Ingeniería Informática

Medios de Transmisión

Fórmulas para el examen

Curso 2007-08

6/02/2008

- Propiedades de $\delta(t)$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$
  - $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$
  - $x(t)\delta(t-t_o) = x(t_o)\delta(t-t_o)$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_o)dt = x(t_o)$
  - $\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$
- Convolución
  - $x(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$
  - $y(n) = x(n) * h(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$
  - $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)$
  - $y(t) = x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)$
- Propiedades de la convolución
  - Conmutativa: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
  - Asociativa: $(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$
  - Distributiva respecto de la suma: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$
  - Elemento Unitario: $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$
- Propiedades de los sistemas LTI
  - No memoria $\Longleftrightarrow h(t) = k\delta(t)$
  - Invertibilidad $\Longleftrightarrow h(t) * h_{inv}(t) = \delta(t)$
  - Causalidad $\Longleftrightarrow h(t) = 0$ para $t < 0$
  - Estabilidad $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$
- Transformada de Fourier
  - Ecuación de análisis: $X(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

- Ecuación de síntesis: $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

- Transformada de Fourier de señales muestreadas: sea $x(t)$ una señal contínua y sea $p(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ un tren de deltas de periodo T. La TF de $x_p(t) = x(t)p(t)$ es

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

- Función de autocorrelación de una señal determinista x(t)
  - Definición: $R_x(t) = x(t) * x^*(-t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t+\tau)d\tau$
  - Propiedades:
    - $R_x(0) = E_x$
    - $R_x(t) = R_x^*(-t)$
    - $|R_x(t)| \leq R_x(0)$
    - $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow R_y(t) = R_x(t) * R_h(t)$

- Densidad espectral de energía
  - Definición $\Psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2$
  - Propiedades:
    - $\Psi_x(\omega)$ es una función real y positiva.
    - Si $x(t)$ es real $\Rightarrow \Psi_x(\omega) = \Psi_x(-\omega)$ ($\Psi_x(\omega)$ es simétrica)
    - $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow \Psi_y(\omega) = \Psi_x(\omega)|H(\omega)|^2$

- Tren de pulsos PAM

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k p(t - kT), \quad I_k \in \mathcal{A} = \{A_i = 2i + 1 - M, \quad i = 0, \cdots, M-1\}$$

- Pulsos de Nyquist

$$p(t) = \frac{sen\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$$

- Función de autocorrelación de una señal real aleatoria $x(t)$:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

- Densidad espectral de Potencia de una señal aleatoria $x(t)$

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Transmisión de señales binarias en ruido gaussiano

  - Probabilidad de error general:

  $$P_e = Q\left(\frac{a_0 - a_1}{2\sigma_o}\right)$$

  donde a_0 y a_1 son las observaciones a la salida del filtro en ausencia de ruido y σ_o^2 es la potencia del ruido a la salida del filtro.

  - Filtro adaptado $h_{opt}(t) = k[s_0(T-t) - s_1(T-t)]$ donde k es un constante real arbitraria.

  - Probabilidad de error cuando se utiliza el filtro adaptado

  $$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_o}}\right)$$

  donde $E_d = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (s_0(t) - s_1(t))^2 dt$.

  - Energía de bit: $E_b = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt$

  - Producto escalar normalizado: $\rho = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_1(t) dt}{E_b}$

  - Probabilidad de error cuando se utiliza el filtro adaptado y ambos símbolos tienen la misma energía

  $$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}(1-\rho)}\right)$$

- Función error complementario

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

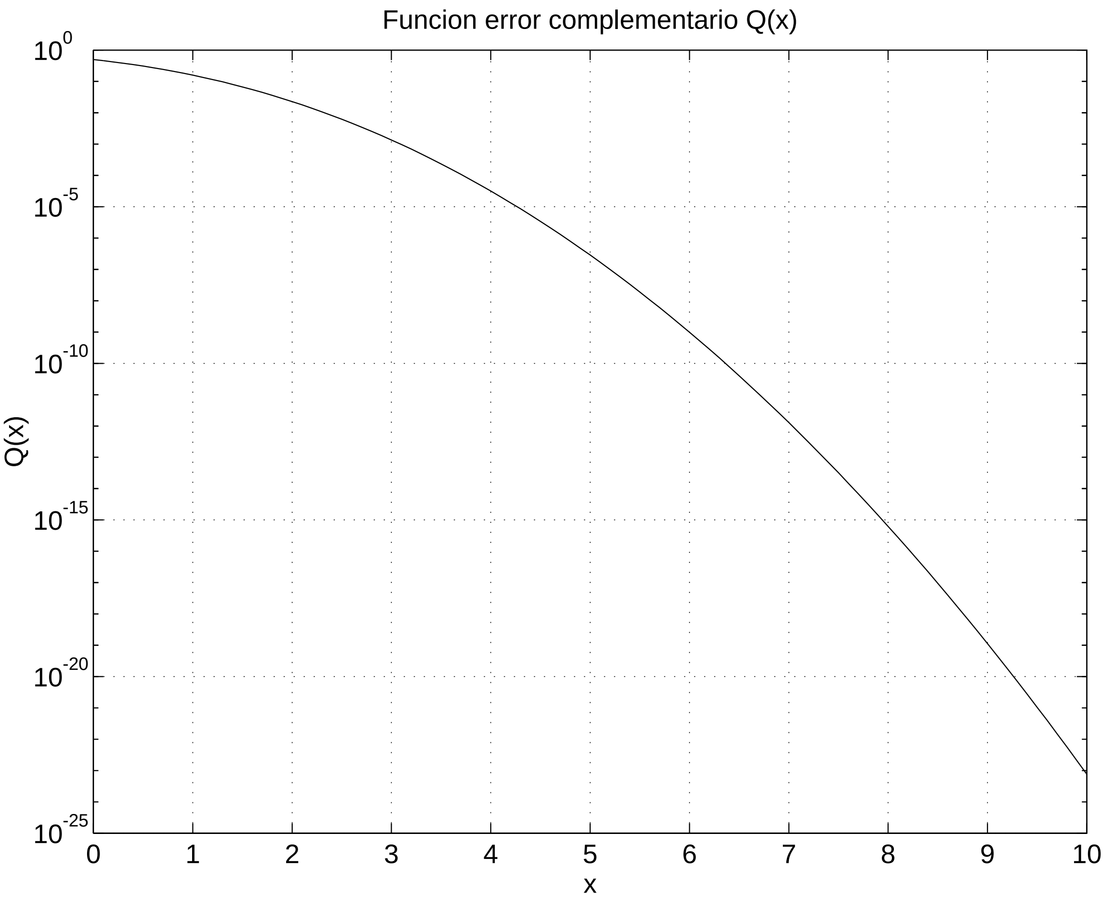

Figura 1: Función error complementario.

Señal	Transfornada de Fourier
$x(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$	$X(\omega) = \dfrac{1}{a + j\omega}$
$x(t) = e^{-a\|t\|}$ con $a > 0$	$X(\omega) = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \|t\| < T \\ 0 & \|t\| > T \end{cases}$	$X(\omega) = \dfrac{2\sin \omega T}{\omega}$
$x(t) = \dfrac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \|\omega\| < W \\ 0 & \|\omega\| > W \end{cases}$
$x(t) = e^{-at^2}$ con $a > 0$	$X(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$x(t) = \delta(t)$	$X(\omega) = 1$
$x(t) = \delta(t - t_0)$	$X(\omega) = e^{-j\omega t_0}$
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$X(\omega) = \dfrac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \dfrac{2\pi k}{T}\right)$
$x(t) = u(t)$	$X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$x(t) = \dfrac{1}{2\pi(a - jt)}$ con $a > 0$	$X(\omega) = e^{-a\omega}u(\omega)$
$x(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2 + t^2)}$ con $a > 0$	$X(\omega) = e^{-a\|\omega\|}$
$x(t) = 1$	$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$
$x(t) = te^{-at}$ con $a > 0$	$X(\omega) = \dfrac{1}{(a + j\omega)^2}$
$x(t) = \dfrac{1}{2}\delta(t) + \dfrac{j}{2\pi t}$	$X(\omega) = u(\omega)$
$x(t) = e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$x(t) = \cos \omega_0 t$	$X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$x(t) = \sin \omega_0 t$	$X(\omega) = \dfrac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \dfrac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$

Cuadro 1: Transformada de Fourier de algunas señales básicas

Propiedad	Señal	Transfornada de Fourier
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(\omega) + bY(\omega)$
Inversión en tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Conjugación en tiempo	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Escalado en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Derivación en tiempo	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Integración en tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Conjugación en frecuencia	$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Derivación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integración en frecuencia	$-\frac{1}{jt} + \pi x(0)\delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\omega} X(\eta)d\eta$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$	

Cuadro 2: Propiedades de la transformada de Fourier