Ingeniería Informática

Medios de Transmisión (MT)

Problemas del tema 3

Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Curso 2007-08

6/11/2007

Enunciados

1. Considere el sistema de la figura 1

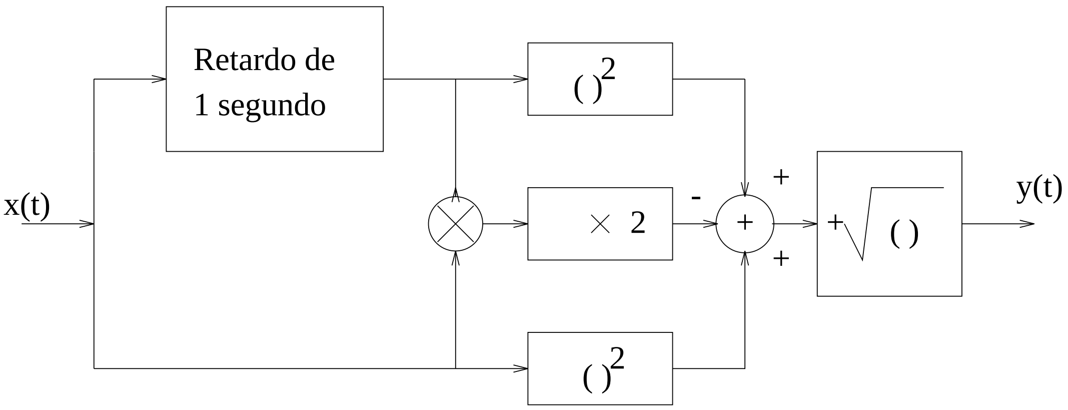


Figura 1:

   a) Encuentre la relación entre $x(t)$ e $y(t)$

   b) ¿Es un sistema lineal?

   c) ¿Es un sistema invariante?

   d) Calcule la salida para la señal de entrada $x(t)$ de la figura 2

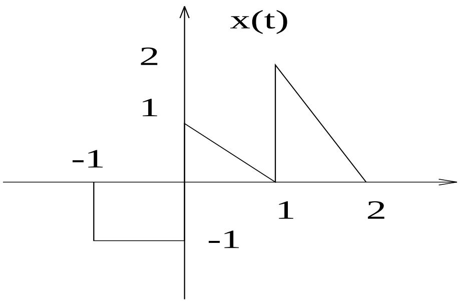


Figura 2:

2. Calcule la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$ de las siguientes señales:

   a) $x(t) = h(t) = u(t)$.

   b) $x(t) = u(t) - u(t - t_1)$ y $h(t) = u(t) - u(t - t_2)$ donde $t_2 > t_1 > 0$.

   c) $x(t) = \dfrac{1}{t}u(t-1)$ y $h(t) = u(t)$.

   d) $x(t) = e^{-at}u(t)$ y $h(t) = e^{-bt}u(t)$ con $a \neq b$.

   e) $x(t) = h(t) = e^{-at}u(t)$.

   f) $x(t) = t^k u(t)$ y $h(t) = u(t)$ siendo k entero y $k > 1$.

   g) $x(t) = u(t+2) - u(t-3)$ y $h(t) = \delta(t+2) + \delta(t-1)$.

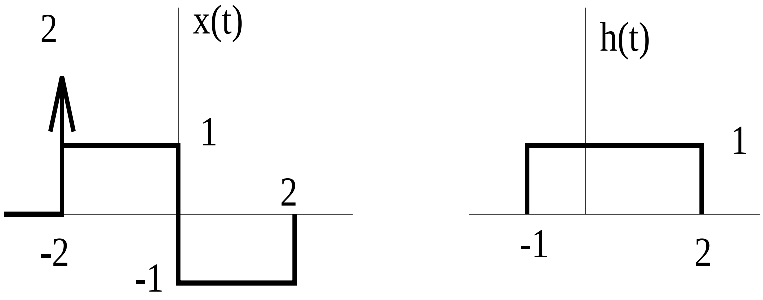


Figura 3:

h) $x(t)$ y $h(t)$ como en la figura 3

3. Calcule la salida $y(t)$ de un sistema LTI caracterizado por $h(t)$ cuando a su entrada se aplica $x(t)$:

   a) $x(t) = e^{-3t}\ u(t)$ y $h(t) = u(t-1)$

   b) $x(t) = u(t) - 2\ u(t-2) + u(t-5)$ y $h(t) = e^{-2t}\ u(t-1)$

4. Un pulso rectangular $x(t) = u(t) - u(t-T)$ de duración T es la entrada a un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t) = e^{-at}\ u(t)$, siendo $a > 0$. Calcule la salida.

5. Estudie las propiedades de linealidad e invarianza del sistema dado por el esquema de la figura 4

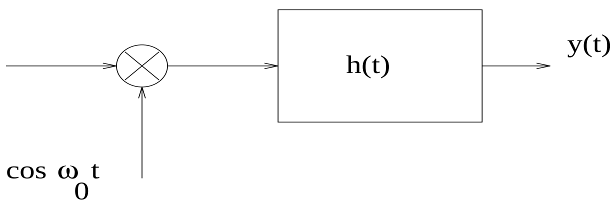


Figura 4:

6. Determine y dibuje la salida $y(t)$ de cada uno de los siguientes sistemas cuanda la entrada es el siguiente tren de impulsos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - 2k)$$

   a) $h(t) = u(t) - u(t-T)$ para $T = 1, 2, 3$

   b) $h(t) = [sen\ \pi t][u(t) - u(t-T)]$ para $T = 1, 2$

   c) $h(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$

7. Determine si los siguientes sistemas LTI son estables y/o causales

   a) $h(t) = e^{-3t}u(t-1)$

   b) $h(t) = e^{-3t}u(1-t)$

   c) $h(t) = e^{-t}u(t+100)$

d) $h(t) = e^t u(-1-t)$

e) $h(t) = e^{-4|t|}$

f) $h(t) = te^{-t}u(t)$

g) $h(t) = \left(2e^{-t} - e^{(t-100)/100}\right) u(t)$

8. Para cada uno de las siguientes relaciones entrada/salida de sistemas LTI, determine la respuesta al impulso. Indique si los sistemas son estables y/o causales.

a) $y(t) = \int_t^{\infty} x(\tau)d\tau.$

b) $y(t) = \int_0^{\infty} e^{\tau} x(t-\tau-1)d\tau.$

c) $y(n) = 0{,}2 \sum_{k=-2}^{2} x(n-k).$

d) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n} x(k+2).$

9. Considere que la salida de un sistema LTI $y(t)$ es la convolución entre la señal de entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$. Obtenga en función de $y(t)$ las siguientes señales

a) $h(t) * x(t-t_0)$

b) $x(t) * h(t-t_0)$

c) $x(t-t_0) * h(t-t_0)$

d) Calcule $\delta(t-T_1) * \delta(t-T_2)$

10. Considere un sistema LTI cuya respuesta al impulso viene dada por

$$h(t) = e^{-(t-2)}\ u(t-2) \qquad (1)$$

a) Determine la respuesta de este sistema cuando la entrada $x(t)$ es la señal de la figura 5

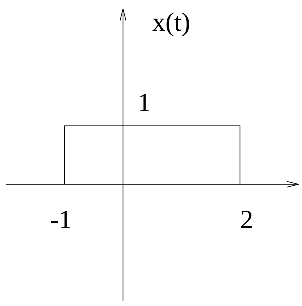


Figura 5:

b) Considere la interconexión de sistemas mostrada en la figura 6 donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del enunciado. Calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada es la señal del apartado (b). Hágalo de dos formas:

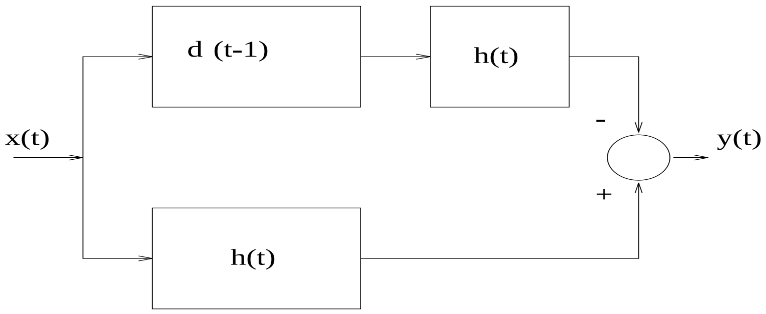


Figura 6:

1) Calculando la respuesta al impulso del sistema global y a continuación usando la integral de convolución para calcular la salida.
2) Utilizando el resultado del apartado (a) junto con las propiedades de la convolución para calcular $y(t)$ sin necesidad de evaluar la integral de convolución.

11. (Septiembre 95) Considere dos señales de duración limitada. La primera de ellas, $x_1(t)$, comienza en t_1 y acaba en t_2. La segunda, $x_2(t)$, comienza en t_3 y acaba en t_4. Si se convolucionan estas dos señales, se obtiene una tercera $x_3(t) = x_1(t) * x_2(t)$, también de duración limitada, que comienza en t_5 y acaba en t_6.

    a) Determine los valores de t_5 y t_6 en función de t_1, t_2, t_3 y t_4.

    b) Haga la convolución entre las siguientes dos señales y compruebe el resultado del apartado anterior.

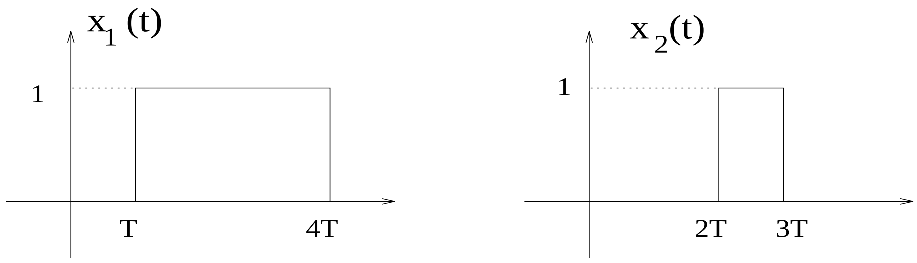


Figura 7:

12. Los siguientes pares entrada-salida han sido observados durante la operación de un sistema invariante en el tiempo

$$\begin{aligned} x_1(t) = \delta(t) + 2\delta(t-2) &\overset{T}{\Longleftrightarrow} y_1(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-2) \\ x_2(t) = 3\delta(t-2) &\overset{T}{\Longleftrightarrow} y_2(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-3) \\ x_3(t) = \delta(t-4) &\overset{T}{\Longleftrightarrow} y_3(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1) \end{aligned}$$

¿Se puede obtener alguna conclusión acerca de la linealidad del sistema?

13. Los siguientes pares entrada-salida han sido observados durante la operación de

un sistema lineal

$$
\begin{aligned}
x_1(t) = -\delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1) &\overset{T}{\longleftrightarrow} y_1(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-3) \\
x_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t) - \delta(t-1) &\overset{T}{\longleftrightarrow} y_2(t) = -\delta(t+1) + \delta(t) + 2\delta(t-2) \\
x_3(t) = \delta(t) + \delta(t-1) &\overset{T}{\longleftrightarrow} y_3(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1) + \delta(t-2)
\end{aligned}
$$

¿Se puede obtener alguna conclusión acerca de la invarianza en el tiempo del sistema?

14. Si $y(t) = x(t) * h(t)$ demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \tag{2}$$

15. (Marzo 96) Considere un sistema LTI que cuando la entrada es $x_1(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$ la salida es $y_1(t) = e^{-2t}u(t)$ y cuando la entrada es $x_2(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$ la salida es $y_2(t) = e^{-t}u(t)$.

    a) Calcule $x_1(t) * x_2(t)$.
    b) Calcule la respuesta al impulso del sistema.
    c) Calcule la respuesta en frecuencia del sistema.

16. Considere las señales $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$ y $h(t) = e^{-3t}u(t)$.

    a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$
    b) Calcule $g(t) = (dx(t)/dt) * h(t)$
    c) ¿Cual es la relación que existe entre $g(t)$ y $y(t)$?

17. Demuestre que la operación de convolución es conmutativa, i.e.,

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

18. La respuesta al escalón $s(t)$ de un sistema LTI es la salida que se obtiene cuando la entrada es un escalón unidad. Demuestre que la respuesta al impulso $h(t)$ es la derivada de la respuesta al escaln, i.e.,

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

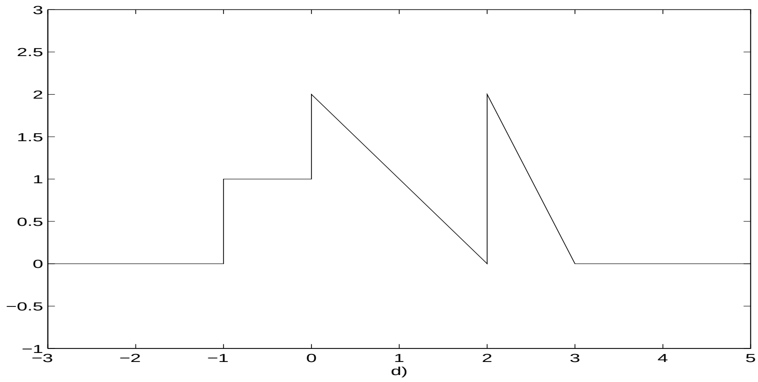
Soluciones

1. *a*) $y(t) = \mid x(t) - x(t-1) \mid$

   b) No lineal.

   c) Invariante.

   d)



2. *a*) $y(t) = t\,u(t)$

   b) $$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < t_1 \\ t_1 & t_1 < t < t_2 \\ t_1 + t_2 - t & t_2 < t < t_1 + t_2 \\ 0 & t > t_1 + t_2 \end{cases}$$

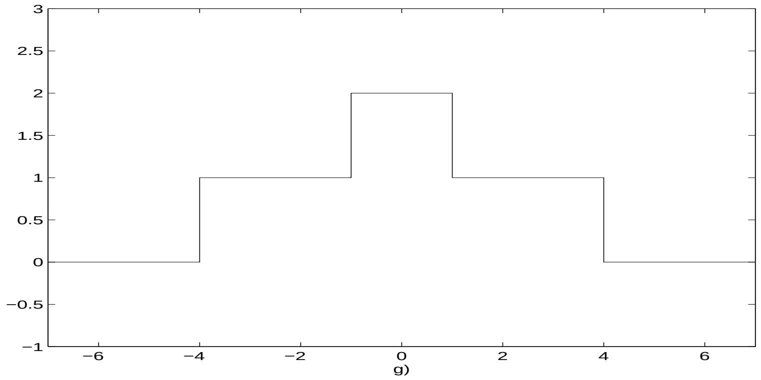
   c) $y(t) = ln(t)\,u(t-1)$

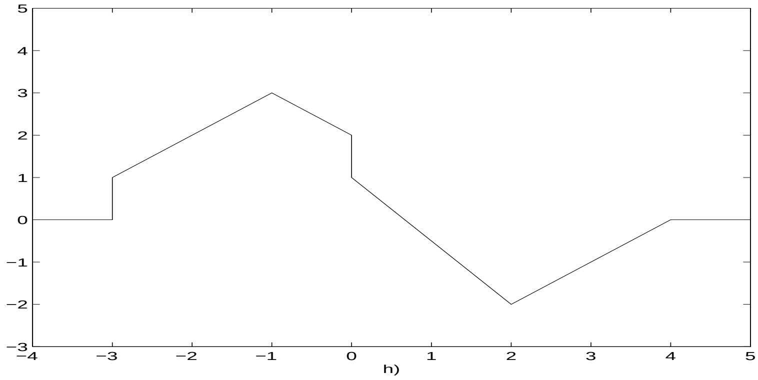
   d) $y(t) = \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})\,u(t)$

   e) $y(t) = te^{-at}\,u(t)$

   f) $y(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}u(t)$

   g) $y(t) = x(t+2) + x(t-1)$



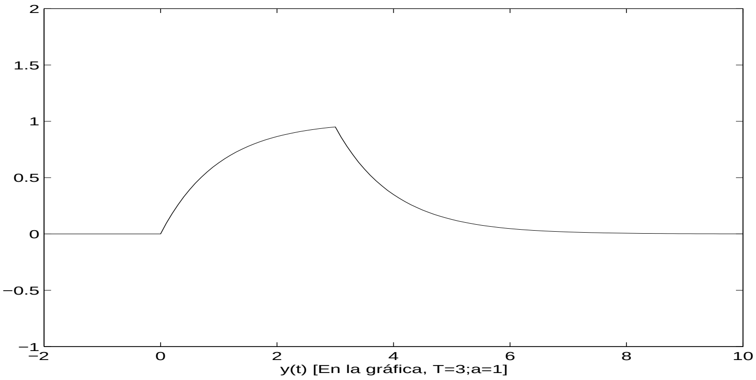


h)

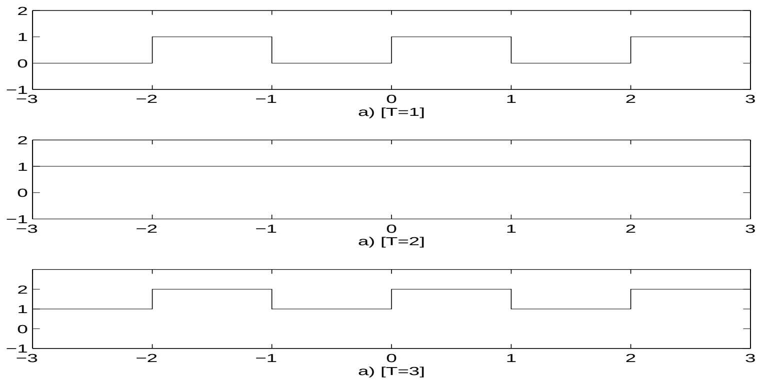
3. *a*) $y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})\, u(t-1)$

b) $$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-2t}) & 1 < t < 3 \\ e^{-2(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & 3 < t < 6 \\ e^{-2(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-5)} - \frac{1}{2}e^{-2t} & t > 6 \end{cases}$$

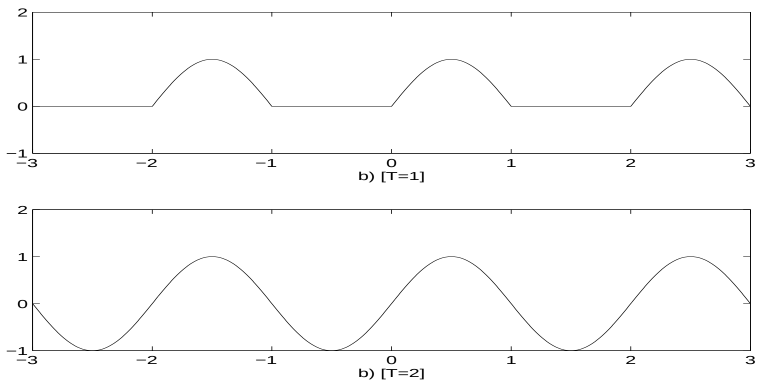
4. $$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) & 0 < t < T \\ \frac{1}{a}(e^{-a(t-T)} - e^{-at}) & t > T \end{cases}$$



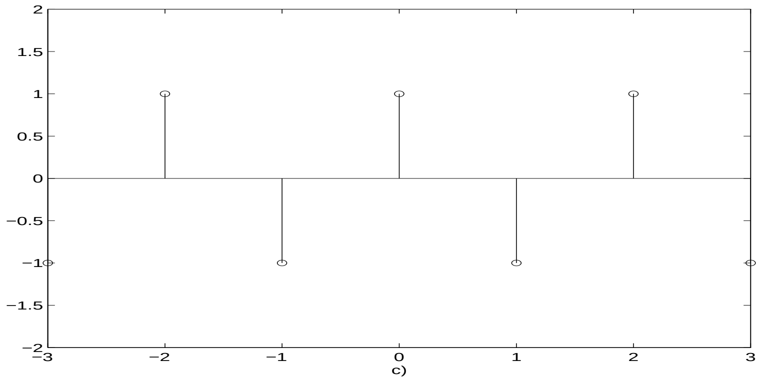
5. Lineal, no invariante.



6. *a*)



b)



c)

7. *a*) Estable, causal.
   b) No estable, no causal.
   c) Estable, no causal.
   d) Estable, no causal.
   e) Estable, no causal.
   f) Estable, causal.
   g) No estable, causal.

8. *a*) $h(t) = u(-t)$ No estable, no causal.
   b) $h(t) = e^{t-1}\,u(t-1)$ No estable, causal.
   c) $h(n) = \begin{cases} 0{,}2 & -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & resto \end{cases}$ Estable, no causal.
   d) $h(n) = 2^{-(n+2)}\,u(n+2)$ Estable, no causal.

9. *a*) $y(t - t_0)$
   b) $y(t - t_0)$
   c) $y(t - 2t_0)$
   d) $\delta(t - T_1 - T_2)$

10. *a*) $y_a(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)} & 1 < t < 4 \\ e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)} & t > 4 \end{cases}$

b) 1) $h(t) = e^{-(t-2)}\, u(t-2) - e^{-(t-3)}\, u(t-3)$, de modo que

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)} & 1 < t < 2 \\ e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} & 2 < t < 4 \\ e^{-(t-4)} + e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} - 1 & 4 < t < 5 \\ e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)} + e^{-(t-2)} - e^{-(t-5)} & t > 5 \end{cases}$$

2) $y(t) = y_a(t) - y_a(t-1)$

11. *a*) $t_5 = t_1 + t_3$ y $t_6 = t_2 + t_4$

b) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 3T \\ t - 3T & 3T < t < 4T \\ T & 4T < t < 6T \\ -t + 7T & 6T < t < 7T \\ 0 & t > T \end{cases}$

12. No es lineal.

13. No es invariante.

17. *a*) $x_1(t) * x_2(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

b) $h(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-t})\, u(t)$

c) $H(jw) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2+jw} + \frac{1}{1+jw})$

18. *a*) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3 < t < 5 \\ \frac{e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}}{3} & t > 5 \end{cases}$

b) $g(t) = e^{-3(t-3)}\, u(t-3) - e^{-3(t-5)}\, u(t-5)$

c) $g(t) = \frac{\partial y(t)}{dt}$