Ingeniería Informática

Medios de Transmisión (MT)

Problemas del tema 4

Análisis de Fourier de señales y sistemas contínuos

Curso 2007-08

14/11/2007

Ejercicios básicos

1. Considere un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \frac{sen\ \frac{5\pi}{2}t}{\pi t}$$

   Determine la salida a las siguientes entradas

   a) $x(t) = sen\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

   b) $x(t) = sen(2\pi t) + cos(4\pi t)$

   c) $x(t) = cos(2\pi t) + sen(3\pi t)$

   d) $x(t) = (sen\ 3\pi t)(cos\ 5\pi t)$

   e) $x(t) = cos^3 \pi t$

2. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales:

   a) $\left[e^{-\alpha t} cos\ \omega_o t\right] u(t), \qquad \alpha > 0$

   b) $e^{2+t} u(-t+1)$

   c) $x(t) = e^{-3|t|}\ sen\ 2t$

   d) $e^{-3t}[u(t+2) - u(t-3)]$

   e) $x(t) = \begin{cases} 1 + cos\ \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

   f) $x(t) = \left[\dfrac{sen\ \pi t}{\pi t}\right] \left[\dfrac{sen\ 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$

   g) La señal de la figura 1

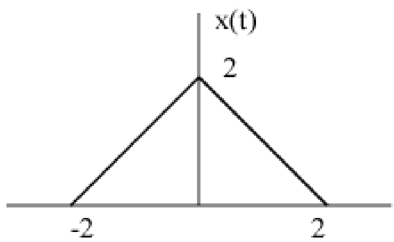


Figura 1:

3. Calcule la transformada de Fourier inversa de las siguientes señales

a) $X(\omega) = \dfrac{2sen[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi)}$

b) $X(\omega) = cos(4\omega + \pi/3)$

c) $X(\omega)$ cuyo módulo y fase están dados por la figura 2.

d) $X(\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$

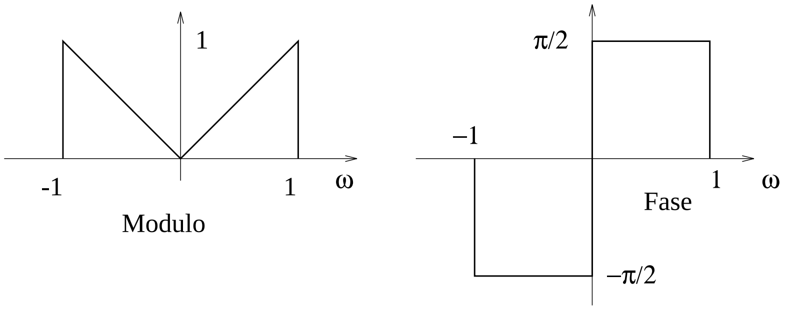


Figura 2:

4. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales:

   a) $x(t) = e^{j200t}$

   b) $x(t) = cos[\pi(t - 1)/4]$

   c) $x(t) = cos\ 4t\ +\ sen\ 8t$

   d) $x(t) = cos\ 4t\ +\ sen\ 6t$

   e) $x(t) = [1 + cos\ 2\pi t][cos(10\pi t + \pi/4)]$

   f) $x(t) = sen\ t\ + cos(2\pi t + \pi/4)$

   g) La señal de la figura 3

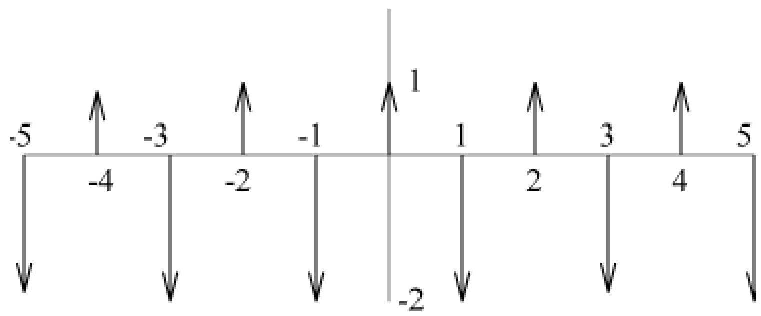


Figura 3:

5. Considere el sistema LTI caracterizado por $h(t) = e^{-4t}\ u(t)$. Calcule la salida para cada una de las siguientes entradas:

   a) $x(t) = cos\ 2\pi t$

b) $x(t) = sen\ 4\pi t + cos\ (6\pi t + \pi/4)$

c) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$

d) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t-k)$

6. Calcule la convolución de los siguientes pares de señales $x(t)$ y $h(t)$ calculando $X(\omega)$ y $H(\omega)$, usando la propiedad de convolución y hallando la transformada de Fourier inversa.

   a) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = e^{-4t}u(t)$
   b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = te^{-4t}u(t)$
   c) $x(t) = e^{-t}u(t)$, $h(t) = e^{t}u(-t)$

7. Sea $X(\omega)$ la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ dibujada en la figura 4

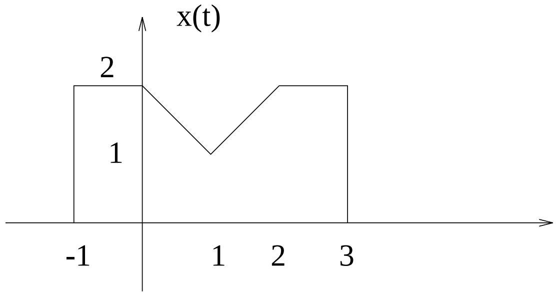


Figura 4:

   a) Calcular $X(0)$
   b) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$

   Nota: Todos los cálculos deben hacerse sin evaluar de forma explícita $X(\omega)$.

8. Considere que la señal $x(t) = cos\ 2\pi t + sen\ 6\pi t$ es la entrada a cada uno de los sistemas LTI que se dan a continuación. Determine la salida en cada caso:

   a) $h(t) = \dfrac{sen\ 4\pi t}{\pi t}$
   b) $h(t) = \dfrac{[sen\ 4\pi t][sen\ 8\pi t]}{\pi t^2}$
   c) $h(t) = \dfrac{sen\ 4\pi t}{\pi t}\ cos\ 8\pi t$

9. Considere un sistema LTI cuya respuesta a la entrada

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

es

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

   a) Determine la respuesta en frecuencia del sistema.

   b) Calcule la respuesta al impulso.

   c) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida.

10. Considere una señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier $X(\omega)$ tiene la forma de la figura 5. Dibuje la el espectro de $y(t) = x(t)p(t)$ para cada uno de los siguientes posibilidades de $p(t)$

   a) $p(t) = cos(t/2)$

   b) $p(t) = cos\ t$

   c) $p(t) = cos(2t)$

   d) $p(t) = (sen\ t)(sen\ 2t)$

   e) $p(t) = cos\ 2t - cos\ t$

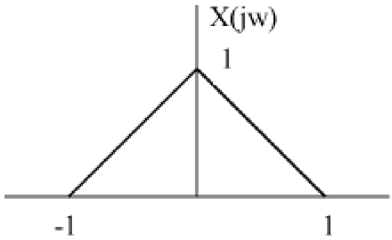


Figura 5:

11. La salida $y(t)$ de un sistema LTI está relacionada con la entrada $x(t)$ a través de la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

   a) Determine la respuesta en frecuencia

   b) Si $x(t) = e^{-t}u(t)$, determine la salida $Y(\omega)$, la transformada de Fourier de la salida.

   c) Determine la salida $y(t)$ para la entrada $x(t)$ del apartado anterior.

12. La entrada y la salida de un sistema LTI están relacionadas por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

a) Encuentre la respuesta al impulso de este sistema.

b) ¿Cual es la salida de este sistema si $x(t) = te^{-2t}u(t)$?

c) Repita el apartado (a) para el sistema descrito por la ecuación

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

13. ¿Puede la respuesta de un sistema LTI a $x(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$ ser $y(t) = \left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^2$?. Justifique su respuesta.

14. *a*) Utilice el teorema de convolución para demostrar que

$$\frac{sen(\pi t)}{\pi t} \star \frac{sen(\pi t)}{\pi t} = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$$

b) Calcule la transformada de Fourier de $x(t) = \left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^2$

c) Calcule la transformada de Fourier de $x(t) = \left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^3$

15. En su formulación más general, el teorema de Parseval dice que si $X(\omega)$ y $Y(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega$$

Utilizando este resultado y los del ejercicio anterior, calcule las siguientes integrales

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^3 dt$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^4 dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^5 dt$

16. Considere que la señal $x(t) = cos\ 2\pi t + sen\ 6\pi t$ es la entrada a cada uno de los siguientes sistemas lineales e invariantes en el tiempo que se dan a continuación. Determine la salida $y(t)$ en cada caso

a) $h_1(t) = \frac{sen\ 4\pi(t-1/4)}{\pi(t-1/4)}$

b) $h_2(t) = \frac{sen\ 4\pi t}{\pi t}\ cos\ 8\pi t$

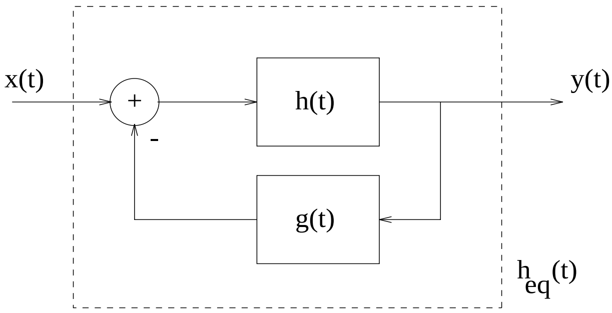


Figura 6:

Nota: la transformada de Fourier de $h(t) = sen\frac{Wt}{\pi t}$ es $H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$

17. Considere la interconexión de sistemas lineales e invariantes en el tiempo de la figura

    a) Demuestre que la respuesta en frecuencia del sistema equivalente $H_{eq}(\omega)$ es igual a

    $$H_{eq}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{H(\omega)}{1 + H(\omega)\ G(\omega)}$$

    donde $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $H(\omega)$ y $G(\omega)$ son la transformada de Fourier de $x(t)$, $y(t)$, $h(t)$ y $g(t)$, respectivamente.

    b) Calcule la respuesta al impulso del sistema equivalente $h_{eq}(t)$ cuando $h(t) = e^{-2t}\ u(t)$ y $g(t) = 2\delta(t)$

18. La señal $x(t) = sen\ 4\pi t + cos\ 10\pi t$ es la entrada a un sistema lineal e invariante en el tiempo de respuesta al impulso

    $$h(t) = \left(\frac{sen\ 4\pi t}{\pi t}\right)^2$$

    Determine la salida $y(t)$.

19. Considere una señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es $X(\omega)$. Considere la señal $X_p(\omega) = X(\omega)P(\omega)$ donde $P(\omega)$ es el tren de deltas

    $$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

    y $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia de muestreo.

    a) Exprese $x_p(t)$ (que es $X_p(\omega)$ en el dominio del tiempo) en función de $x(t)$ y demuestre que $x_p(t)$ es una señal periódica de periodo T.

b) Utilizando el resultado del apartado anterior, demuestre la siguiente igualdad conocida con el nombre de fórmula de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_s)e^{jk\omega_s t}$$

20. La respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo es

$$H(\omega) = (1 \ + \ a\ cos\omega t_o)\ e^{-j\omega t_o}$$

a) Suponiendo que $a = 1$ y $t_o = T/2$, calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada es

$$x(t) = cos\ \frac{2\pi}{T}t \ + \ cos^2\ \frac{2\pi}{T}t$$

b) Calcule la respuesta al impulso del sistema.

c) Utilizando el resultado del apartado anterior, calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada es el pulso rectangular de la figura. Considere que $a = 2$ y $t_o = \frac{T}{2}$.

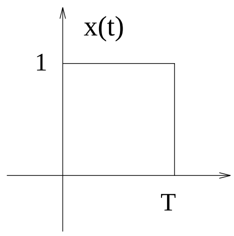


Figura 7:

21. Considere un sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{sen\ 2\pi t}{\pi t} cos\ 4\pi t$$

Determine la salida que produce el sistema a las siguientes entradas

a) $x_1(t) = cos\ 4\pi t + cos\ 8\pi t$

b) $x_2(t) = \dfrac{sen\ 4\pi t}{\pi t}$

22. Suponga que la siguiente señal

$$x(t) = \left(\frac{sen\pi t}{\pi t}\right)^2 cos\omega_o t \qquad \omega_o \gg 1$$

es la entrada al sistema de la figura 8

a) Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$.

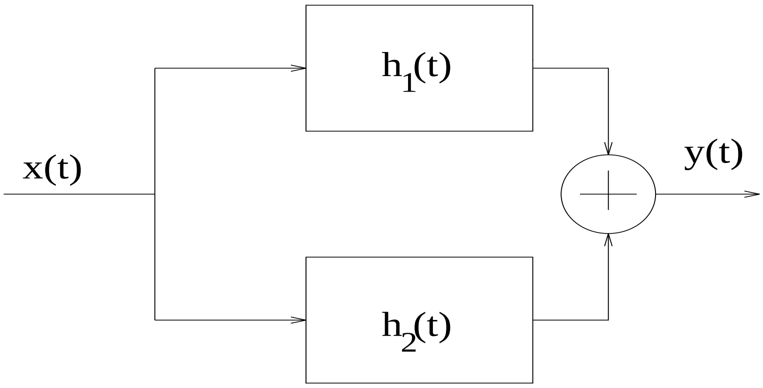


Figura 8:

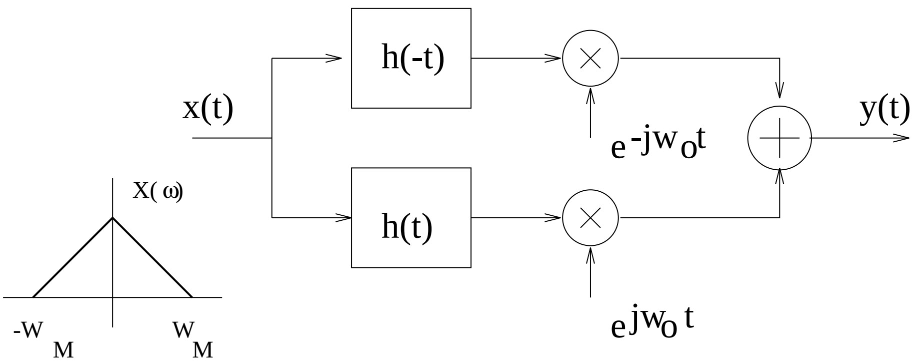


Figura 9:

b) Calcule la salida $y(t)$ si $h_1(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$ y $h_2(t) = \frac{j}{2\pi t}$

23. Considere una señal $x(t)$ que es la entrada al sistema de la figura 9

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}$$

a) Demuestre que la transformada de Fourier de $h(t)$ es $H(\omega) = u(\omega)$.

b) Dibuje el espectro de la señal de salida $y(t)$.

c) Proponga un sistema para recuperar la entrada $x(t)$ a partir de $y(t)$.

24. Determine la función de autocorrelación y la densidad espectral de energía de las siguientes señales deterministas

a) $x(t) = \begin{cases} A & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$

b) $x(t) = \begin{cases} A & -T/2 < t < 0 \\ -A & 0 < t < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$

c) $x(t) = \begin{cases} A\ cos\ \omega_o t & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ suponiendo que $\omega_0 \gg 1$

d) $x(t) = e^{-at}u(t)$

e) $x(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & 0 < t < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

25. La señal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$ pasa a través de un sistema LTI con respuesta al impulso $x(t) = e^{-\beta t}u(t),\ \beta > 0,\ \alpha \neq \beta$. Calcule la densidad espectral de energía, la función de autocorrelación y la energía de la salida.

26. Calcule la función de autocorrelación de las siguientes señales deterministas

a) $x_1(t) = \frac{sen\ Wt}{\pi t}$

b) $x_2(t) = \frac{sen\ W(t - t_o)}{\pi(t - t_o)}$

c) $x_3(t) = \frac{sen\ Wt}{\pi t} cos\ \omega_o t$
siendo $\omega_o >> W$

27. Considere las dos siguientes señales $x(t)$ y $z(t)$

a) Calcule y dibuje la función de autocorrelación de $x(t)$.

b) Utilizando el resultado del apartado anterior, calcule y dibuje la función de autocorrelación de $z(t)$.

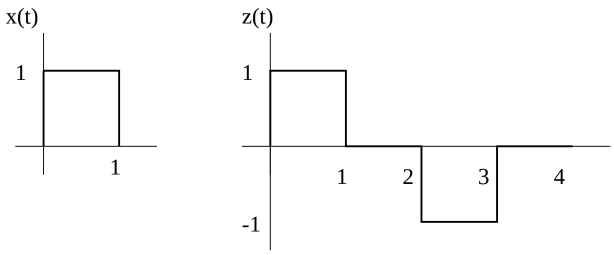


Figura 10:

28. Considere el sistema de la figura 11 que se compone de un multiplicador y un filtro. Suponiendo que la respuesta al impulso del filtro es $h(t) = \dfrac{sen\ 4\pi t}{\pi t}$ calcule lo siguiente:

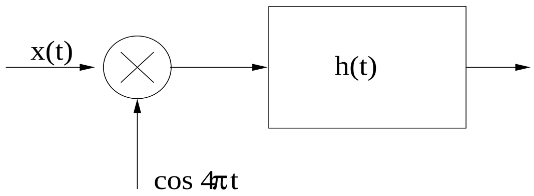


Figura 11:

   a) La salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = cos\ 2\pi t$.
   b) La salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = cos\ 4\pi t$.
   c) La salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = \dfrac{sen\ 2\pi t}{\pi t}$.
   d) La salida $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = \dfrac{sen\ 2\pi t}{\pi t}\ cos\ 6\pi t$.

29. Sea $X(\omega)$ la transformada de Fourier de la siguiente señal

$$x(t) = \begin{cases} cos\ \frac{\pi}{T}t & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

   a) Determine $X(0)$ sin calcular explícitamente $X(\omega)$.
   b) Calcule $X(\omega)$.

30. Calcule la Transformada de Fourier inversa de las dos señales dibujadas en la figura 12

31. Considere la interconexión en serie de dos sistemas mostrada en figura 13. El primer sistema viene especificado por la relación entrada salida $y(t) = x^2(t)$ y el segundo es un filtro paso bajo ideal de ancho de banda π. Suponga que la entrada al primer sistema es

$$x(t) = \frac{sen\pi t}{\pi t}$$

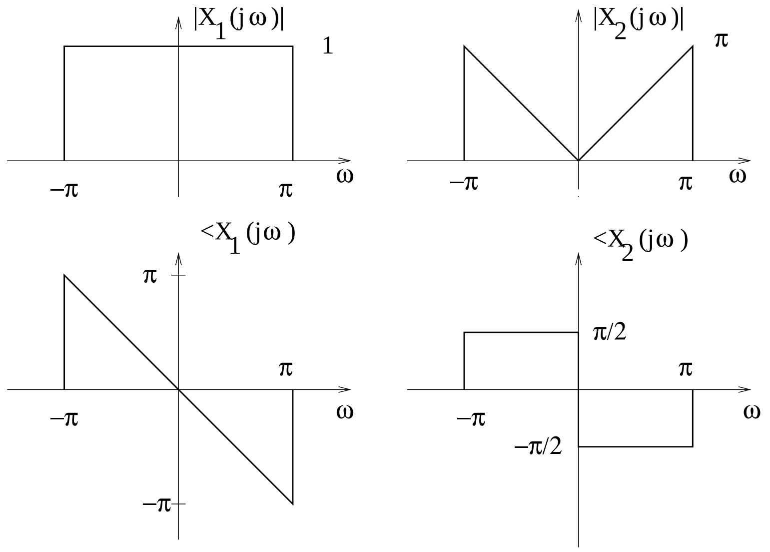


Figura 12:

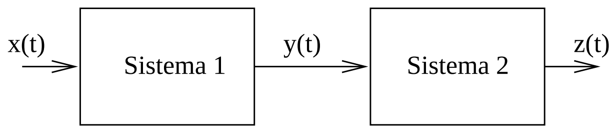


Figura 13:

a) Calcule la transformada de Fourier de la salida, $Z(\omega)$.

b) Calcule la salida $z(t)$.

32. Considere la señal $x(t)$ de la figura 14

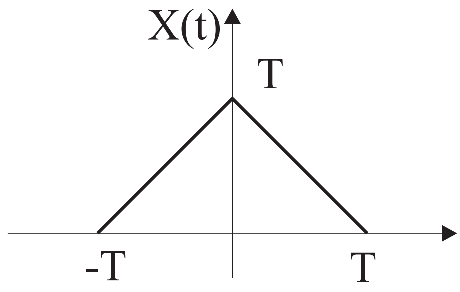


Figura 14:

a) Dibuje las señales $z_1(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ y $z_1(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$.

b) Utilice la propiedad de convolución para calcular la Transformada de Fourier de $x(t)$.

c) Utilice la propiedad de derivación en tiempo para calcular la Transformada de Fourier de $x(t)$ a partir de $z_1(t)$. Verifique que se obtiene el mismo resultado que en el apartado b).

d) Utilice la propiedad de derivación en tiempo para calcular la Transformada de Fourier de $x(t)$ a partir de $z_2(t)$. Verifique que se obtiene el mismo resultado que en el apartado b).

Ejercicios complementarios

1. Repetir el ejercicio 1 de los problemas básicos para las siguientes respuestas al impulso

   a) $h(t) = e^{-t}\ u(t)$

   b) $h(t) = e^{-|t|}$

2. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales:

   a) La señal de la figura 15

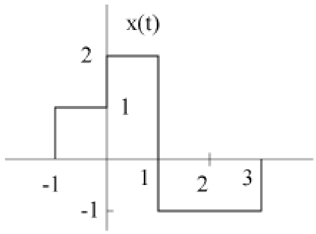


Figura 15:

   b) $\dfrac{1}{1+t^2}$

   c) $\left[te^{-2t} sen\ 4t\right] u(t)$

   d) $x(t) = \begin{cases} 1-t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & resto \end{cases}$

3. Utilice las propiedades de la transformada de Fourier para demostrar que la transformada de Fourier de

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \qquad a > 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(a+j\omega)^n}$$

4. El concepto de autofunción es muy importante en el estudio de sistemas LTI. También lo es en el estudio de sistemas lineales pero variantes en el tiempo. Concretamente, considere un sistema de este tipo con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Se dice que una señal $\phi(t)$ es una autofunción del sistema si

$$\phi(t) \quad \longrightarrow \quad \lambda\ \phi(t)$$

   es decir, si $x(t) = \phi(t)$, entonces $y(t) = \lambda\phi(t)$, donde la constante compleja λ se denomina el autovalor asociado a $\phi(t)$.

a) Suponga que podemos representar la entrada $x(t)$ a nuestro sistema como una combinación lineal de autofunciones $\phi_k(t)$, a cada una de las cuales le corresponde el autovalor λ_k.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

Exprese la salida $y(t)$ en términos de c_k, $\phi_k(t)$ y λ_k.

b) Considere el sistema caracterizado por la ecuación diferencial

$$y(t) = t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt}$$

¿Es este sistema lineal? ¿Es este sistema invariante en el tiempo?

c) Demuestre que el conjunto de funciones

$$\phi_k(t) = t^k$$

son autofunciones del sistema del apartado anterior. Para cada ϕ_k determine su correspondiente autovalor λ_k.

d) Calcule la salida de este sistema si

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \frac{1}{2}t^4 + \pi$$

5. Sea $X(\omega)$ la figura del ejercicio 7 de los problemas básicos

   a) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ \frac{2\ sen\ \omega}{\omega}\ e^{j2\omega}\ d\omega$

   b) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

   Nota: Todos los cálculos deben hacerse sin evaluar de forma explícita $X(\omega)$.

6. Demuestre que una señal $x(t)$ de banda limitada, es decir, $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B_0$ verifica que $|x(t)|^2 \leq 2B_0 E_x \quad \forall t$ donde E_x es la energía de $x(t)$. Utilice la desigualdad de Schwartz para resolver este ejercicio

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

7. Demuestre que una señal $y(t)$ de duración temporal finita T, es decir, $y(t) = 0$ para $t \leq 0$ y $t \geq T$ cumple que $|Y(\omega)|^2 \leq TE_x \quad \forall\omega$. Utilice la desigualdad de Schwartz.

8. Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = \dfrac{sen\ 2\pi t}{\pi t}$. Calcule la salida $y_i(t)$ a cada una de las siguientes entradas $x_i(t)$:

a) $x_4(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 10k/3)$

b) $x_6(t) = \frac{1}{1+t^2}$

9. La salida $y(t)$ de un sistema LTI está relacionada con la entrada $x(t)$ a través de la ecuación
$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau - x(t)$$
donde $z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$.

   a) Determine la respuesta en frecuencia de este sistema.

   b) Calcule la respuesta al impulso

10. Repita los dos últimos apartados del ejercicio 11 de los problemas básicos para las siguientes entradas

    a) $X(\omega) = \dfrac{1+j\omega}{2+j\omega}$

    b) $X(\omega) = \dfrac{2+j\omega}{1+j\omega}$

    c) $X(\omega) = \dfrac{1}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$

11. La respuesta al impulso de un sistema LTI es $h(t) = e^{-at}u(t)$ $(a > 0)$. Utilizando técnicas de análisis en el dominio de la frecuencia, encuentre la respuesta del sistema a $x(t) = e^{-at}cos(\omega_0 t)u(t)$.

12. Utilizando el teorema de Parseval, resuelva

    a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-at}\frac{sen(\pi t)}{\pi t}dt$

    b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-at}\left(\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\right)^2 dt$

    c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-at}cos(\omega_o t)dt$

13. (Junio 96)

    Considere un sistema LTI con respuesta al impulso real. Demuestre que cuando la entrada es $x(t) = \cos\omega_o t$ la salida es $y(t) = |H(\omega_o)|\cos(\omega_o t + \phi(\omega_o))$ siendo $H(\omega_o) = |H(\omega_o)|e^{j\phi(\omega_o)}$ la respuesta en frecuencia del sistema a la frecuencia ω_o.

14. (Junio96)

    ¿Puede la respuesta de un sistema LTI estable a $x(t) = u(t) - u(t-T)$ (pulso rectangular de duración T) ser $y(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$? Justifique su respuesta.

15. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales reales. La función de correlación cruzada $\phi_{xy}(t)$ se define de la siguiente manera

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau \tag{1}$$

La función $\phi_{xx}(t)$ es la función de autocorrelación de $x(t)$

   a) ¿ Cual es la relación que existe entre $\phi_{xy}(t)$ y $\phi_{yx}(t)$?
   b) Suponga que $y(t) = x(t+T)$. Exprese $\phi_{xy}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$ en función de $\phi_{xx}(t)$.
   c) Calcule la función de autocorrelación de la señal $x(t)$ dibujada en la figura 16.
   d) Encuentre la respuesta al impulso de un sistema LTI que proporcione $\phi_{xx}(t-T)$ a la salida cuando la entrada es $x(t)$.

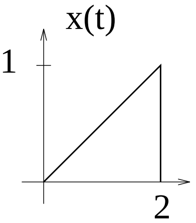


Figura 16:

16. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales reales. La función de correlación cruzada $\phi_{xy}(t)$ se define como

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau \tag{2}$$

Análogamente se definen $\phi_{yx}(t)$, $\phi_{xx}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$. Suponga que $\Phi_{xx}(\omega)$, $\Phi_{xy}(\omega)$, $\Phi_{yx}(\omega)$ y $\Phi_{yy}(\omega)$ son respectivamente las transformadas de Fourier de $\phi_{xx}(t)$, $\phi_{xy}(t)$, $\phi_{yx}(t)$ y $\phi_{yy}(t)$.

   a) ¿ Cual es la relación entre $\Phi_{xy}(\omega)$ y $\Phi_{yx}(\omega)$?
   b) Encuentre una expresión de $\Phi_{xy}(\omega)$ en términos de $X(\omega)$ y $Y(\omega)$.
   c) Utilizando el resultado anterior, demuestre que $\Phi_{xx}(\omega)$ es real y nonegativa para todo ω.
   d) Suponga ahora que $x(t)$ es la entrada a un sistema LTI con una respuesta al impulso real $h(t)$ y con una respuesta en frecuencia $H(\omega)$, y que $y(t)$ es la salida obtenida. Encuentre expresiones de $\Phi_{xy}(\omega)$ y $\Phi_{yy}(\omega)$ en términos de $\Phi_{xx}(\omega)$ y $H(\omega)$.
   e) Sea $x(t)$ la señal dibujada en la figura 17 y sea la respuesta al impulso de un sistema LTI $h(t) = e^{-at}u(t), a > 0$. Calcule $\Phi_{xx}(\omega)$, $\Phi_{xy}(\omega)$ y $\Phi_{yy}(\omega)$ usando los resultados de los apartados precedentes.

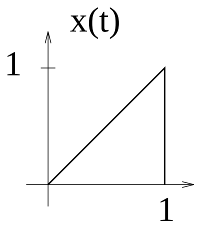


Figura 17:

17. Calcule la función de autocorrelación y la densidad espectral de energía de la señal $x(t) = A\ cos(\omega_0 t + \phi)\ [u(t) - u(t-T)]$ suponiendo que $\omega_0 \gg 1$.

18. Demuestre que la función de autocorrelación $R_x(t)$ de una señal determinista $x(t)$ cumple las siguientes propiedades

    a) $R_x(t) = R_x^*(-t)$

    b) $|R_x(t)| \leq R_x(0)$. Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx \qquad (3)$$

    c) Si $y(t) = x(t-T)$ entonces $R_y(t) = R_x(t)$

Soluciones de los ejercicios básicos

1. *a)* $y(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{4})$

   b) $y(t) = \sin(2\pi t)$

   c) $y(t) = \cos(2\pi t)$

   d) $y(t) = -\frac{1}{2}\sin(2\pi t)$

   e) $y(t) = \frac{3}{4}\cos(\pi t)$

2. *a)* $X(\omega) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha - j\omega_0 + j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega_0 + j\omega})$

   b) $X(\omega) = \frac{e^3 e^{-j\omega}}{1 - j\omega}$

   c) $X(\omega) = \frac{3j}{9 + (\omega+2)^2} - \frac{3j}{9 + (\omega-2)^2}$

   d) $X(\omega) = \frac{1}{3 + j\omega}\left[e^6 e^{2j\omega} - e^{-9}e^{-3j\omega}\right]$

   e) $X(\omega) = 2\frac{sin\omega}{\omega} + \frac{sin(\omega-\pi)}{\omega-\pi} + \frac{sin(\omega+\pi)}{\pi+\omega}$

   f) $\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right] = x(t) = x_1(t)x_2(t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$ (propiedad de modulación)

   Donde:

   $X_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

   $X_2(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega} & \text{si } |\omega| < 2\pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

   $X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < -3\pi \\ \frac{1+e^{-j\omega}}{2\pi j} & \text{si } -3\pi < \omega < -\pi \\ 0 & \text{si } -\pi < \omega < \pi \\ -\frac{1+e^{-j\omega}}{2\pi j} & \text{si } \pi < \omega < 3\pi \\ 0 & \text{si } \omega > 3\pi \end{cases}$

   g) Ver figura 18

   $X(\omega) = \left[\frac{2\sin\omega}{\omega}\right]^2$

3. *a)* $x(t) = \begin{cases} e^{2j\pi t} & \text{si } |t| < 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

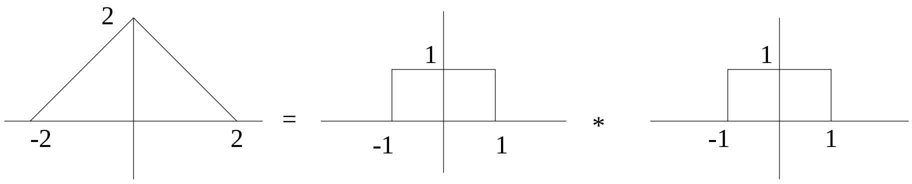


Figura 18:

b) $x(t) = \frac{e^{-\frac{j\pi}{3}}}{2}\delta(t-4) + \frac{e^{\frac{j\pi}{3}}}{2}\delta(t+4)$

c) $x(t) = \frac{(\cos t)\pi t - \pi \sin t}{(\pi t)^2}$

d) $x(t) = \frac{2j}{\pi}\sin t + \frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)$

4. a) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - 200)$

b) $X(\omega) = \pi e^{-\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + \pi e^{\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega + \frac{\pi}{4})$

c) $X(\omega) = \pi\left[\delta(\omega-4)+\delta(\omega+4)\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-8)-\delta(\omega+8)\right]$

d) $X(\omega) = \pi\left[\delta(\omega-4)+\delta(\omega+4)\right] + \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-6)-\delta(\omega+6)\right]$

e) $X(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega-8\pi)+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega+8\pi)+\pi e^{\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega-10\pi)+\pi e^{-\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega+10\pi)+\frac{\pi}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega-12\pi)+\frac{\pi}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega+12\pi)$

f) $X(\omega) = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)\right] + \pi\left[e^{\frac{j\pi}{4}}\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega+2\pi)e^{-\frac{j\pi}{4}}\right]$

g) $X(\omega) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty\, k\neq 0}^{\infty} 2\pi(\frac{1}{2}-(-1)^k)\delta(\omega-k\pi)$

5. a) $y(t) = \frac{1}{\sqrt{16+4\pi^2}}\cos(2\pi t - \arctan(\frac{\pi}{2}))$

b) $y(t) = \frac{1}{\sqrt{16+16\pi^2}}\sin(4\pi t - \arctan(\pi)) + \frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}\cos(6\pi t + \frac{\pi}{4} - \arctan(\frac{3}{2}\pi))$

c) $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4+j2k\pi}e^{j2\pi kt}$

d) $y(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ impar}}^{\infty}\frac{1}{4+jk\pi}e^{jk\pi t}$

6. a) $y(t) = \frac{1}{4}e^{-4t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}te^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}te^{-4t}u(t)$

b) $y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{1}{4}te^{-4t}\right]u(t)$

c) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$

7. *a*) $X(0) = 7$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 4\pi$

8. $x(t) = \cos 2\pi t + \sin 6\pi t$

   a) $y(t) = \cos 2\pi t$

   b) $y(t) = 4\pi \cos 2\pi t + 3\pi \sin 6\pi t$

   c) $y(t) = \frac{1}{2}\sin 6\pi t$

9. *a*) $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{3(3+j\omega)}{(4+j\omega)(2+j\omega)}$

   b) $h(t) = \frac{3}{2}[e^{-4t} + e^{-2t}]u(t)$

   c) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3[3x(t) + \frac{dx(t)}{dt}]$

10. *a*) Ver figura 19

    b) Ver figura 20

    c) Ver figura 21

    d) Ver figura 22

    e) Ver figura 23

11. *a*) $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2+j\omega}$

    b) $Y(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

    c) $y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

12. *a*) $h(t) = [e^{-2t} - e^{-4t}]u(t)$

    b) $y(t) = [\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-4t}]u(t)$

    c) $h(t) = 2\delta(t) - \left[\sqrt{2}(1+2j)e^{-(\frac{1+j}{\sqrt{2}})t} + \sqrt{2}(1-2j)e^{-(\frac{1-j}{\sqrt{2}})t}\right]u(t)$

13. No.

14. (b) Ver figura 24

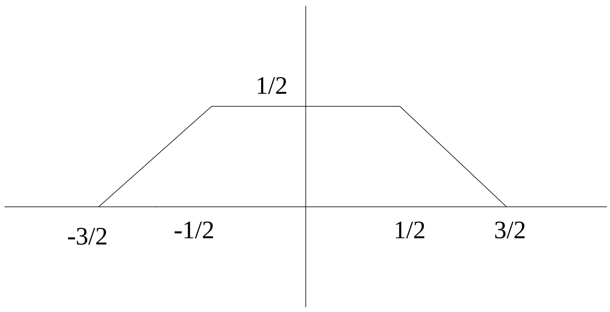


Figura 19:

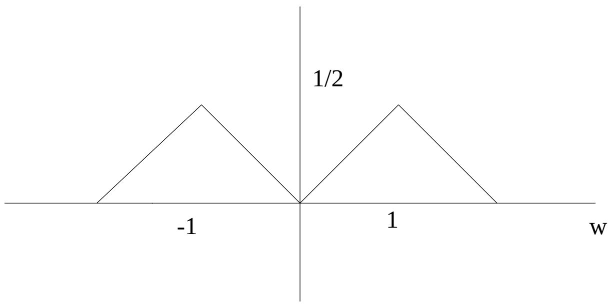


Figura 20:

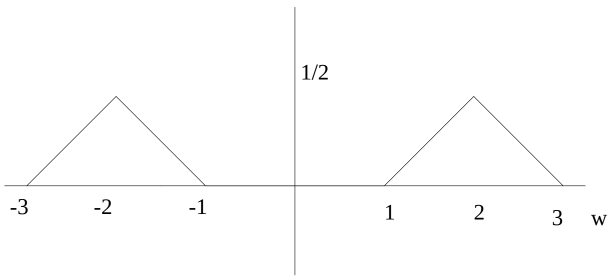


Figura 21:

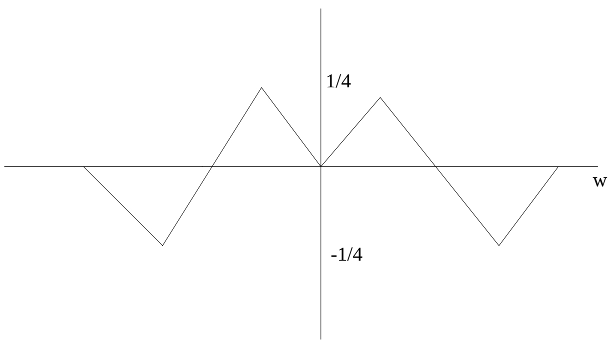


Figura 22:

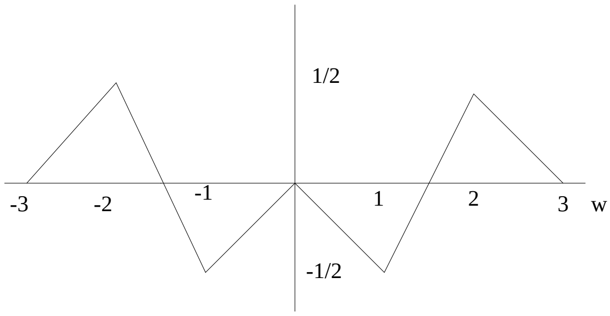


Figura 23:

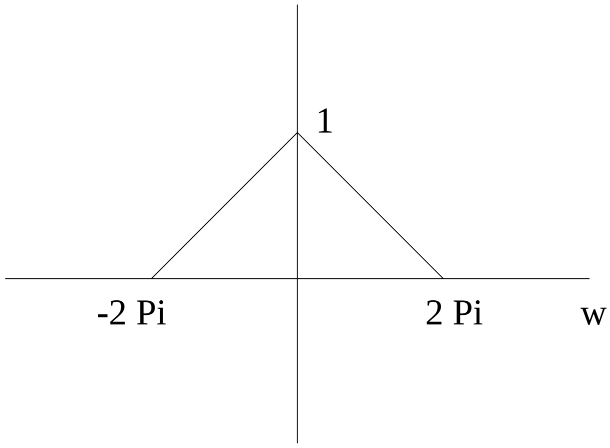


Figura 24:

(c) $X_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq -3\pi \\ \frac{\omega^2+6\pi\omega+9\pi^2}{4\pi} & , -3\pi < \omega < -\pi \\ \frac{3\pi^2-\omega^2}{2\pi} & , -\pi < \omega < \pi \\ \frac{\omega^2-6\pi\omega+9\pi^2}{4\pi} & , \pi < \omega < 3\pi \\ 0 & , 3\pi \leq \omega \end{cases}$

15. *a*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega)d\omega$

    b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_1(\omega)d\omega$

    c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega)X_1(\omega)d\omega$

16. *a*) $y_1(t) = \cos 2\pi(t - \frac{1}{4})$

    b) $y_2(t) = \frac{1}{2}\sin 6\pi t$

17. *a*) $Y(\omega) = H(\omega)[X(\omega) - Y(\omega)G(\omega)] = H(\omega)X(\omega) - Y(\omega)G(\omega)H(\omega)$
    $\Rightarrow Y(\omega)(1 + H(\omega)G(\omega)) = H(\omega)X(\omega)$

$$\Rightarrow H_{eq}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{H(\omega)}{1 + H(\omega)G(\omega)}$$

$b)$ $h_{eq}(t) = e^{-4t}u(t)$

18. $y(t) = 2\sin 4\pi t$

19. $a)$ $x_p(t) = x(t) * p(t)$

$$x_p(t) = x(t) * T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT)$$

20. $a)$ $y(t) = 1 + \cos\frac{4\pi t}{T} = 2\cos^2\frac{2\pi t}{T}$

$b)$ $h(t) = \frac{a}{2}\delta(t) + \delta(t-t_0) + \frac{a}{2}\delta(t-2t_0)$

$c)$ $y(t) = x(t) + x(t-\frac{T}{2}) + x(t-T)$

21. $a)$ $y_1(t) = \frac{1}{2}\cos 4\pi t$

$b)$ $y_2(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}\cos 3\pi t$

22. $a)$ Ver figura 25

$b)$ $y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2 e^{j\omega_0 t}$

23. (b) Ver figura 26

(c) Ver figura 27

24. $a)$ $R_x(t) = \begin{cases} 0 & t < -2\pi \\ A^2(t+2T) & -2T < t < 0 \\ A^2(-t+2T) & 0 < t < 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$

$$\psi_x(\omega) = \frac{4A^2\sin^2\omega T}{\omega^2}$$

$b)$ $R_x(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ A^2(-t-T) & -T < t < -\frac{T}{2} \\ A^2(3t+T) & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A^2(-3t+T) & 0 < t < \frac{T}{2} \\ A^2(t-T) & \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$

$$\psi_x(\omega) = \frac{16\sin^4\frac{\omega T}{4}}{\omega^2}$$

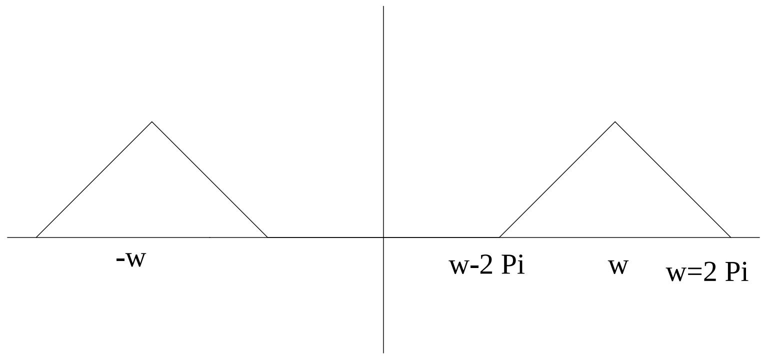


Figura 25:

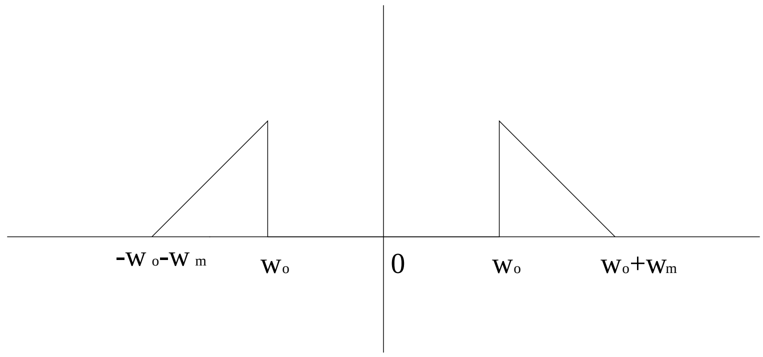


Figura 26:

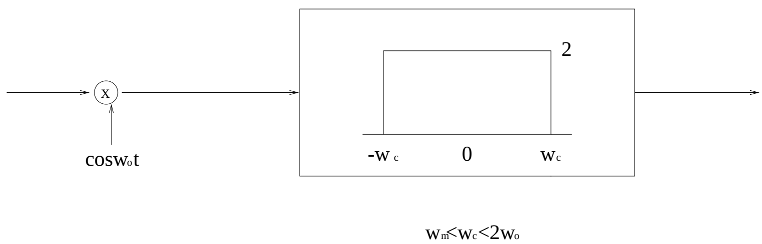


Figura 27:

$$c)\ R_x(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \frac{A^2}{2}(t+T)\cos\omega_0 t & -T < t < 0 \\ \frac{A^2}{2}(-t+T)\cos\omega_0 t & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$\psi_x(\omega) = [\frac{A\sin(\omega-\omega_0)\frac{T}{2}}{\omega-\omega_0} + \frac{A\sin(\omega+\omega_0)\frac{T}{2}}{\omega+\omega_0}]^2$$

$$d)\ R_x(t) = \begin{cases} \frac{e^{at}}{2a} & t < 0 \\ \frac{e^{-at}}{2a} & t > 0 \end{cases}$$

$$\psi_x(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$$

$$e)\ R_x(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \frac{A^2}{2a}(e^{at} - e^{-a(t+2T)}) & -T < t < 0 \\ \frac{A^2}{2a}(e^{-at} - e^{a(t-2T)}) & 0 < t < T \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$\psi_x(\omega) =$ Ver 3c).

25. $$D.E.E. = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}[\frac{1}{\alpha^2+\omega^2} - \frac{1}{\beta^2+\omega^2}]$$

$$R_y(t) = \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}[\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t|} - \frac{!}{2\beta}e^{-\beta|t|}]$$

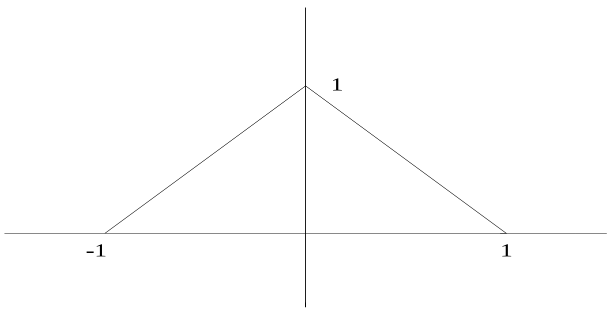
$$E_y = \frac{1}{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

26. $$a)\ R_1(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

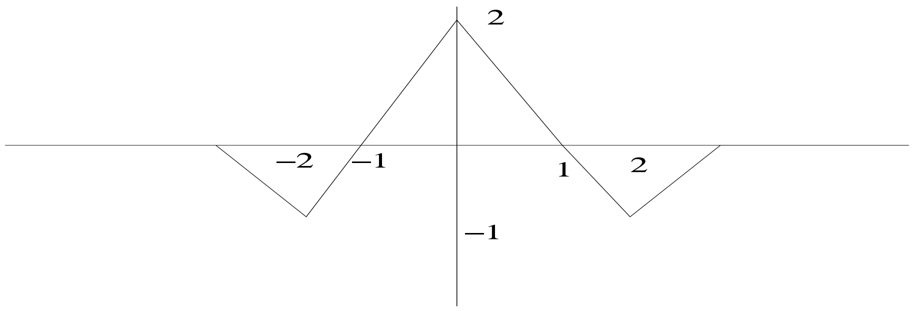
$$b)\ R_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

$$c)\ R_3(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin Wt}{\pi t}\cos\omega_0 t$$

27. $$a)\ R_x(t) = \begin{cases} 1+t & -1 < t < 0 \\ 1-t & 0 < t < 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$



$$b)\ R_z(t) = 2R_x(t) - R_x(t-2) - R_x(t+2)$$



28. *a*) $y(t) = \dfrac{1}{2}\cos 2\pi t$

    b) $y(t) = \frac{1}{2}$

    c) $y(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\cos 3\pi t$

    d) $y(t) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t}$

29. *a*) $X(0) = \dfrac{2T}{\pi}$.

    b) $X(\omega) = \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{\cos\frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 - \omega^2}$

30. *a*) $x_1(t) = \dfrac{\sin \pi(t-1)}{\pi(t-1)}$

    b) $x_2(t) = -\dfrac{dx_3(t)}{dt}$ donde $x_3(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$

31. *a*) $Z(\omega) = \begin{cases} 1 + \frac{\omega}{2\pi} & -\pi < \omega < 0 \\ 1 - \frac{\omega}{2\pi} & 0 < \omega < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

    b) $z(t) = \dfrac{\sin \pi t}{2\pi t} + \left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\pi t}\right)^2$

32. $X(\omega) = \dfrac{4\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\omega^2}$

Soluciones de los ejercicios complementarios

1. *a)* $h(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow H(w) = \dfrac{1}{1+jw}$

   1) $x(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}\sin(2\pi t + \frac{\pi}{4} - \arctan(2\pi))$

   2) $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(4\pi t) \Rightarrow$
   $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}\sin(2\pi t - \arctan(2n)) + \dfrac{1}{\sqrt{1+16\pi^2}}\cos(4\pi t - \arctan(4\pi))$

   3) $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(3\pi t) \Rightarrow$
   $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}\cos(2\pi t - \arctan(2n)) + \dfrac{1}{\sqrt{1+9\pi^2}}\cos(3\pi t - \arctan(3\pi))$

   4) $x(t) = (\sin 3\pi t)(\cos 5\pi t) \Rightarrow$
   $y(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+64\pi^2}}\sin(8\pi t - \arctan(8\pi)) - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}\sin(2\pi t - \arctan(2\pi))$

   5) $x(t) = \cos^3 \pi t \Rightarrow$
   $y(t) = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\cos(\pi t - \arctan(\pi)) + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{1+9\pi^2}}\cos(3\pi t - \arctan(3\pi))$

   b) $h(t) = e^{-|t|} \Rightarrow H(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$

   1) $x(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y(t) = \dfrac{2}{1+4\pi^2}\sin(2\pi t + \frac{\pi}{4})$

   2) $x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(4\pi t) \Rightarrow$
   $y(t) = \dfrac{2}{1+4\pi^2}\sin(2\pi t) + \dfrac{2}{1+16\pi^2}\cos(4\pi t)$

   3) $x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(3\pi t) \Rightarrow$
   $y(t) = \dfrac{2}{1+4\pi^2}\cos(2\pi t) + \dfrac{2}{1+9\pi^2}\sin(3\pi t)$

   4) $x(t) = (\sin 3\pi t)(\cos 5\pi t) \Rightarrow$
   $y(t) = \dfrac{1}{1+64\pi^2}\sin(8\pi t) - \dfrac{1}{1+4\pi^2}\sin(2\pi t)$

   5) $x(t) = \cos^3 \pi t \Rightarrow y(t) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1+\pi^2}\cos(\pi t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+9\pi^2}\cos(3\pi t)$

2. *a)* $X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega}\left[1 + e^{j\omega} - 3e^{-j\omega} + e^{-3j\omega}\right]$

   b) $X(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

   c) $X(\omega) = -\dfrac{1}{2j}\dfrac{1}{[2+j(\omega+4)]^2} - \dfrac{1}{2j}\dfrac{1}{[2+j(\omega-4)]^2}$

   d) $X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \frac{2e^{-j\omega}}{-\omega^2} - \frac{2e^{-j\omega}-2}{j\omega^3}$

3. $x(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), a > 0 \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{1}{(a+j\omega)^n}$

Demostración:

$n = 1 \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$

$n = 2 \Rightarrow x(t) = te^{-at}u(t) \Leftrightarrow j\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{1}{a + j\omega}\right) \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{1}{(a + j\omega)^2}$

Suponemos cierto para n $\Rightarrow$

$n + 1 \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{j}{n}\dfrac{d}{d\omega}\left[\dfrac{1}{(a + j\omega)^n}\right] = \dfrac{j}{n}\dfrac{-jn}{(a + j\omega)^{n+1}} = \dfrac{1}{(a + j\omega)^{n+1}}$

$\Rightarrow$ Cierto $\forall n$

4. *a)* $y(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \lambda_k \phi_k(t)$

   b) Lineal, no invariante.

   c) $\lambda_k = k^2$

   d) $y(t) = 10^3 t^{-10} + 3t + 8t^4$

5. *a)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) 2\frac{\sin\omega}{\omega} e^{2j\omega} d\omega = 7\pi$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 26\pi$

6.

7.

8. *a)* $y_3(t) = \dfrac{1}{\pi}\cos(\pi t)$

   b) $y_4(t) = \dfrac{3}{5}\left[\dfrac{1}{2} + \cos(\dfrac{3\pi}{5}t) + \cos(\dfrac{6\pi}{5}t) + \cos(\dfrac{9\pi}{5}t)\right]$

   c) $y_6(t) = 1 - e^{-2\pi}\left[\cos 2\pi t - t\sin 2\pi t\right]$

9. *a)* $H(\omega) = \dfrac{3 + 2j\omega}{(1 + j\omega)(10 + j\omega)}$

   b) $h(t) = [\dfrac{1}{9}e^{-t} + \dfrac{17}{9}e^{-10t}]u(t)$

10. *a)* $Y(\omega) = \dfrac{1 + j\omega}{(2 + j\omega)^2} = \dfrac{1}{(2 + j\omega)} - \dfrac{1}{(2 + j\omega)^2}$
    $y(t) = [e^{-2t} - te^{-2t}]u(t)$

    b) $Y(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega}$
    $y(t) = e^{-t}u(t)$

    c) $Y(\omega) = \dfrac{1}{(2 + j\omega)^2(1 + j\omega)} = \dfrac{1}{(1 + j\omega)} + \dfrac{\frac{1}{2}}{(2 + j\omega)} - \dfrac{1}{(2 + j\omega)^2}$
    $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t}]u(t)$

11. $y(t) = \dfrac{1}{\omega_0} e^{-at}(\sin \omega_0 t) u(t)$

12. *a)* $\dfrac{1}{\pi} \tan^{-1} \dfrac{\pi}{a}$

b) $\dfrac{1}{\pi} \tan^{-1} \dfrac{2\pi}{a} + \dfrac{a}{2\pi^2} \ln \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2}} \right)$

c) $\dfrac{1}{2} \left[\dfrac{1}{a + j\omega_0} + \dfrac{1}{a - j\omega_0} \right] = \dfrac{a}{a^2 + \omega_0^2}$

13.

14. No.

15. *a)* $\phi_{yx}(t) = \phi_{xy}(-t)$

b) $\phi_{xy}(t) = \phi_{xx}(t + T)$
$\phi_{yy}(t) = \phi_{xx}(t)$

c) $R_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{24}(-t^3 + 12t + 16) & -2 < t < 0 \\ \frac{1}{24}(t^3 - 12t + 16) & 0 < t < 2 \\ 0 & Resto \end{cases}$

d) $h(t) = x(T - t)$

16. *a)* $\Phi_{yx}(\omega) = \Phi^*_{xy}(\omega)$

b) $\Phi_{xy}(\omega) = X(\omega) Y^*(\omega)$

(d) $\Phi_{xy}(\omega) = \Phi_{xx}(\omega) H(\omega)$
$\Phi_{yy}(\omega) = \Phi_{xx}(\omega) |H(\omega)|^2$

17. $R_x(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \frac{A^2}{2}(t + T) \cos \omega_0 t & -T < t < 0 \\ \frac{A^2}{2}(-t + T) \cos \omega_0 t & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$

18.