



**Ingeniería Informática**

**Medios de Transmisión (MT)**

## **Problemas del tema 3**

# **Sistemas lineales e invariantes en el tiempo**

Curso 2008-09

17/10/2008

# Enunciados

1. Considere el sistema de la figura 1

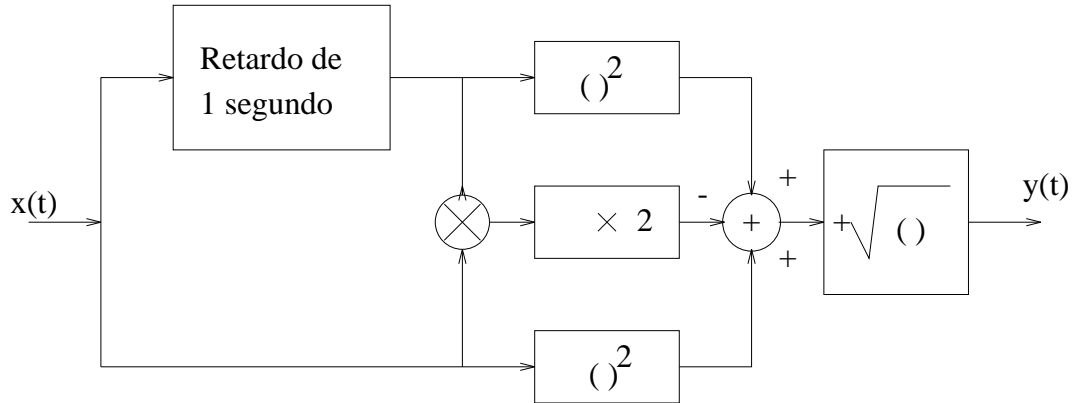


Figura 1:

- Encuentre la relación entre  $x(t)$  e  $y(t)$
- ¿Es un sistema lineal?
- ¿Es un sistema invariante?
- Calcule la salida para la señal de entrada  $x(t)$  de la figura 2

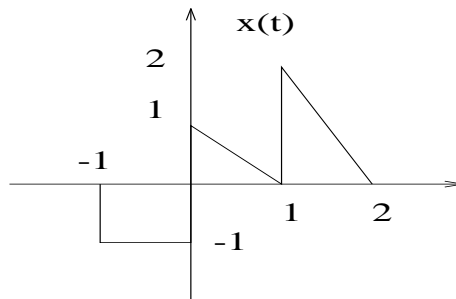


Figura 2:

2. Calcule la convolución  $y(t) = x(t) * h(t)$  de las siguientes señales:

- $x(t) = h(t) = u(t)$ .
- $x(t) = u(t) - u(t - t_1)$  y  $h(t) = u(t) - u(t - t_2)$  donde  $t_2 > t_1 > 0$ .
- $x(t) = \frac{1}{t}u(t - 1)$  y  $h(t) = u(t)$ .
- $x(t) = e^{-at}u(t)$  y  $h(t) = e^{-bt}u(t)$  con  $a \neq b$ .
- $x(t) = h(t) = e^{-at}u(t)$ .
- $x(t) = t^k u(t)$  y  $h(t) = u(t)$  siendo  $k$  entero y  $k > 1$ .
- $x(t) = u(t + 2) - u(t - 3)$  y  $h(t) = \delta(t + 2) + \delta(t - 1)$ .

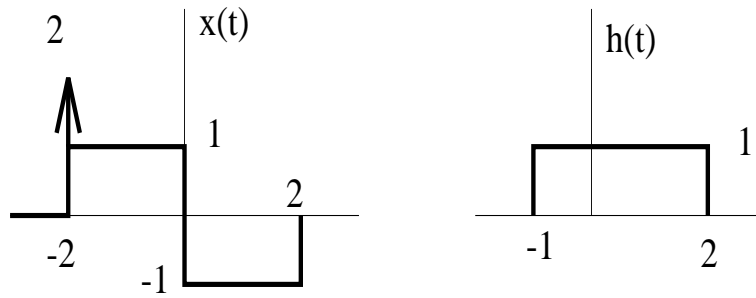


Figura 3:

h)  $x(t)$  y  $h(t)$  como en la figura 3

3. Calcule la salida  $y(t)$  de un sistema LTI caracterizado por  $h(t)$  cuando a su entrada se aplica  $x(t)$ :

a)  $x(t) = e^{-3t} u(t)$  y  $h(t) = u(t - 1)$

b)  $x(t) = u(t) - 2 u(t - 2) + u(t - 5)$  y  $h(t) = e^{-2t} u(t - 1)$

4. Un pulso rectangular  $x(t) = u(t) - u(t - T)$  de duración  $T$  es la entrada a un sistema LTI de respuesta al impulso  $h(t) = e^{-at} u(t)$ , siendo  $a > 0$ . Calcule la salida.

5. Estudie las propiedades de linealidad e invarianza del sistema dado por el esquema de la figura 4

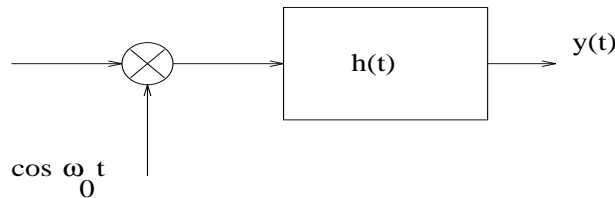


Figura 4:

6. Determine y dibuje la salida  $y(t)$  de cada uno de los siguientes sistemas cuando la entrada es el siguiente tren de impulsos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - 2k)$$

a)  $h(t) = u(t) - u(t - T)$  para  $T = 1, 2, 3$

b)  $h(t) = [\text{sen } \pi t][u(t) - u(t - T)]$  para  $T = 1, 2$

c)  $h(t) = \delta(t) - \delta(t - 1)$

7. Determine si los siguientes sistemas LTI son estables y/o causales

a)  $h(t) = e^{-3t} u(t - 1)$

b)  $h(t) = e^{-3t} u(1 - t)$

c)  $h(t) = e^{-t} u(t + 100)$

- d)  $h(t) = e^t u(-1 - t)$
- e)  $h(t) = e^{-4|t|}$
- f)  $h(t) = t e^{-t} u(t)$
- g)  $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100}) u(t)$

8. Para cada uno de las siguientes relaciones entrada/salida de sistemas LTI, determine la respuesta al impulso. Indique si los sistemas son estables y/o causales.

- a)  $y(t) = \int_t^\infty x(\tau) d\tau.$
- b)  $y(t) = \int_0^\infty e^\tau x(t - \tau - 1) d\tau.$
- c)  $y(n) = 0,2 \sum_{k=-2}^2 x(n - k).$
- d)  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x(k + 2).$

9. Considere que la salida de un sistema LTI  $y(t)$  es la convolución entre la señal de entrada  $x(t)$  y la respuesta al impulso  $h(t)$ . Obtenga en función de  $y(t)$  las siguientes señales

- a)  $h(t) * x(t - t_0)$
- b)  $x(t) * h(t - t_0)$
- c)  $x(t - t_0) * h(t - t_0)$
- d) Calcule  $\delta(t - T_1) * \delta(t - T_2)$

10. Considere un sistema LTI cuya respuesta al impulso viene dada por

$$h(t) = e^{-(t-2)} u(t - 2) \tag{1}$$

- a) Determine la respuesta de este sistema cuando la entrada  $x(t)$  es la señal de la figura 5

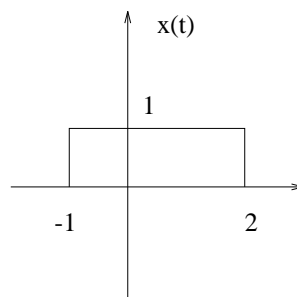


Figura 5:

- b) Considere la interconexión de sistemas mostrada en la figura 6 donde  $h(t)$  es la respuesta al impulso del enunciado. Calcule la salida  $y(t)$  cuando la entrada es la señal del apartado (a). Hágalo de dos formas:

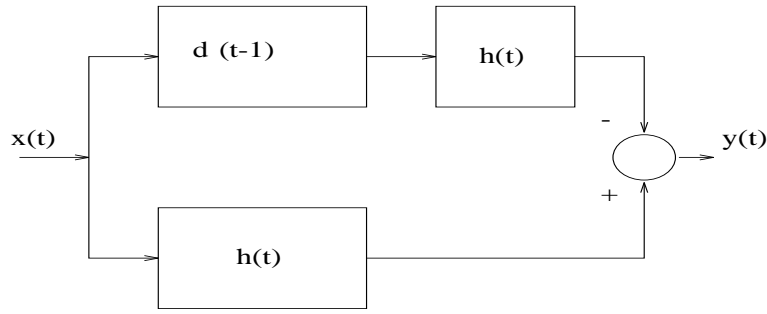


Figura 6:

- 1) Calculando la respuesta al impulso del sistema global y a continuación usando la integral de convolución para calcular la salida.
  - 2) Utilizando el resultado del apartado (a) junto con las propiedades de la convolución para calcular  $y(t)$  sin necesidad de evaluar la integral de convolución.
11. (Septiembre 95) Considere dos señales de duración limitada. La primera de ellas,  $x_1(t)$ , comienza en  $t_1$  y acaba en  $t_2$ . La segunda,  $x_2(t)$ , comienza en  $t_3$  y acaba en  $t_4$ . Si se convolucionan estas dos señales, se obtiene una tercera  $x_3(t) = x_1(t) * x_2(t)$ , también de duración limitada, que comienza en  $t_5$  y acaba en  $t_6$ .
- a) Determine los valores de  $t_5$  y  $t_6$  en función de  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  y  $t_4$ .
  - b) Haga la convolución entre las siguientes dos señales y compruebe el resultado del apartado anterior.

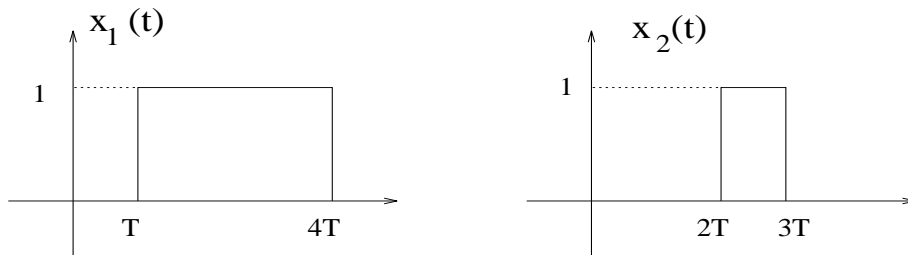


Figura 7:

12. Los siguientes pares entrada-salida han sido observados durante la operación de un sistema invariante en el tiempo

$$\begin{aligned}
 x_1(t) = \delta(t) + 2\delta(t-2) &\stackrel{T}{\longleftrightarrow} y_1(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-2) \\
 x_2(t) = 3\delta(t-2) &\stackrel{T}{\longleftrightarrow} y_2(t) = \delta(t-1) + 2\delta(t-3) \\
 x_3(t) = \delta(t-4) &\stackrel{T}{\longleftrightarrow} y_3(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1)
 \end{aligned}$$

¿Se puede obtener alguna conclusión acerca de la linealidad del sistema?

13. Los siguientes pares entrada-salida han sido observados durante la operación de

un sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1(t) = -\delta(t+1) + 2\delta(t) + \delta(t-1) &\xrightarrow{T} y_1(t) = \delta(t+1) + 2\delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-3) \\ x_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t) - \delta(t-1) &\xrightarrow{T} y_2(t) = -\delta(t+1) + \delta(t) + 2\delta(t-2) \\ x_3(t) = \delta(t) + \delta(t-1) &\xrightarrow{T} y_3(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

¿Se puede obtener alguna conclusión acerca de la invarianza en el tiempo del sistema?

14. Si  $y(t) = x(t) * h(t)$  demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad (2)$$

15. (Marzo 96) Considere un sistema LTI que cuando la entrada es  $x_1(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$  la salida es  $y_1(t) = e^{-2t}u(t)$  y cuando la entrada es  $x_2(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$  la salida es  $y_2(t) = e^{-t}u(t)$ .

- Calcule  $x_1(t) * x_2(t)$ .
- Calcule la respuesta al impulso del sistema.
- Calcule la respuesta en frecuencia del sistema.

16. Considere las señales  $x(t) = u(t-3) - u(t-5)$  y  $h(t) = e^{-3t}u(t)$ .

- Calcule  $y(t) = x(t) * h(t)$
- Calcule  $g(t) = (dx(t)/dt) * h(t)$
- ¿Cual es la relación que existe entre  $g(t)$  y  $y(t)$ ?

17. Demuestre que la operación de convolución es conmutativa, i.e.,

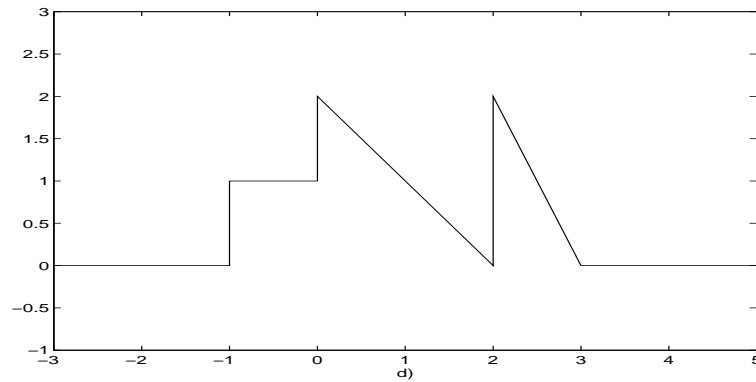
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

18. La respuesta al escalón  $s(t)$  de un sistema LTI es la salida que se obtiene cuando la entrada es un escalón unidad. Demuestre que la respuesta al impulso  $h(t)$  es la derivada de la respuesta al escalón, i.e.,

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

# Soluciones

1. a)  $y(t) = |x(t) - x(t - 1)|$   
 b) No lineal.  
 c) Invariante.  
 d)



2. a)  $y(t) = t u(t)$

$$b) y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < t_1 \\ t_1 & t_1 < t < t_2 \\ t_1 + t_2 - t & t_2 < t < t_1 + t_2 \\ 0 & t > t_1 + t_2 \end{cases}$$

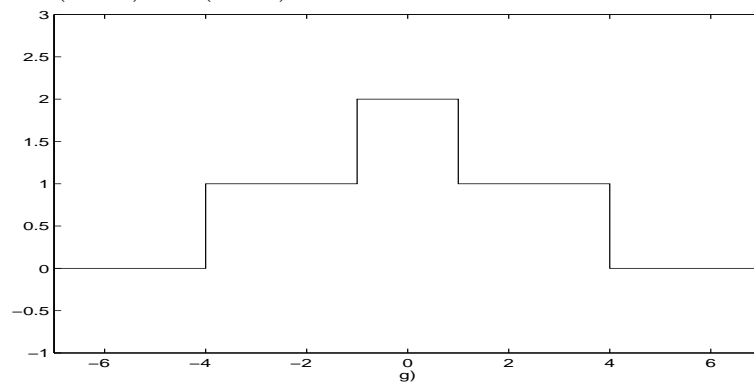
c)  $y(t) = \ln(t) u(t - 1)$

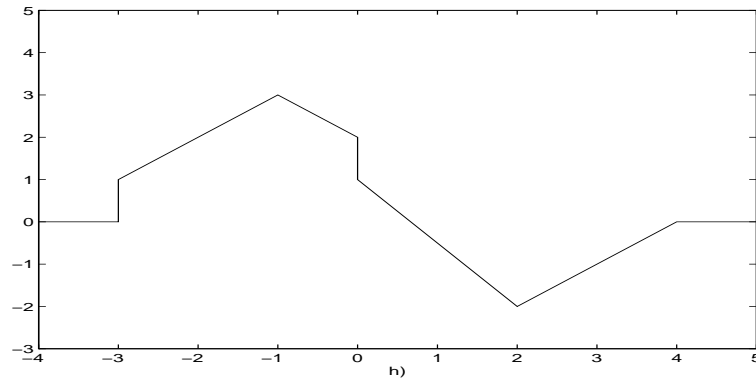
d)  $y(t) = \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) u(t)$

e)  $y(t) = t e^{-at} u(t)$

f)  $y(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1} u(t)$

g)  $y(t) = x(t + 2) + x(t - 1)$



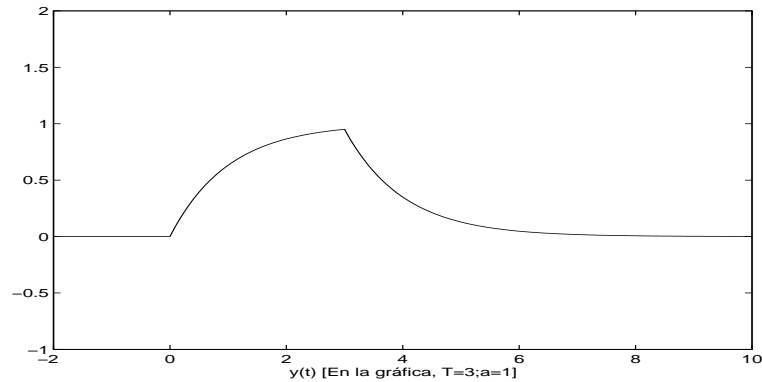


h)

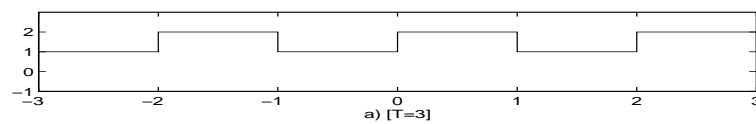
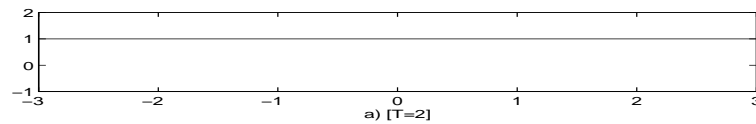
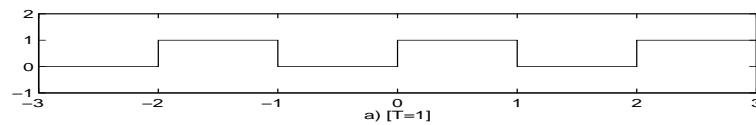
3. a)  $y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)$

$$b) y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-2t}) & 1 < t < 3 \\ e^{-2(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & 3 < t < 6 \\ e^{-2(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-5)} - \frac{1}{2}e^{-2t} & t > 6 \end{cases}$$

$$4. y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) & 0 < t < T \\ \frac{1}{a}(e^{-a(t-T)} - e^{-at}) & t > T \end{cases}$$

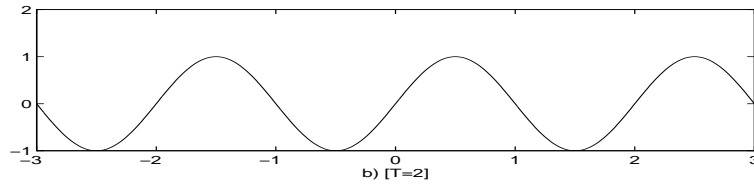
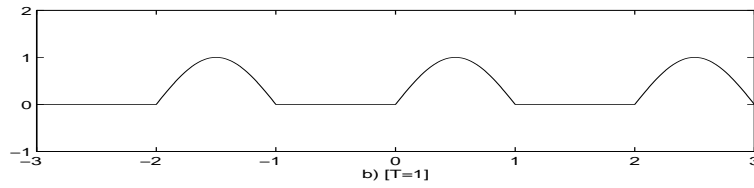


5. Lineal, no invariante.

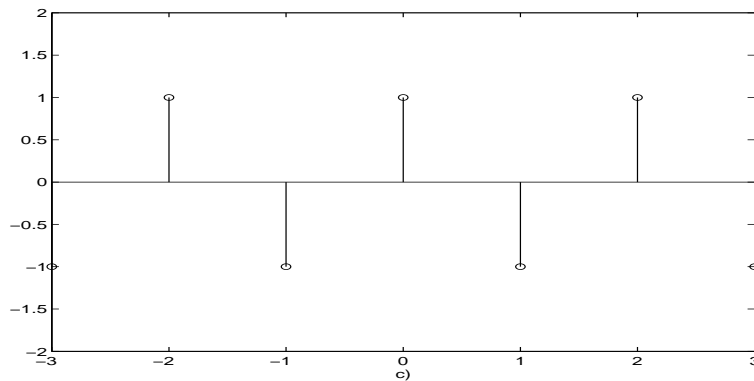


6. a)





b)



- c)
7. a) Estable, causal.  
 b) No estable, no causal.  
 c) Estable, no causal.  
 d) Estable, no causal.  
 e) Estable, no causal.  
 f) Estable, causal.  
 g) No estable, causal.
8. a)  $h(t) = u(-t)$  No estable, no causal.  
 b)  $h(t) = e^{t-1} u(t-1)$  No estable, causal.  
 c)  $h(n) = \begin{cases} 0,2 & -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$  Estable, no causal.  
 d)  $h(n) = 2^{-(n+2)} u(n+2)$  Estable, no causal.
9. a)  $y(t - t_0)$   
 b)  $y(t - t_0)$   
 c)  $y(t - 2t_0)$   
 d)  $\delta(t - T_1 - T_2)$
10. a)  $y_a(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)} & 1 < t < 4 \\ e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)} & t > 4 \end{cases}$

b) 1)  $h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2) - e^{-(t-3)} u(t-3)$ , de modo que

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 - e^{-(t-1)} & 1 < t < 2 \\ e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} & 2 < t < 4 \\ e^{-(t-4)} + e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} - 1 & 4 < t < 5 \\ e^{-(t-4)} - e^{-(t-1)} + e^{-(t-2)} - e^{-(t-5)} & t > 5 \end{cases}$$

2)  $y(t) = y_a(t) - y_a(t-1)$

11. a)  $t_5 = t_1 + t_3$  y  $t_6 = t_2 + t_4$

$$b) y(t) = \begin{cases} 0 & t < 3T \\ t - 3T & 3T < t < 4T \\ T & 4T < t < 6T \\ -t + 7T & 6T < t < 7T \\ 0 & t > 7T \end{cases}$$

12. No es lineal.

13. No es invariante.

17. a)  $x_1(t) * x_2(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

b)  $h(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-t}) u(t)$

c)  $H(jw) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2+jw} + \frac{1}{1+jw})$

$$18. a) y(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3 < t < 5 \\ \frac{e^{-3(t-5)}-e^{-3(t-3)}}{3} & t > 5 \end{cases}$$

b)  $g(t) = e^{-3(t-3)} u(t-3) - e^{-3(t-5)} u(t-5)$

c)  $g(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial t}$