Práctica 2
Medios de Transmisión
Convolución

5 al 9 de Noviembre del 2007

El objetivo de esta práctica es la familiarización con la secuencia de pasos que permite calcular gráficamente la convolución de dos señales discretas de duración finita.

La *respuesta al impulso* de un sistema es la salida que produce dicho sistema cuando a la entrada se tiene el impulso unidad. La respuesta al impulso es especialmente importante cuando el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI, Linear Time Invariant) porque proporciona toda la información necesaria para calcular la salida ante cualquier entrada. La salida, $y(n)$, se obtiene convolucionando la entrada $x(n)$ con la respuesta al impulso del sistema $h(n)$. Esta operación se define como

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

donde el símbolo $*$ denota convolución.

La convolución de dos señales puede efectuarse gráficamente realizando la siguiente secuencia de pasos:

- Dibujar $x(k)$
- Dibujar $h(n-k)$ interpretándola como una señal en la variable independiente k y considerando n como un parámetro de desplazamiento. Dado que $h(n-k) = h(-(k-n))$, esta señal es una versión invertida en el tiempo de $h(k)$ que posteriormente ha sido desplazada n muestras respecto al eje k. Así pues, $h(n-k)$ se obtiene reflejando $h(k)$ sobre el eje k alrededor del punto $k = 0$ para construir $h(-k)$ y después desplazándola $|n|$ muestras a la izquierda si n es negativo o n muestras a la derecha si n es positivo.
- Multiplicar $x(k)$ y $h(n-k)$
- Sumar respecto a k la señal producto $x(k)h(n-k)$

En el anexo de la práctica aparece el código de MATLAB correspondiente a un programa que hace la convolución entre dos señales de duración finita. Por razones de simplicidad, se ha supuesto que las dos señales comienzan en cero y que Lx y Lh son la duración de $x(n)$ y $h(n)$ respectivamente. Por consiguiente, en el programa se supone que $x(n)$ se extiende entre 0 y $Lx-1$ y que $h(n)$ se extiende entre 0 y $Lh-1$.

1. Demuestre que con las suposiciones anteriores sobre las duraciones de $x(n)$ y $h(n)$ la señal $y(n) = x(n) * h(n)$ comienza en 0 y acaba en $Lx + Lh - 2$ (su duración, por tanto, es $Lx + Lh - 1$).

2. Escriba en un fichero el programa *convolucion.m* que aparece al final del enunciado. Utilice la instrucción *help* para consultar el funcionamiento y la sintaxis de aquellas funciones de MATLAB que no conozca. Haga la convolución entre las dos siguientes señales

$$\begin{aligned} x(n) &= [1\ 2\ 1\ 1] \\ h(n) &= [1\ \ -1\ 1] \end{aligned}$$

3. Considere las siguientes señales

   - $x_1(n) = [1\ 4\ 2\ 3\ 5\ 3\ 3\ 4\ 5\ 7\ 6\ 9]$
   - $x_2(n) = [1\ 1]$
   - $x_3(n) = [1\ 2\ 1]$
   - $x_4(n) = [\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$
   - $x_5(n) = [\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}]$
   - $x_6(n) = [\frac{1}{4}\ \frac{-1}{2}\ \frac{1}{4}]$
   - $x_7(n) = [\frac{1}{2}\ \frac{-1}{2}]$

   Modifique el programa del apartado anterior para efectuar las siguientes convoluciones y observe los resultados obtenidos

   a) $x_1(n) * x_2(n)$
   b) $x_1(n) * x_4(n)$. Compare con el apartado anterior y vea que es lo mismo pero multiplicado por $\frac{1}{2}$.
   c) $x_1(n) * x_7(n)$. Compare con el apartado anterior.
   d) $x_1(n) * x_3(n)$
   e) $x_1(n) * x_5(n)$. Compare con el apartado anterior y vea que es lo mismo pero multiplicado por $\frac{1}{4}$.
   f) $x_1(n) * x_6(n)$. Compare con el apartado anterior.

4. Ahora considere estas señales

   - $x_8(n) = u(n) - u(n-5)$
   - $x_9(n) = u(n) - u(n-10)$
   - $x_{10}(n) = \left(\frac{7}{8}\right)^n (u(n) - u(n-15))$
   - $x_{11}(n) = sen\left(\frac{\pi n}{12} + \frac{\pi}{4}\right)(u(n) - u(n-36))$

   Vuelva a modificar el programa anterior para efectuar las siguientes convoluciones y observe los resultados obtenidos *a)* $x_8(n) * x_8(n)$

b) $x_9(n) * x_9(n)$

c) $x_8(n) * x_9(n)$

d) $x_8(n) * x_9(n-3)$. Compare con el apartado anterior y vea que es lo mismo pero desplazado 3 unidades.

e) $x_8(n-2) * x_9(n-4)$. Compare con los dos apartados anteriores y vea que es lo mismo pero el resultado esta desplazado.

f) $x_{11}(n) * x_8(n)$

g) $x_{11}(n) * x_9(n)$. Compare con el apartado anterior y vea que es lo mismo pero el resultado esta desplazado.

h) $x_{11}(n) * x_{10}(n)$. Compare con los dos apartados anteriores.

i) $x_{10}(n) * x_9(n)$

j) $x_{10}(n) * x_{10}(n)$

5. La convolución tiene las siguientes propiedades:

   - Conmutativa: $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$
   - Distributiva: $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$
   - Asociativa: $[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$

   Verifique que estas propiedades se cumplen efectuando las convoluciones de los dos lados de las siguientes igualdades:

   a) $x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$

   b) $x_3(n) * [x_1(n) + x_2(n)] = x_3(n) * x_1(n) + x_3(n) * x_2(n)$

   c) $[x_1(n) * x_2(n)] * x_4(n) = x_1(n) * [x_2(n) * x_4(n)]$