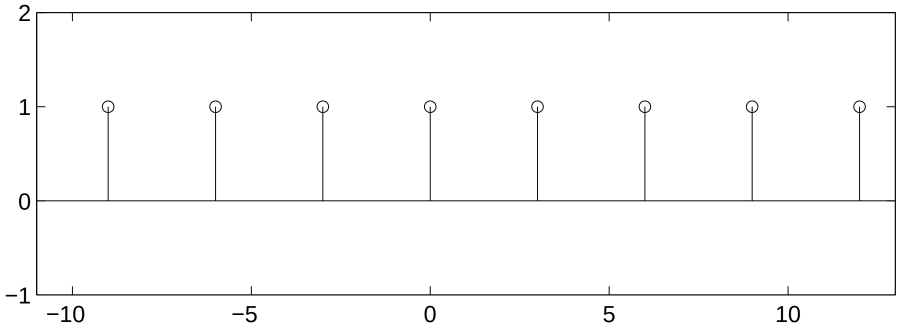
d) integral de x(t)



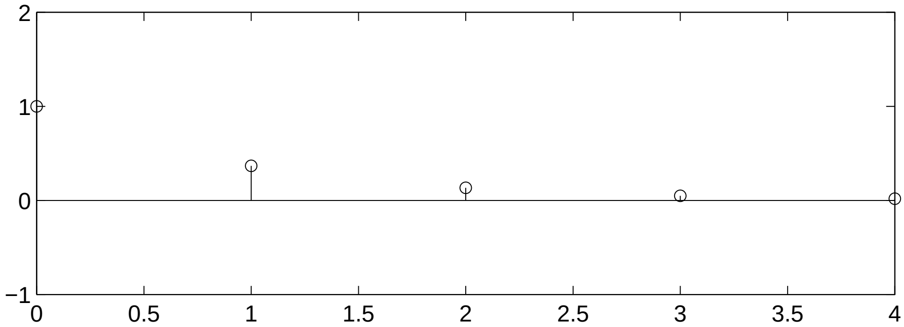
e) x(t)



e) integral de x(t)

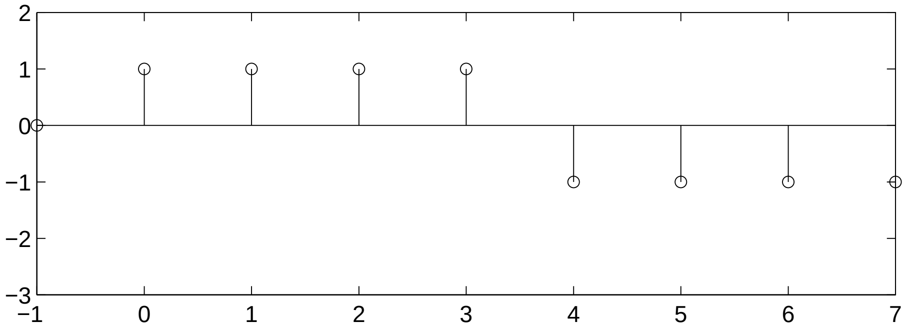


f) x(t) [en este dibujo, T=3]

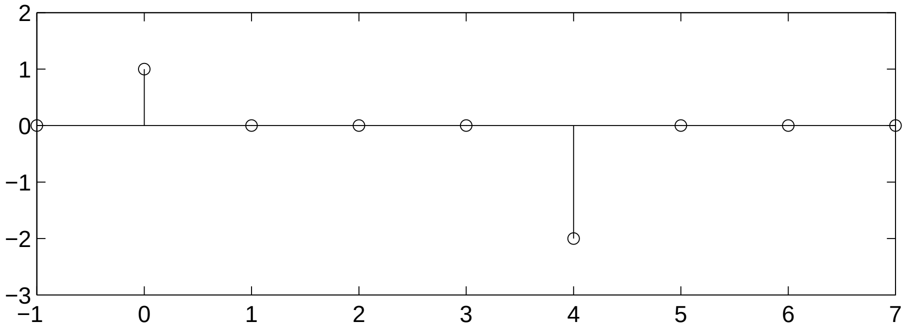


g) x(t) [En este dibujo, b=T=1]

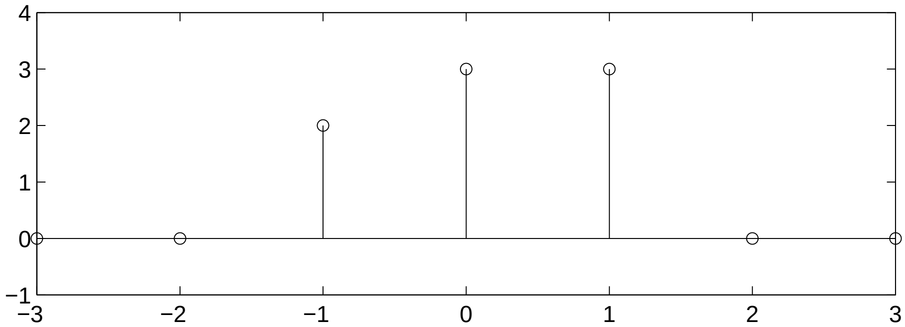
5.

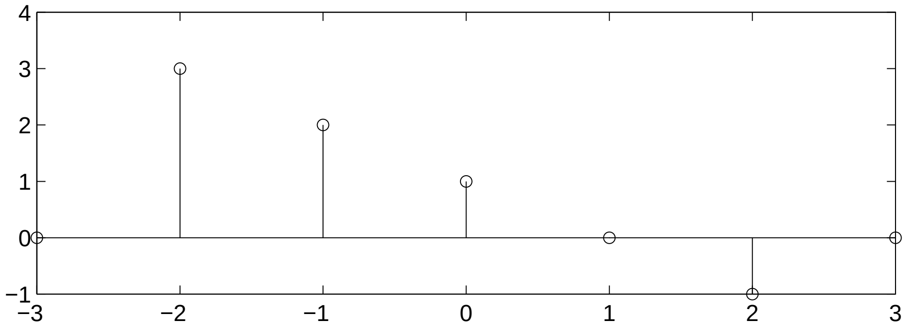


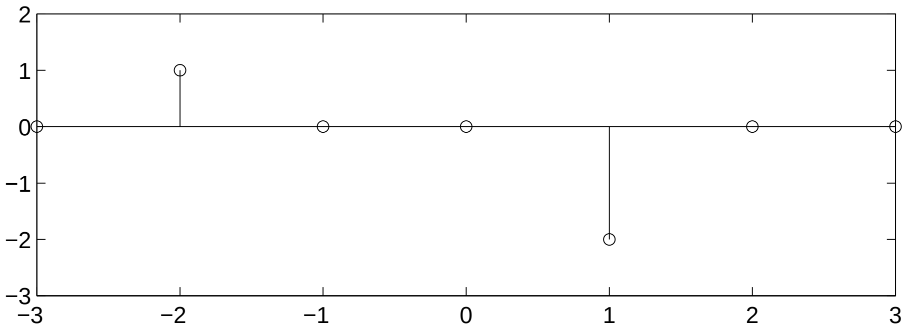
a) x(n)

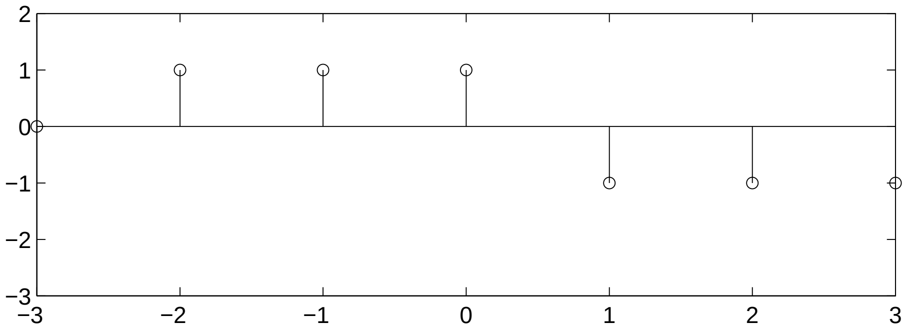


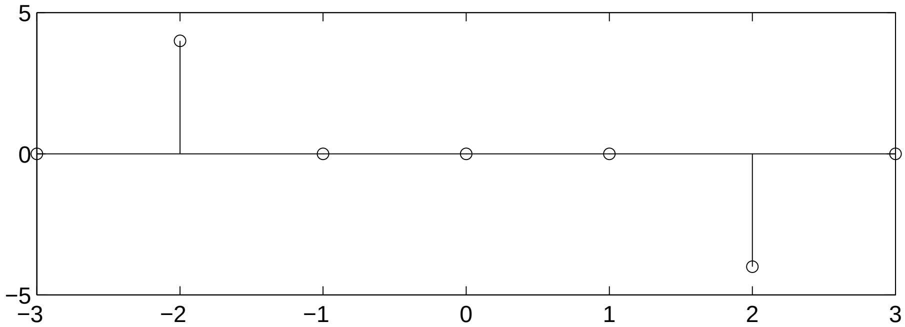
a) y(n)


4
3
2
1
0
−1
−3
−2
−1
0
1
2
3
b)

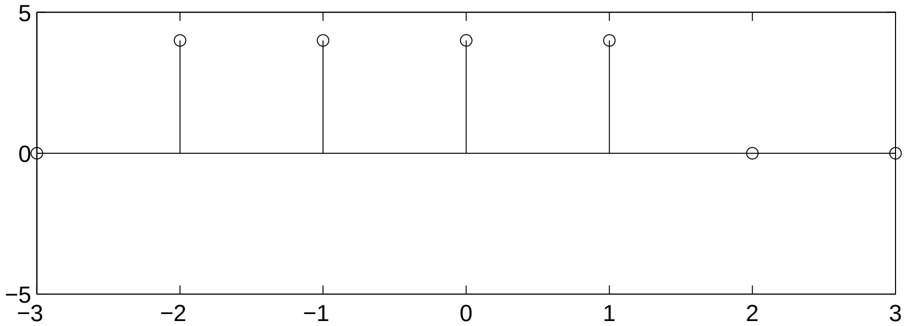

4
3
2
1
0
−1
−3
−2
−1
0
1
2
3
c)


2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3
d) x(n)

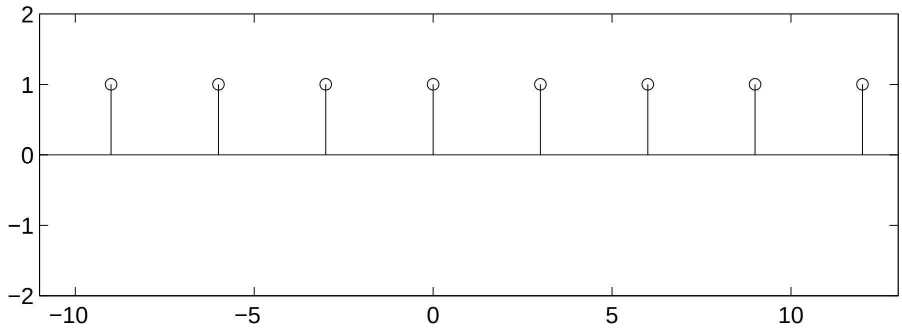

2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3
d) y(n)



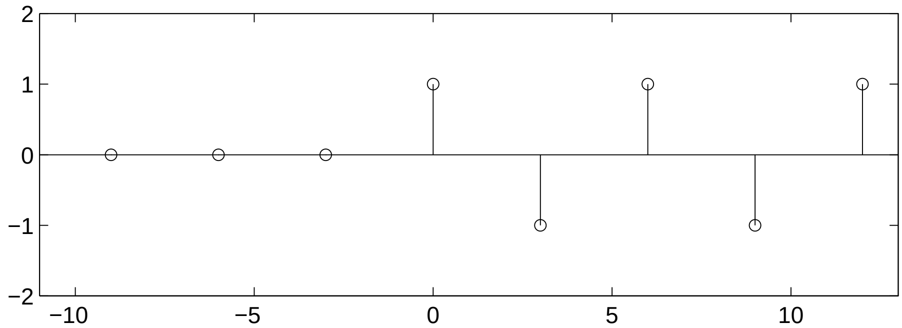
e) x(n)



e) y(n)



f) x(t) [en este dibujo, N=3]



g) x(t) [en este dibujo, N=3]

6. *a*) Energa Finita, $\frac{1}{4}$
   b) Potencia Media Finita, 1
   c) Potencia Media Finita, $\frac{A^2}{2}$
   d) Energa Finita, $\frac{A^2T}{2}$
   e) Energa Finita, $\frac{A^2}{2a}$
   f) Potencia Media Finita, 13

7. $a)$ $\begin{cases} sen(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

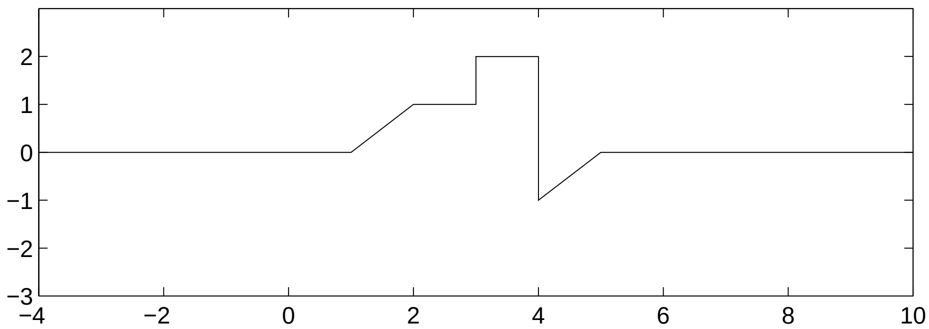
$b)$ $u(t)$

$c)$ 1

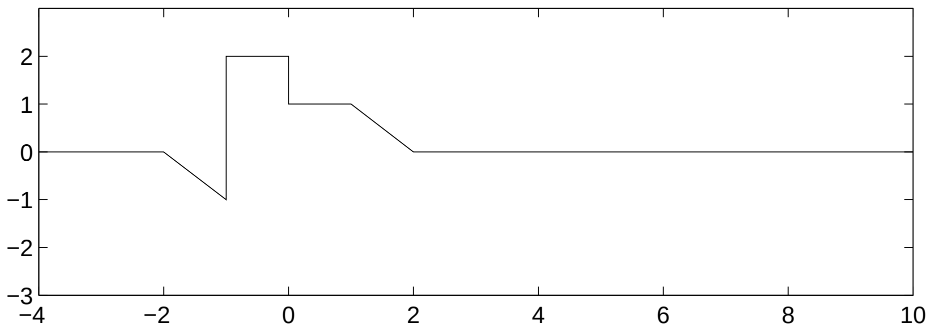
$d)$ 0

$e)$ 1

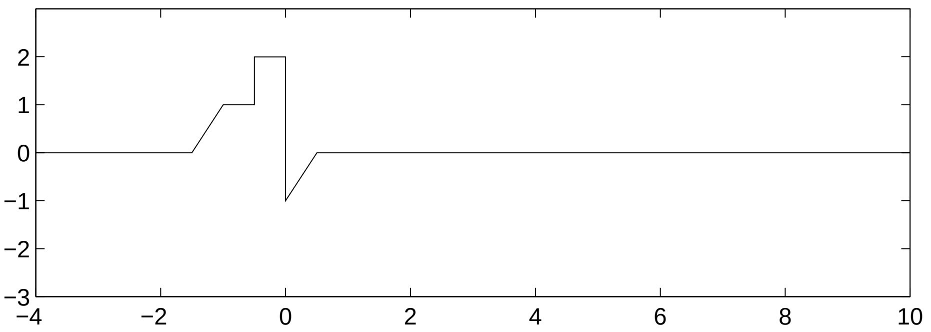
8.

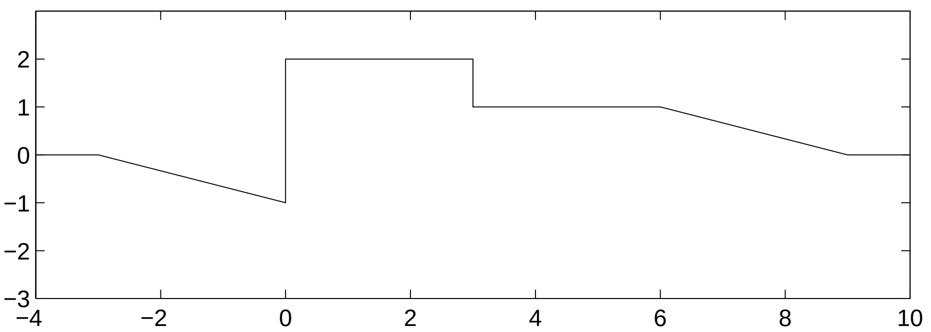


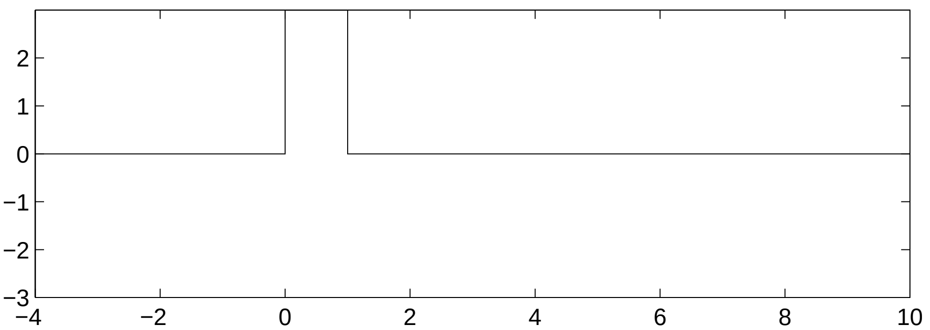
a)

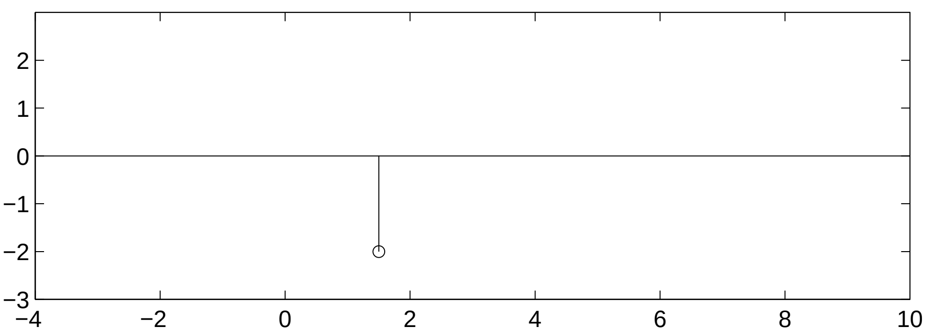


b)

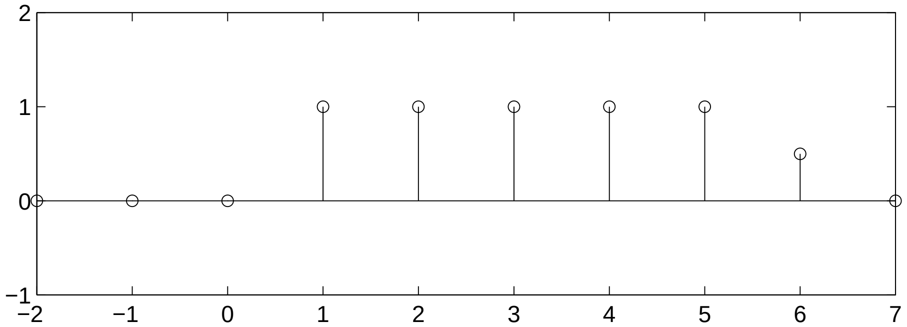

2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
0
2
4
6
8
10
c)


2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
0
2
4
6
8
10
d)

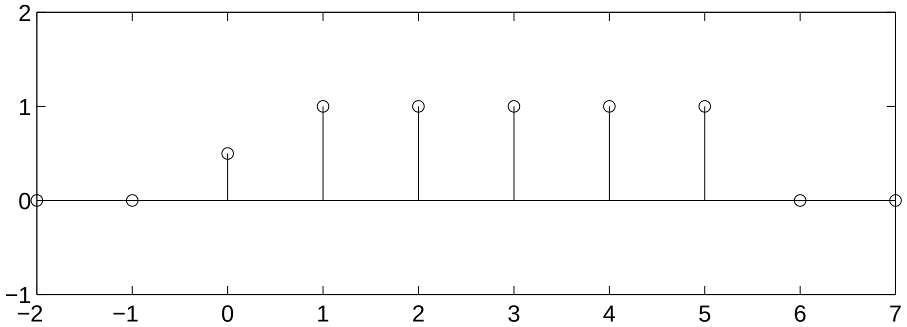

2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
0
2
4
6
8
10
e)


2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
0
2
4
6
8
10
f)

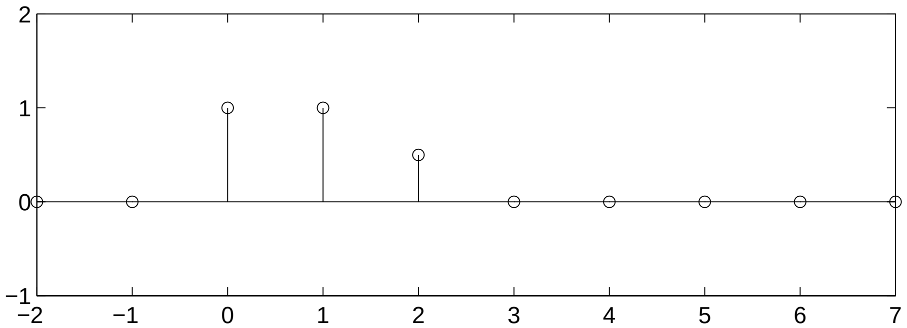
9.


2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

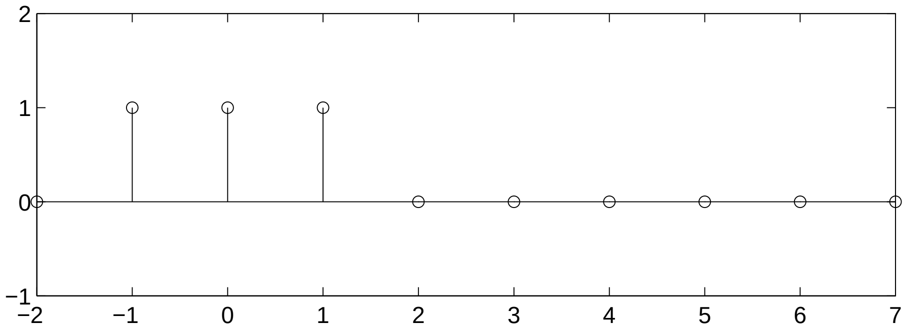
a)


2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

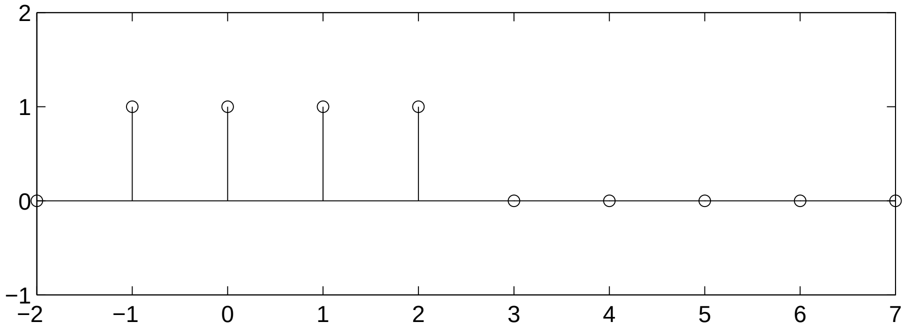
b)


2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

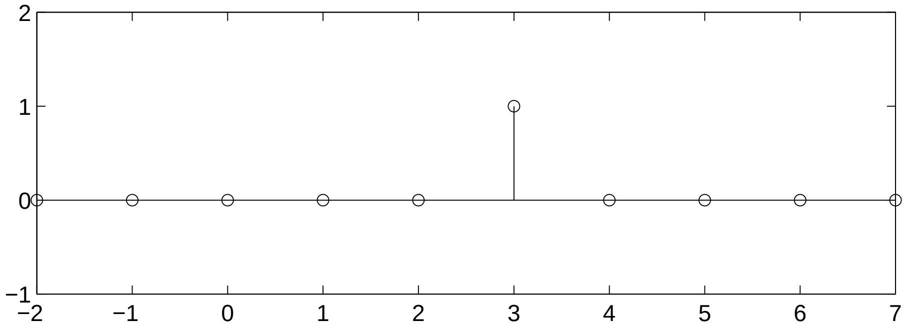
c)


2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

d)

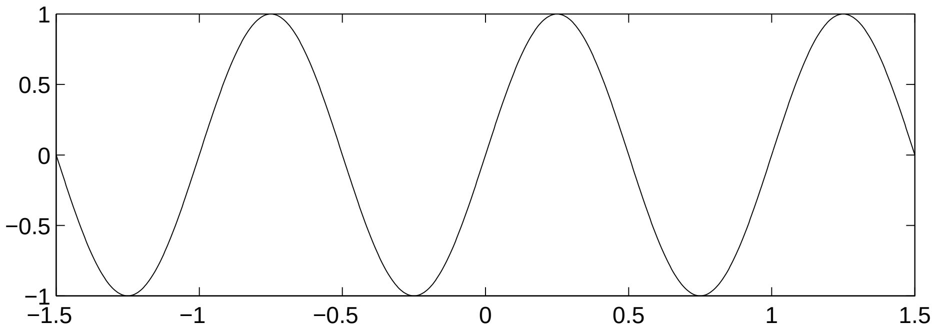

2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

e)

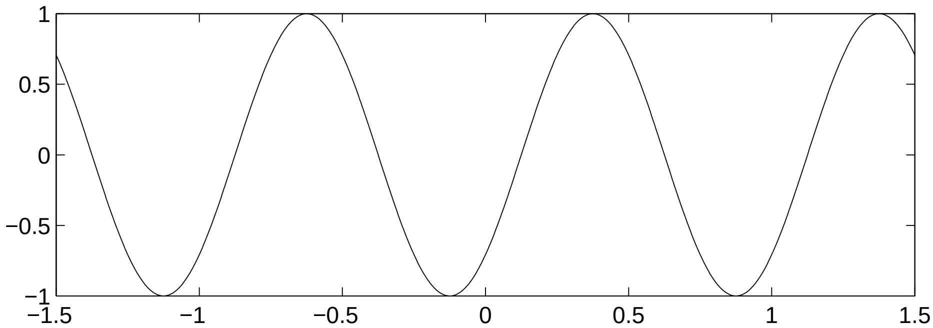

2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7

f)

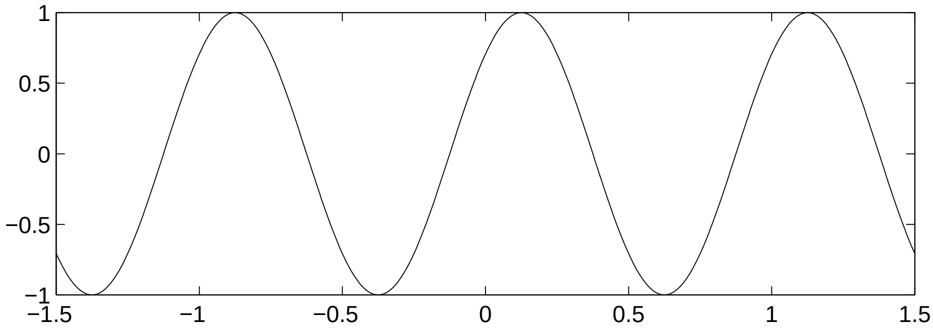
10.


1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5 −1 −0.5 0 0.5 1 1.5

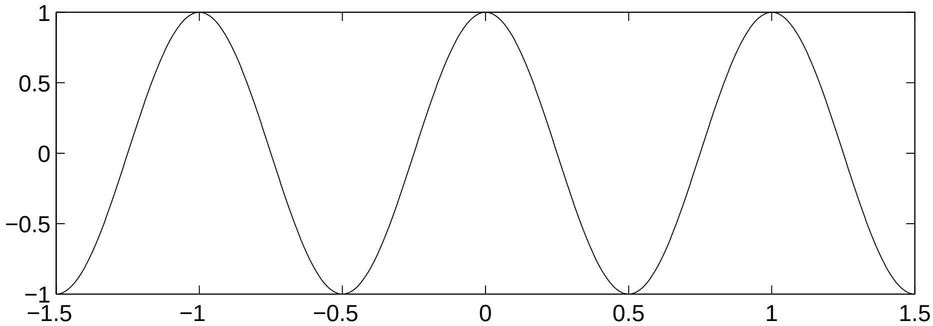
a)


1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5 −1 −0.5 0 0.5 1 1.5

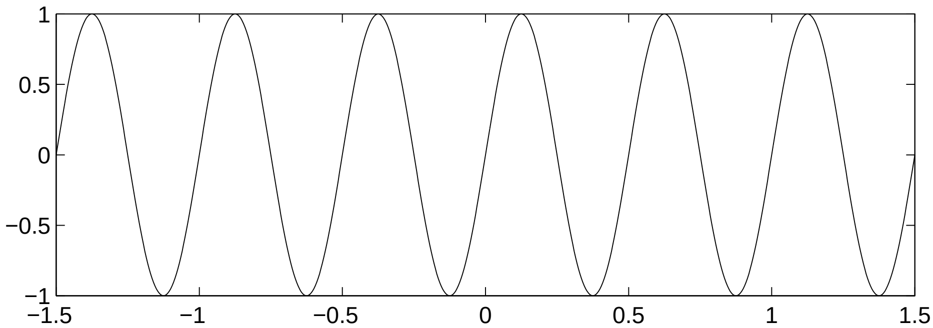
b)



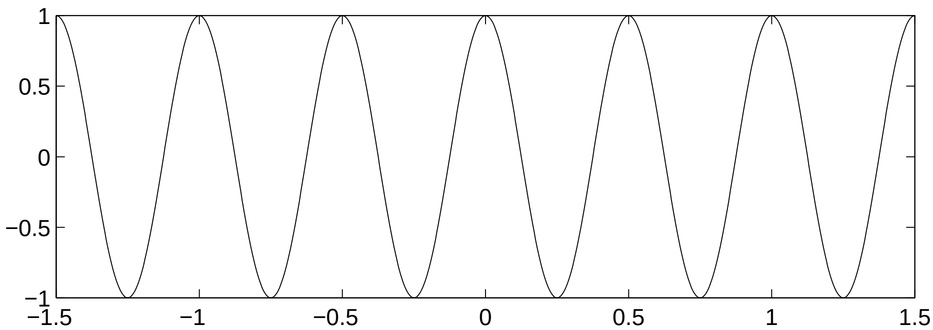
c)



d)



e)



f)

11. *a*) Peridica, $\mathrm{T}_0 = \frac{\pi}{2}$

    b) Peridica, $\mathrm{T}_0 = 2$

    c) Peridica, $\mathrm{T}_0 = \frac{\pi}{2}$

12.

	L	I	C	E
(a)	si	no	si	no
(b)	no	si	si	si
(c)	si	no	no	si
(d)	si	no	si	si
(e)	si	no	no	no
(f)	si	no	no	si