



Ingeniería Informática

Problemas del tema 2

Conceptos básicos de señales y sistemas

Curso 2008-09

10/10/2008

Enunciados

1. La siguiente igualdad se conoce con el nombre de relación de Euler

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j \operatorname{sen}\phi$$

Utilice esta relación para demostrar las siguientes igualdades

a) $\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{j\phi} + e^{-j\phi})$

b) $\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2j}(e^{j\phi} - e^{-j\phi})$

c) $\cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$

d) $(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\phi) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$

2. Sea z un número complejo con coordenadas polares r , ϕ y coordenadas cartesianas x , y . Obtenga las expresiones de las coordenadas cartesianas de los siguientes números complejos en términos de x , y .

a) $z_1 = re^{-j\phi}$

b) $z_2 = r$

c) $z_3 = re^{j(\phi+\pi)}$

d) $z_4 = re^{j(-\phi+\pi)}$

e) $z_5 = re^{j(\phi+2\pi)}$

3. Sea z una variable compleja

$$z = x + jy = re^{j\phi}$$

El conjugado de z se denota por z^* y se define como

$$z^* = x - jy = re^{-j\phi}$$

Demuestre que se cumplen las siguientes relaciones, donde z , z_1 y z_2 son números complejos arbitrarios.

a) $zz^* = r^2$

b) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\phi}$

c) $|z| = |z^*|$

d) $z + z^* = 2\Re\{z\} = 2x$

e) $z - z^* = 2\Im\{z\} = 2y$

f) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

g) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$, donde a es un número real cualquiera.

$$h) \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$i) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

4. Dibuje cada una de las siguientes señales continuas

$$a) x(t) = 2u(t) - u(t-1) \text{ y } dx(t)/dt.$$

$$b) x(t) = u(t+2) - 2u(t) + u(t-1) \text{ y } dx(t)/dt.$$

$$c) x(t) = t[u(t+1) - u(t-2)] \text{ y } dx(t)/dt.$$

$$d) x(t) = \delta(t+\pi) - 2\delta(t-\pi) \text{ y } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

$$e) x(t) = (\cos \pi t)[\delta(t) + \delta(t-1)] \text{ y } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

$$f) x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

$$g) x(t) = e^{-bt} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] u(t + \varepsilon), \text{ siendo } b > 0 \text{ y } 0 < \varepsilon < T.$$

5. Dibuje cada una de las siguientes señales discretas

$$a) x(n) = u(n) - 2u(n-4) \text{ y } y(n) = x(n) - x(n-1).$$

$$b) x(n) = 2u(n+1) + u(n) - 3u(n-2).$$

$$c) x(n) = (1-n)[u(n+2) - u(n-3)].$$

$$d) x(n) = \delta(n+2) - 2\delta(n-1) \text{ y } y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

$$e) x(n) = n^2[\delta(n+2) - \delta(n-2)] \text{ y } y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

$$f) x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

$$g) x(n) = \cos \frac{\pi n}{N} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN) \right] u(n)$$

6. Clasifique las siguientes señales como señales de energía finita o de potencia media finita. Calcule la energía o la potencia media según cada caso.

$$a) x(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$b) x(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$$

$$c) x(t) = A \cos \omega_o t$$

$$d) x(t) = \begin{cases} A \cos \omega_o t & -T_o/2 \leq t \leq T_o/2, \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \text{ siendo } T_o = 2\pi/\omega_o$$

$$e) x(t) = \begin{cases} A \exp(-at) & t > 0, \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \text{ siendo } a > 0$$

f) $x(t) = \cos 2\pi t + 5\cos 4\pi t$

7. Calcule las siguientes integrales

a) $\int_{-\infty}^t (\cos \tau) u(\tau) d\tau.$

b) $\int_{-\infty}^t (\cos \tau) \delta(\tau) d\tau.$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos \tau) \delta(\tau) d\tau.$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos \tau) u(\tau - 1) \delta(\tau) d\tau.$

e) $\int_0^2 \exp(t^2 - 3t + 2) \delta(t - 1) dt.$

8. Sea $x(t)$ la señal de la figura 1. Dibuje las siguientes señales:

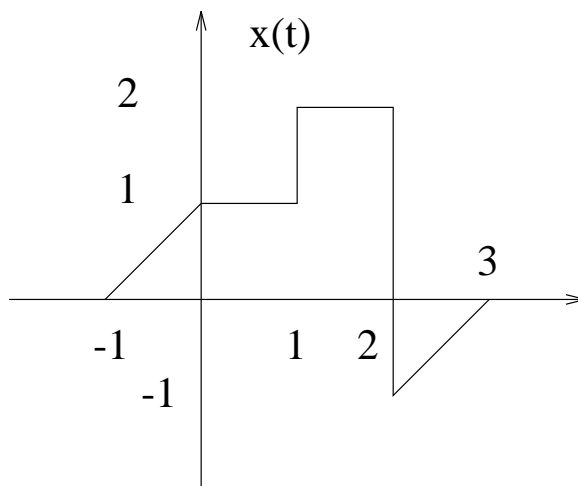


Figura 1:

a) $x(t - 2)$

b) $x(1 - t)$

c) $x(2t + 2)$

d) $x(2 - t/3)$

e) $[x(t) + x(2 - t)]u(1 - t)$

f) $x(t)[\delta(t + 3/2) - \delta(t - 3/2)].$

9. Considere la señal discreta $x(n)$ de la figura 2. Dibuje las siguientes señales:

a) $x(n - 2)$

b) $x(4 - n)$

c) $x(2n)$

- d) $x(2n + 1)$
 e) $x(n)u(2 - n)$
 f) $x(n - 1)\delta(n - 3)$

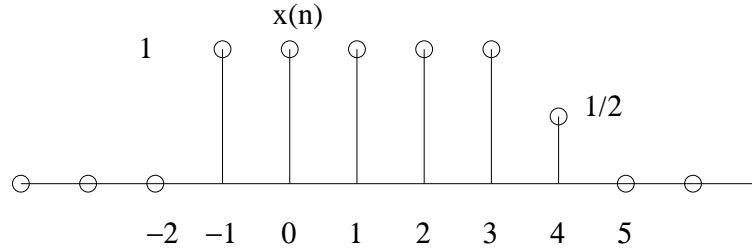


Figura 2:

10. Dibuje las siguientes sinusoides reales contínuas.

- a) $\text{sen } 2\pi t$
 b) $\text{sen } (2\pi t - \pi/4)$
 c) $\text{sen } (2\pi t + \pi/4)$
 d) $\text{sen } (2\pi t + \pi/2)$
 e) $\text{sen } 4\pi t$
 f) $\text{Re} [e^{j4\pi t}]$

11. Determine cuales de las siguientes señales son periódicas. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

- a) $x(t) = 3 \cos(4t + \pi/3)$
 b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$
 c) $x(t) = \cos^2(2t - \pi/3)$

12. Determine si cada uno de estos sistemas es lineal, invariante en el tiempo, causal o estable:

- a) $y(t) = t^2 x(t - 1)$
 b) $y(t) = e^{x(t)}$
 c) $y(t) = x(t - 1) - x(1 - t)$
 d) $y(t) = [\cos(3t)]x(t)$
 e) $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$
 f) $y(t) = x(t/2)$

13. Suponga que $\tilde{x}(t)$ es una señal periódica de periodo T .

a) Demuestre que $\tilde{x}(t)$ se puede expresar de la siguiente forma

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$$

donde $x(t)$ es la forma de onda de un periodo.

b) Dibuje $\tilde{x}(t)$ cuando $x(t)$ tiene la forma de la siguiente figura y $T = 2$.

c) Repita el apartado anterior cuando $T = 3$.

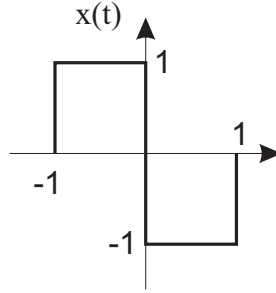


Figura 3: Ejercicio 13

14. Una señal $x(t)$ tiene la siguiente expresión analítica

$$x(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| < T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

a) Dibuje $x(t)$.

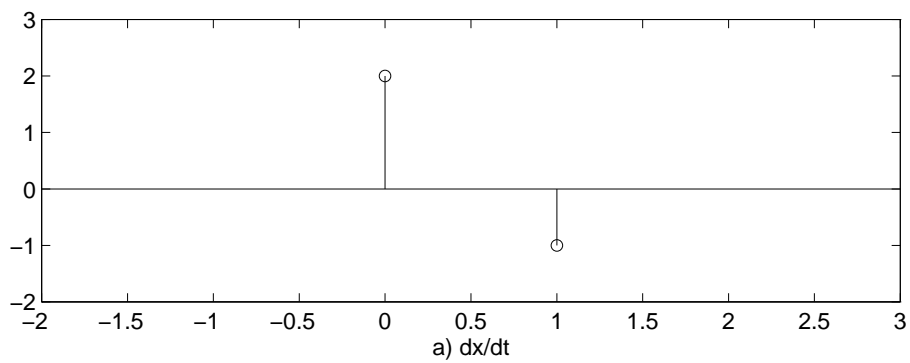
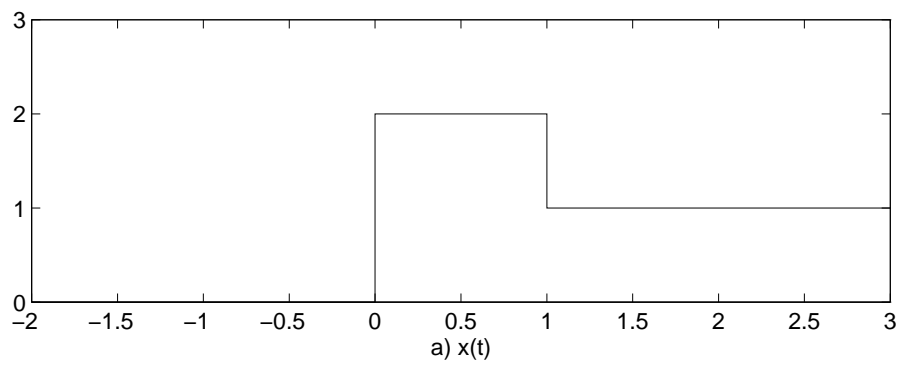
b) Calcule y dibuje $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

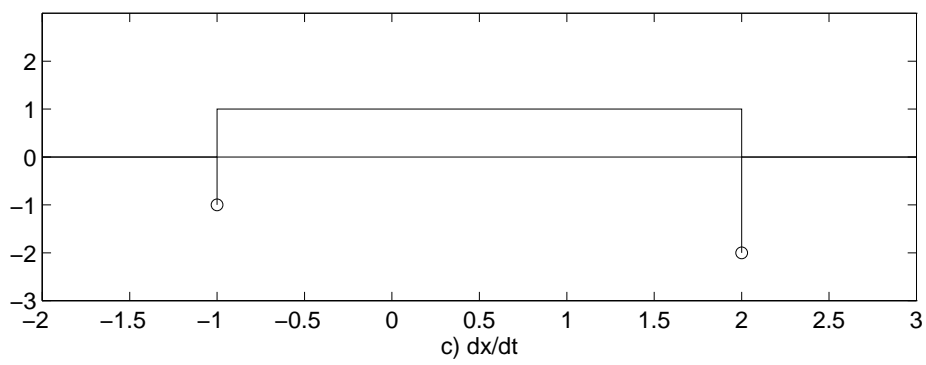
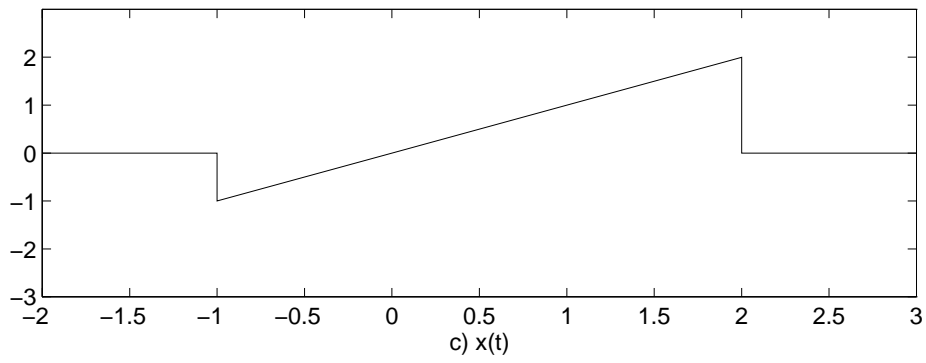
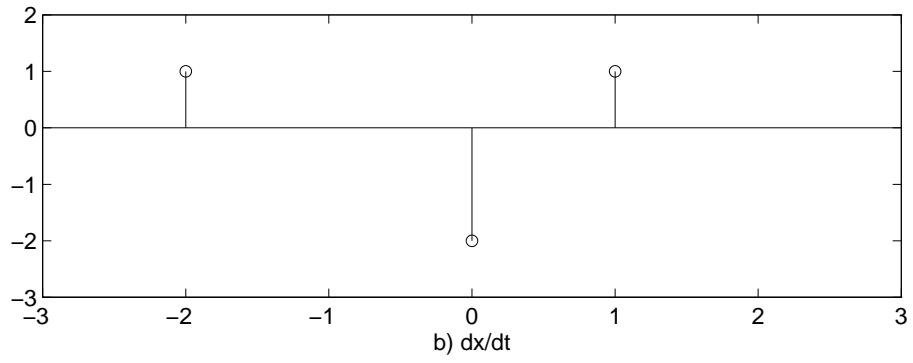
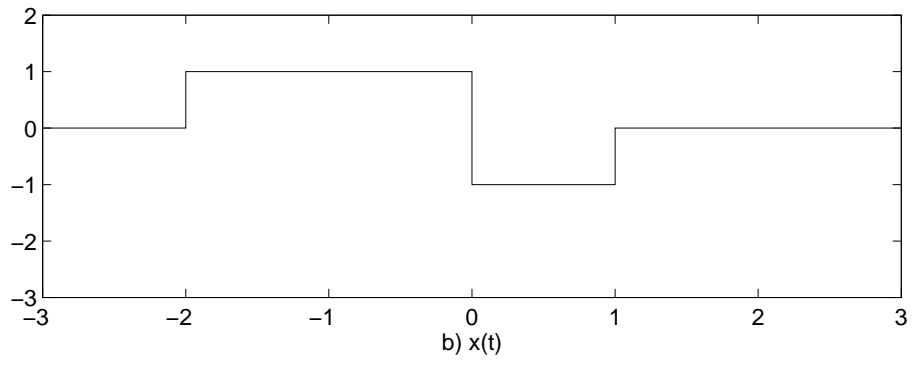
c) Calcule y dibuje $z(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

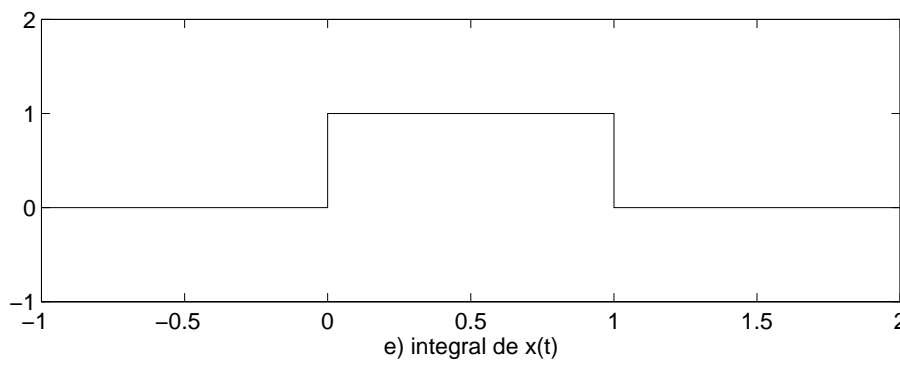
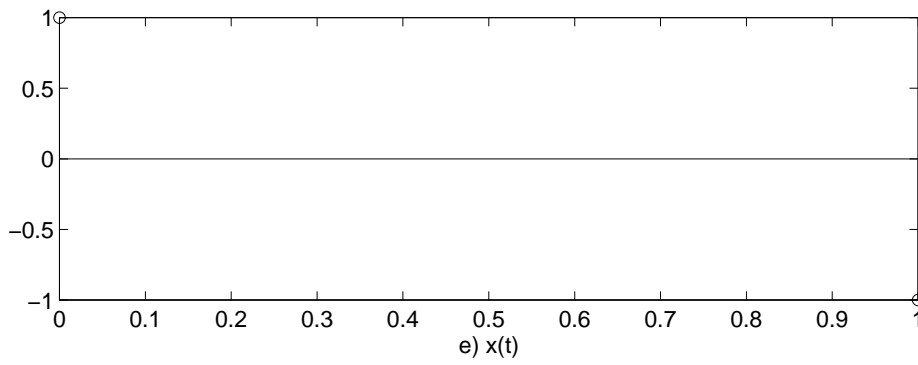
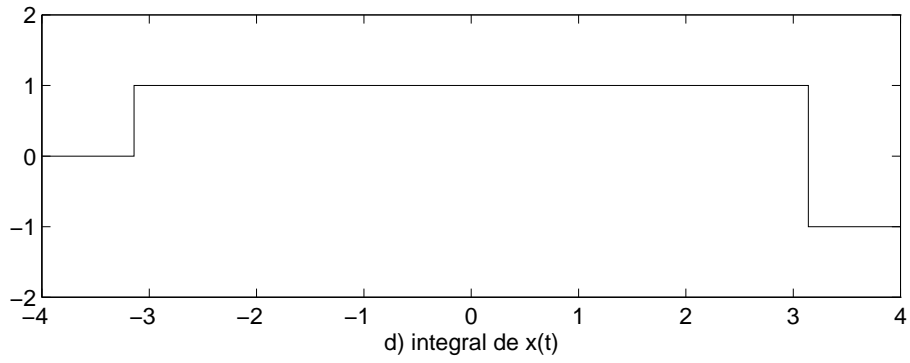
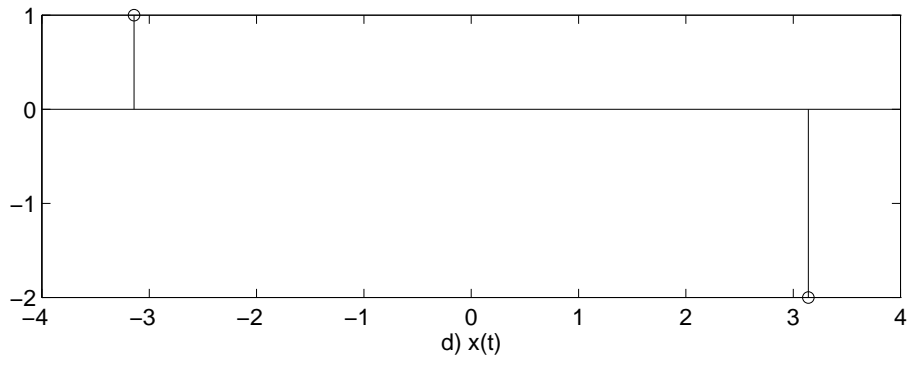
Soluciones

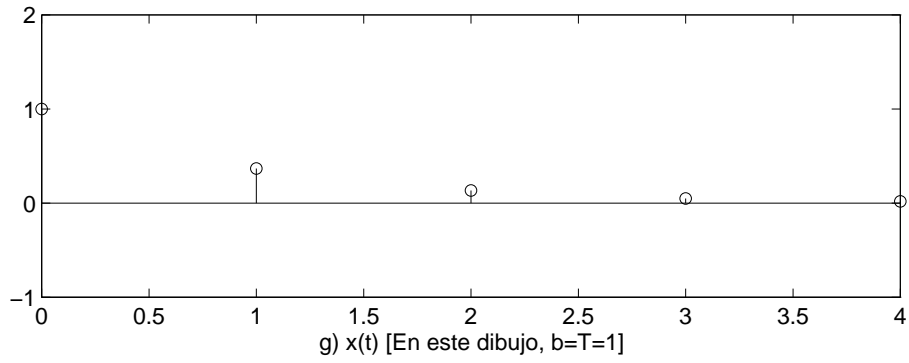
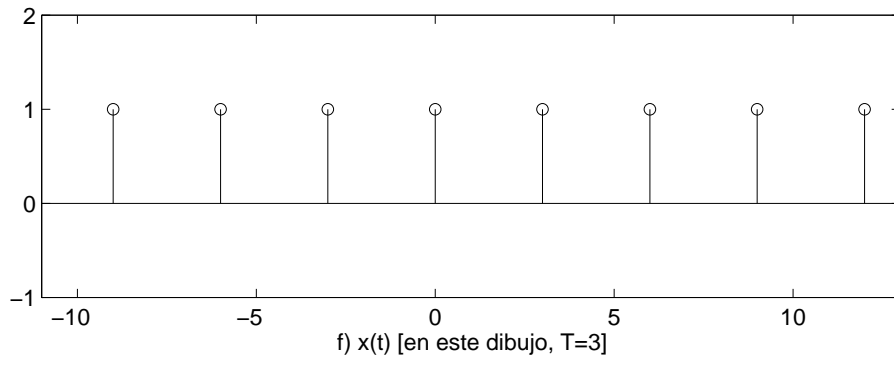
2. a) $\Re(z_1) = x$, $\Im(z_1) = -y$
b) $\Re(z_2) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, $\Im(z_2) = 0$
c) $\Re(z_3) = -x$, $\Im(z_3) = -y$
d) $\Re(z_4) = -x$, $\Im(z_4) = y$
e) $\Re(z_5) = x$, $\Im(z_5) = y$

4.

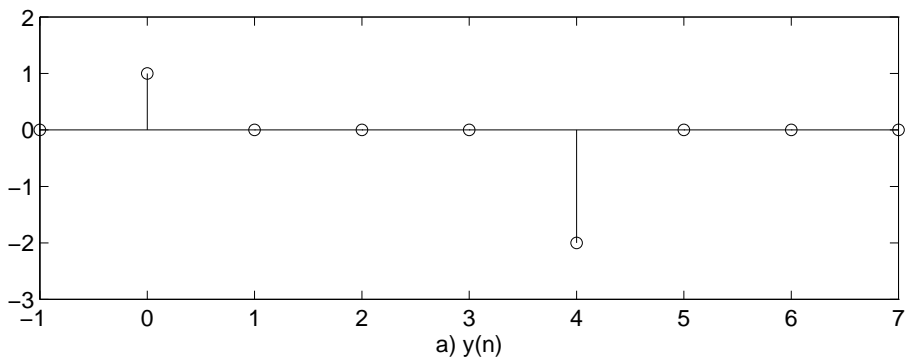
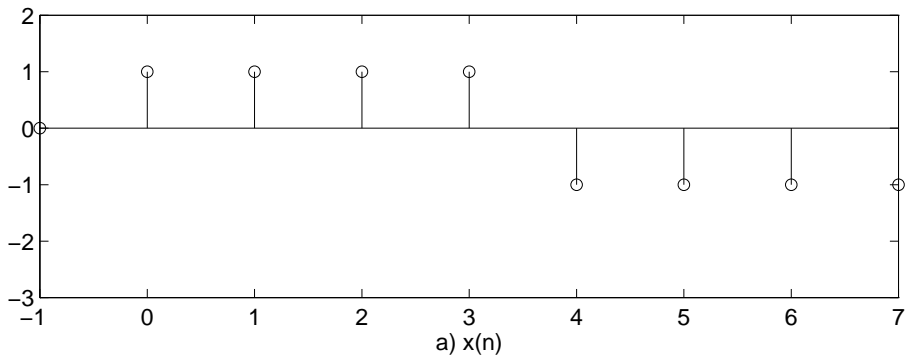


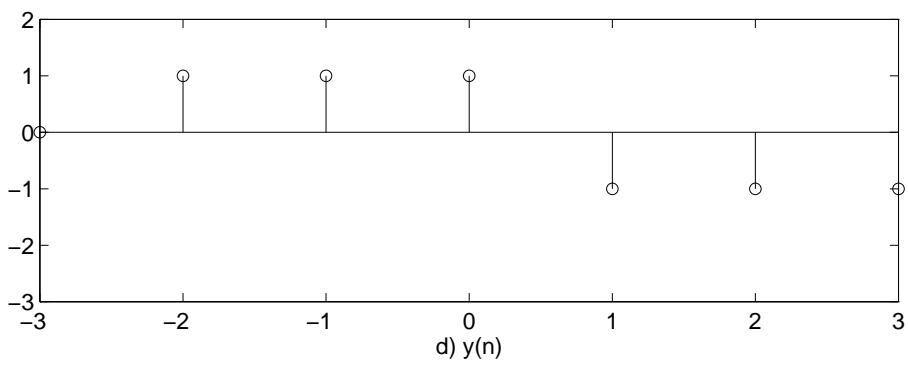
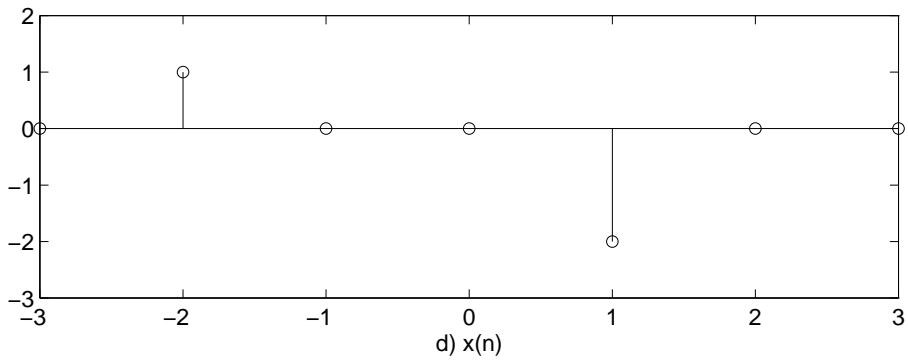
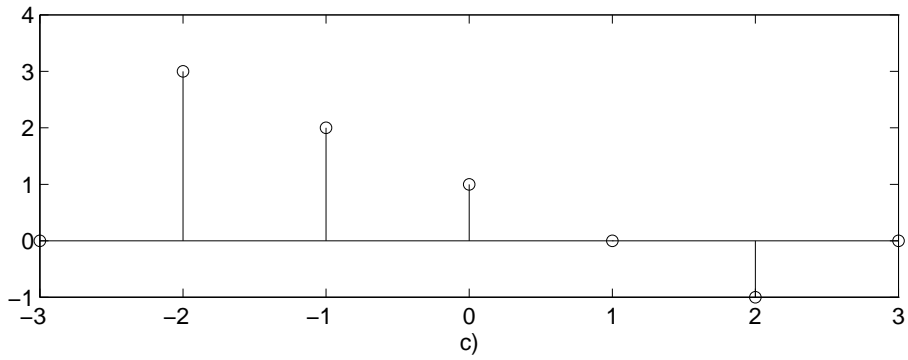
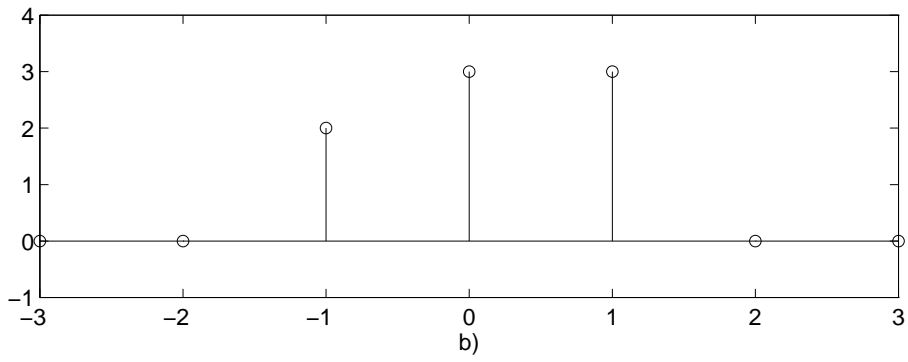


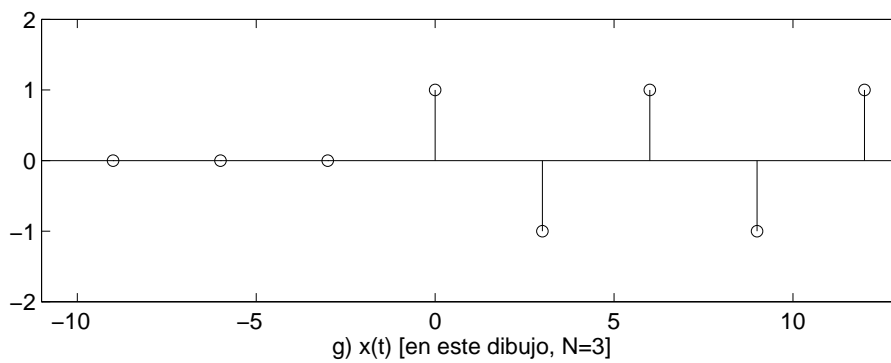
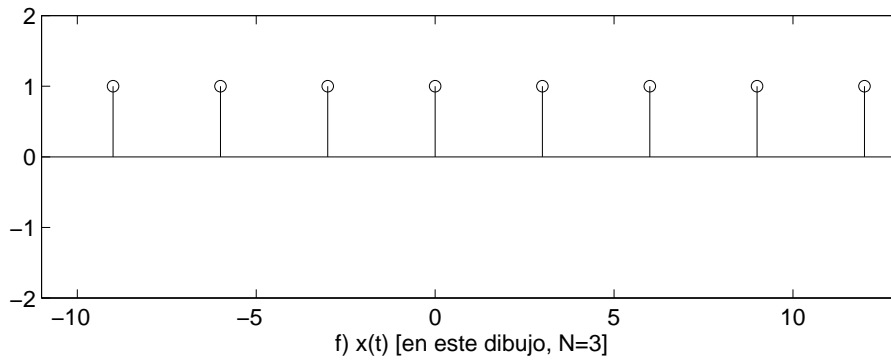
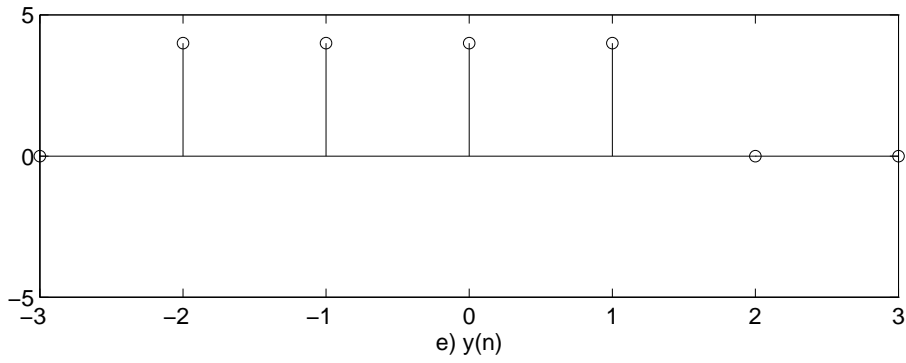
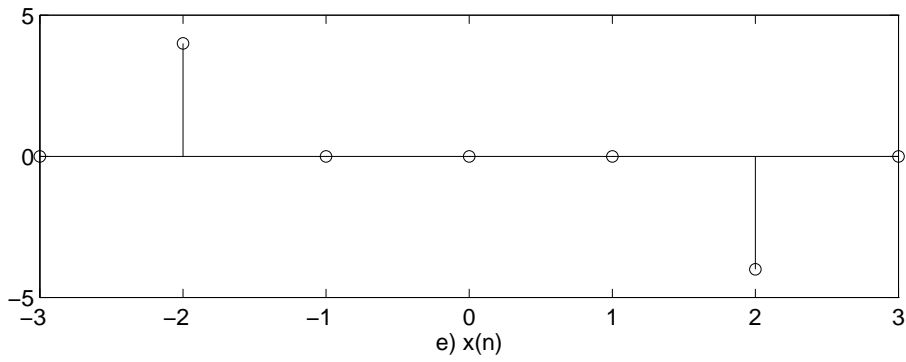




5.







6. a) Energia Finita, $\frac{1}{4}$
 b) Potencia Media Finita, 1
 c) Potencia Media Finita, $\frac{A^2}{2}$
 d) Energia Finita, $\frac{A^2T}{2}$
 e) Energia Finita, $\frac{A^2}{2a}$
 f) Potencia Media Finita, 13

7. a) $\begin{cases} \text{sen}(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

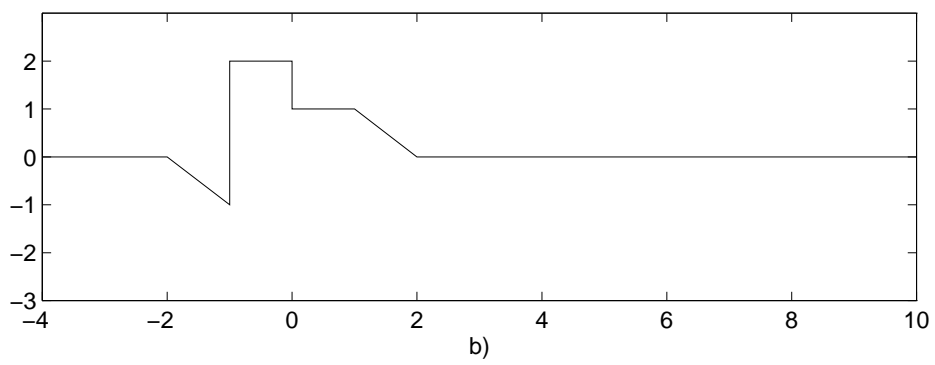
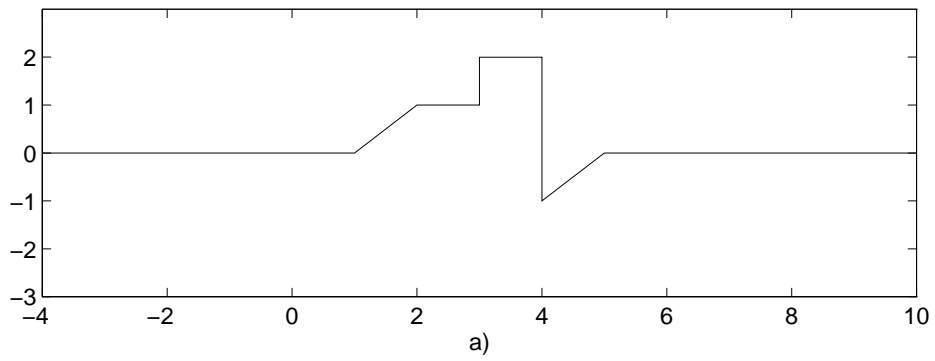
b) $u(t)$

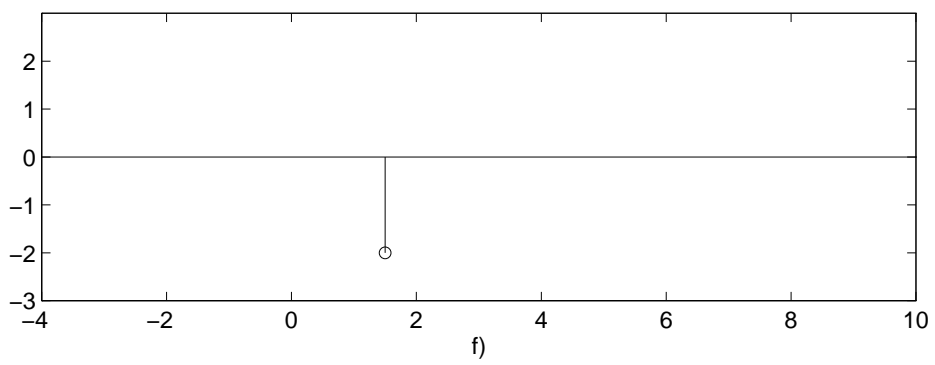
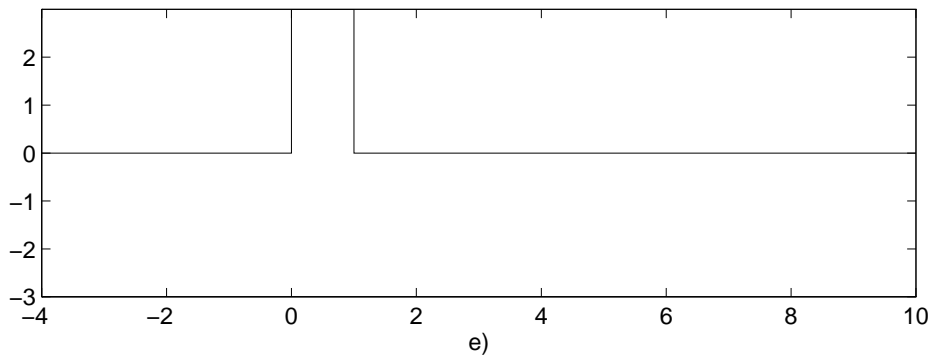
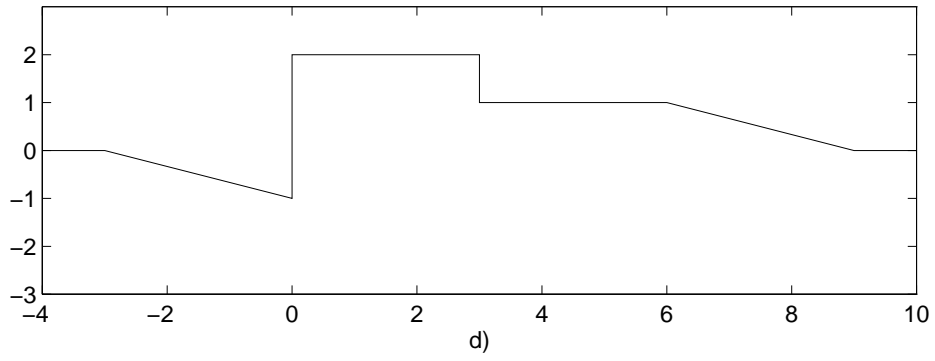
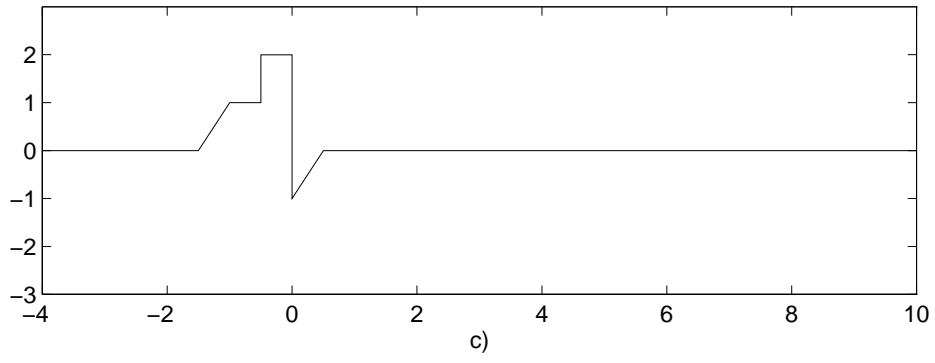
c) 1

d) 0

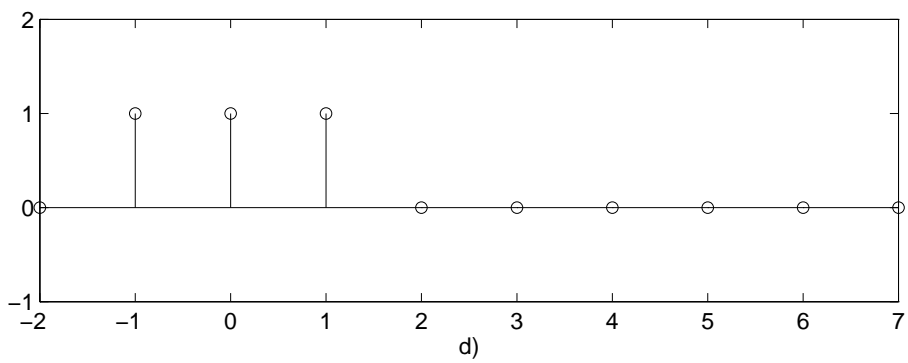
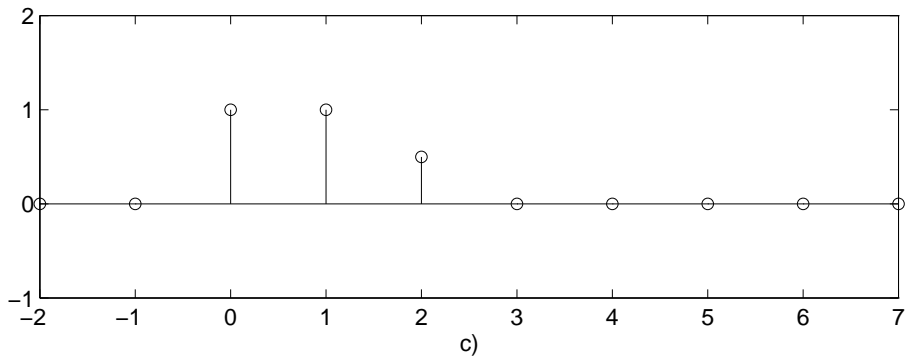
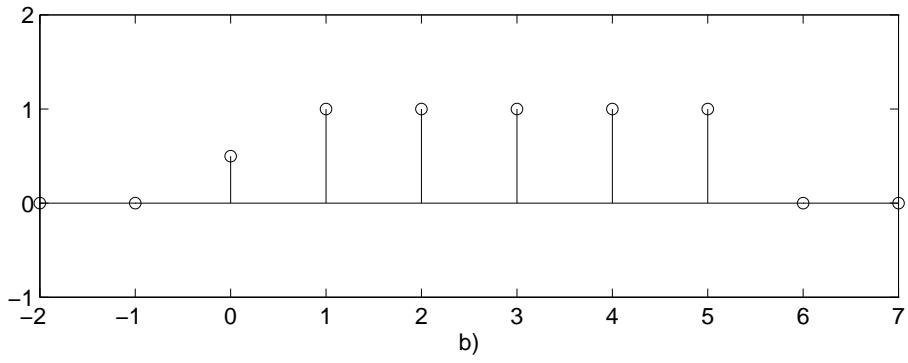
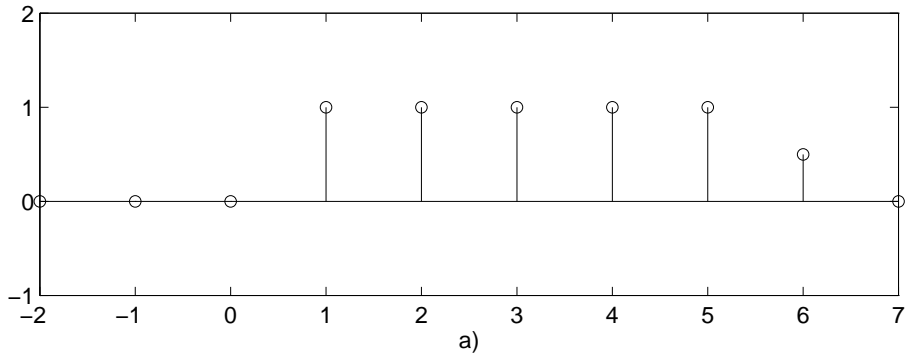
e) 1

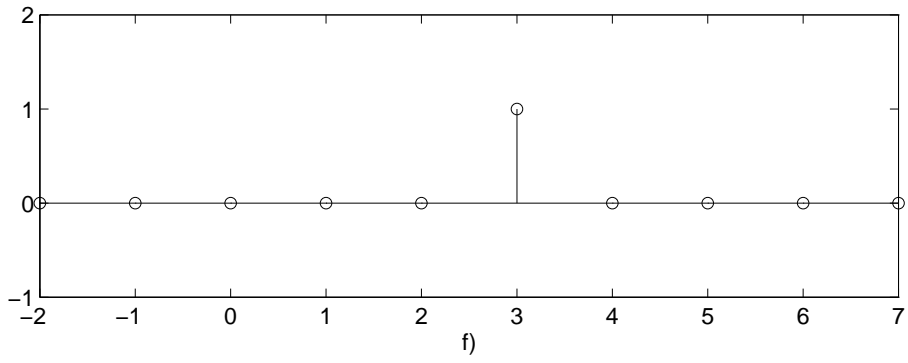
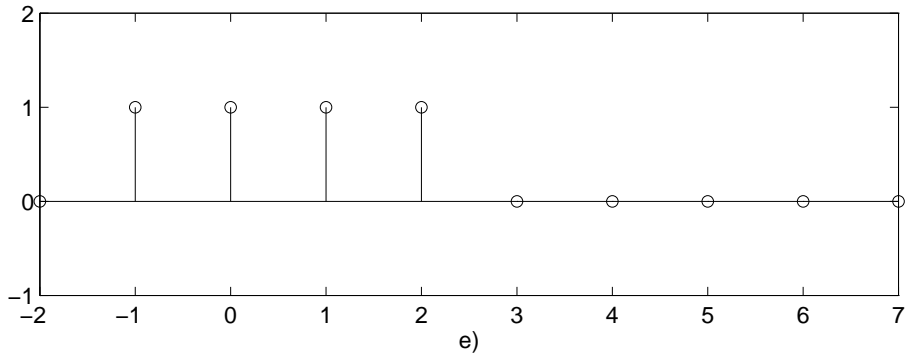
8.



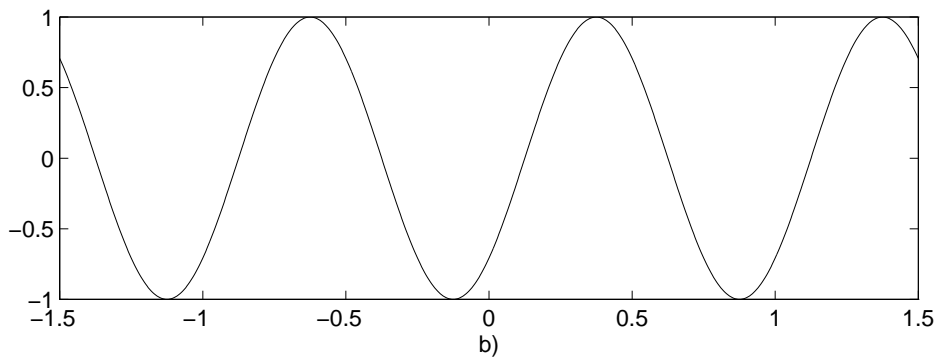
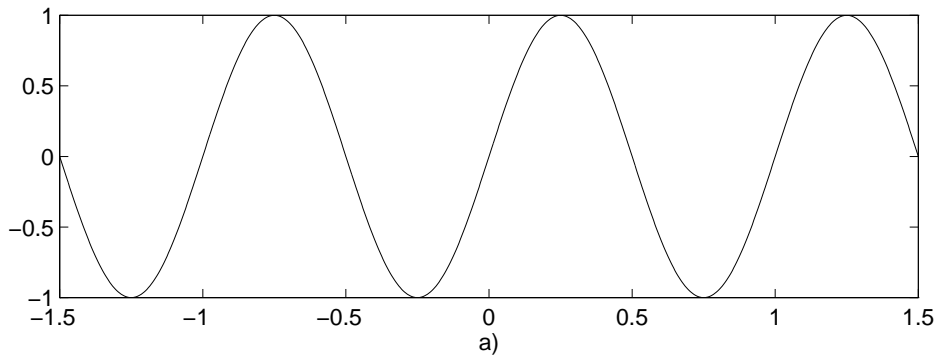


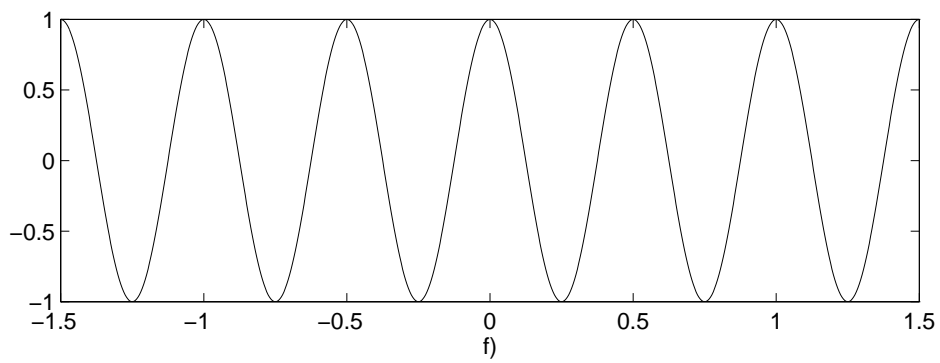
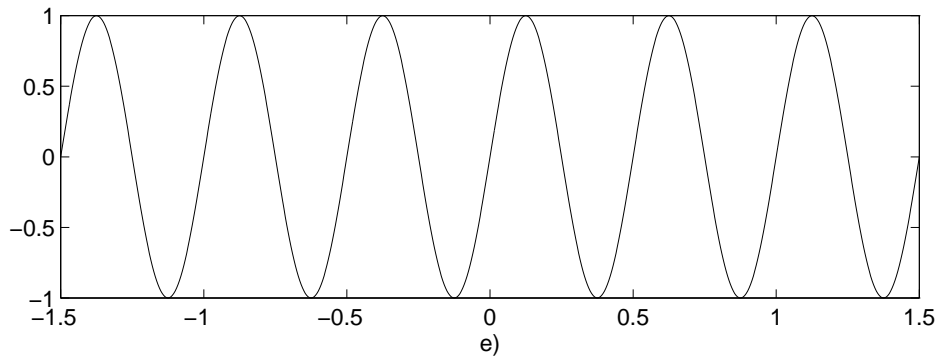
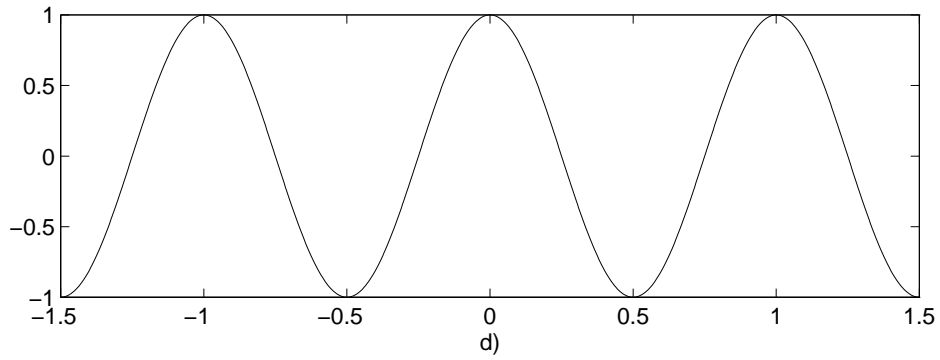
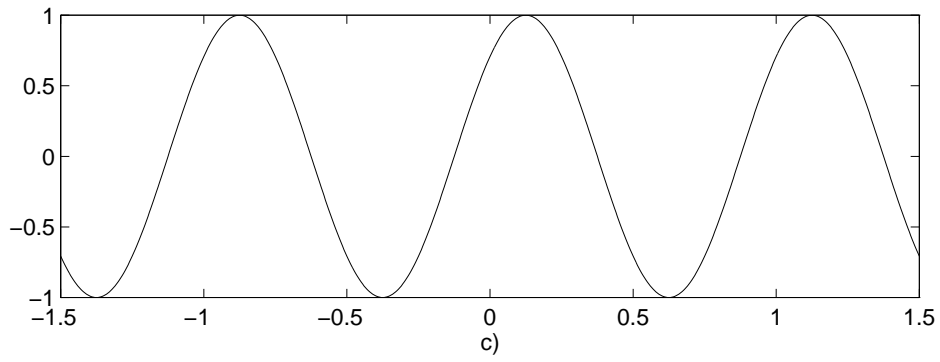
9.





10.





11. a) Peridica, $T_0 = \frac{\pi}{2}$
 b) Peridica, $T_0 = 2$
 c) Peridica, $T_0 = \frac{\pi}{2}$

12.

	L	I	C	E
(a)	si	no	si	no
(b)	no	si	si	si
(c)	si	no	no	si
(d)	si	no	si	si
(e)	si	no	no	no
(f)	si	no	no	si