Ingeniería Informática

Medios de Transmisión (MT)

Problemas del tema 7

Introducción a procesos estocásticos

Curso 2008-09

18/12/2008

Enunciados

1. Determine cual de las siguientes funciones tiene las propiedades de una función de autocorrelación

   a) $R_x(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| < 1 \\ 0 & |\tau| > 1 \end{cases}$

   b) $R_x(\tau) = \delta(\tau) + sen\ \omega_o\tau$

   c) $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$

   d) $R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & |\tau| < 1 \\ 0 & |\tau| > 1 \end{cases}$

2. Determine cual de las siguientes funciones tienen las propiedades de una densidad espectral de potencia

   a) $G_x(\omega) = \delta(\omega) + cos^2\ \omega$

   b) $G_x(\omega) = 10 + \delta(\omega - 20\pi)$

   c) $G_x(\omega) = exp(-|\omega - 20\pi|)$

   d) $G_x(\omega) = exp(-(\omega - 20\pi)^2)$

3. La densidad espectral de potencia de un proceso estocástico $x(t)$ viene dada por $G_x(\omega) = 10^{-6}\omega^2$.

   a) Determine la potencia de $x(t)$ contenida en la banda de frecuencias de 0 a 5×10^3 rad/seg .

   b) Determine la potencia de $x(t)$ contenida en la banda de frecuencias de 5×10^3 a 6×10^3 rad/seg.

4. Determine la función de autocorrelación de un proceso estocástico cuya densidad espectral de potencia viene dada por la expresión

$$G_x(\omega) = e^{-2|\omega|} + 0{,}7\pi\delta(\omega) + 1{,}2\pi\delta(\omega - \omega_o) + 1{,}2\pi\delta(\omega + \omega_o) \quad (1)$$

5. Un proceso estocástico $x(t)$ tiene una densidad espectral de potencia $G_x(\omega)$. Hallar la densidad espectral de potencia de otro proceso estocástico $y(t) = x(t) - x(t-T)$

6. Un ruido blanco con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$ entra a un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte B Hz.

   a) Calcule la potencia del ruido a la salida del filtro

   b) Calcule la función de autocorrelación del ruido a la salida del filtro.

7. Un proceso estocástico estacionario $x(t)$ tiene una función de autocorrelación dada por

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \quad (2)$$

   a) Calcule y dibuje la densidad espectral de potencia $x(t)$

b) Calcule la función de autocorrelación de $y(t) = x(t)\ cos(\omega_0 t)$ ¿Es $y(t)$ estacionario?

8. Un ruido $x(t)$ blanco, de media nula y densidad espectral de potencia $N_o/2$ es filtrado por un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t)$. Calcule la potencia del ruido a la salida cuando

   a) $h(t) = \dfrac{sen(2\pi Bt)}{\pi t}$

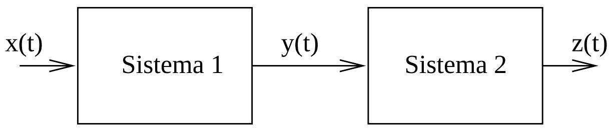
   b) $h(t) = \dfrac{2\ sen(2\pi Bt)}{\pi t}\ cos\ \omega_0 t$

9. Un ruido blanco de media nula $x(t)$ y densidad espectral de potencia $G_x(\omega) = \frac{N_o}{2}$ entra a un sistema lineal e invariante en el tiempo de respuesta al impulso $h(t) = e^{-t}\ u(t)$ para producir una salida $y(t)$.

   a) Calcule $G_y(\omega)$, la densidad espectral de potencia de $y(t)$

   b) Calcule $R_y(\tau)$, la función de autocorrelación de $y(t)$

10. Sea $x(t)$ un ruido blanco gaussiano de densidad espectral de potencia $\frac{N_o}{2}$. Este ruido entra a la conexión en serie de dos sistemas LTI mostrada en la figura

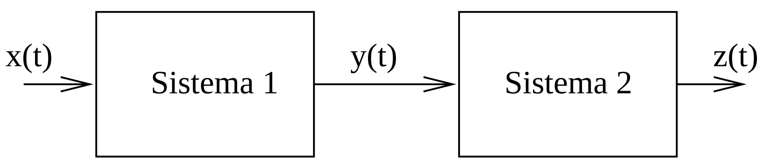


El primer sistema viene especificado por la relación entrada salida $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ y el segundo por la respuesta al impulso $h(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$

   a) Calcule la densidad espectral de potencia del ruido a la salida del segundo sistema.

   b) Calcule la potencia del ruido del apartado anterior.

11. Sea $x(t)$ un ruido blanco gaussiano de densidad espectral de potencia $\frac{N_o}{2}$. Este ruido entra a la conexión en serie de dos sistemas LTI mostrada en la figura



La respuesta al impulso del primer sistema es

$$h_1(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$

y la del segundo es

$$h_2(t) = \frac{sen \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t}$$

a) Calcule la respuesta al impulso del sistema resultante.

b) Calcule la respuesta en frecuencia del sistema resultante.

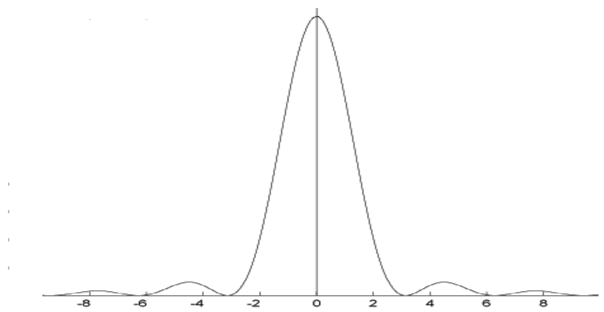
c) Calcule la densidad espectral de potencia del ruido $z(t)$ a la salida del segundo sistema.

d) Calcule la potencia del ruido $z(t)$.

e) Calcule la función de autocorrelación del ruido $z(t)$.

Soluciones

1. *a)* Si
   b) No
   c) Si
   d) Si
2. *a)* Si
   b) Si
   c) Si
   d) Si
3. *a)* $P_1 = 6{,}6315{,}10^3$ watios
   b) $P_2 = 4{,}83{,}10^3$ watios
4. $R_x(t) = \dfrac{2}{\pi(4+t^2)} + 0{,}35 + 1{,}2\cos\omega_0 t$
5. $G_y(\omega) = G_x(\omega)|H(\omega)|^2 = (2 - 2\cos\omega t)G_x(\omega)$
6. *a)* $P_y = N_0 B$
   b) $R_y(\tau) = N_0 \dfrac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi\tau}$
7. *a)* $G_x(\tau) = \frac{4\sin^2\frac{\omega T}{2}}{T\omega^2}$



   b) $R_y(\tau) = \dfrac{1}{2}R_x(\tau)[\cos\omega_0\tau + \cos(2\omega_0 t + \tau)]$
   No es estacionario
8. *a)* $P_y = N_0 B$
   b) $P_y = 2N_0 B$
9. *a)* $G_y(\omega) = \dfrac{N_0}{2}\dfrac{1}{1+\omega^2}$
   b) $R_y(\tau) = \dfrac{N_0}{4}e^{-|\tau|}$

10. *a*) $G_x(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}\omega^2 & -\pi < \omega < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

b) $\sigma_z^2 = \dfrac{N_0}{2}\dfrac{\pi^2}{3}$

11. *a*) $h(t) = h_2(t) + h_2(t-T)$ donde $h_2(t) = \dfrac{\sin \frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}$

b) $H(\omega) = \begin{cases} T(1+e^{-j\omega T}) & -\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

c) $H(\omega) = \begin{cases} N_0 T^2(1+\cos\omega T) & -\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

d) $\sigma_z^2 = N_0 T$

e) $R_z(\tau) = N_0 T^2 r(\tau) + \dfrac{N_0 T^2}{2} r(\tau - T) + \dfrac{N_0 T^2}{2} r(\tau + T)$ donde $r(\tau) = \dfrac{\sin \frac{\pi}{T}\tau}{\frac{\pi}{T}\tau}$