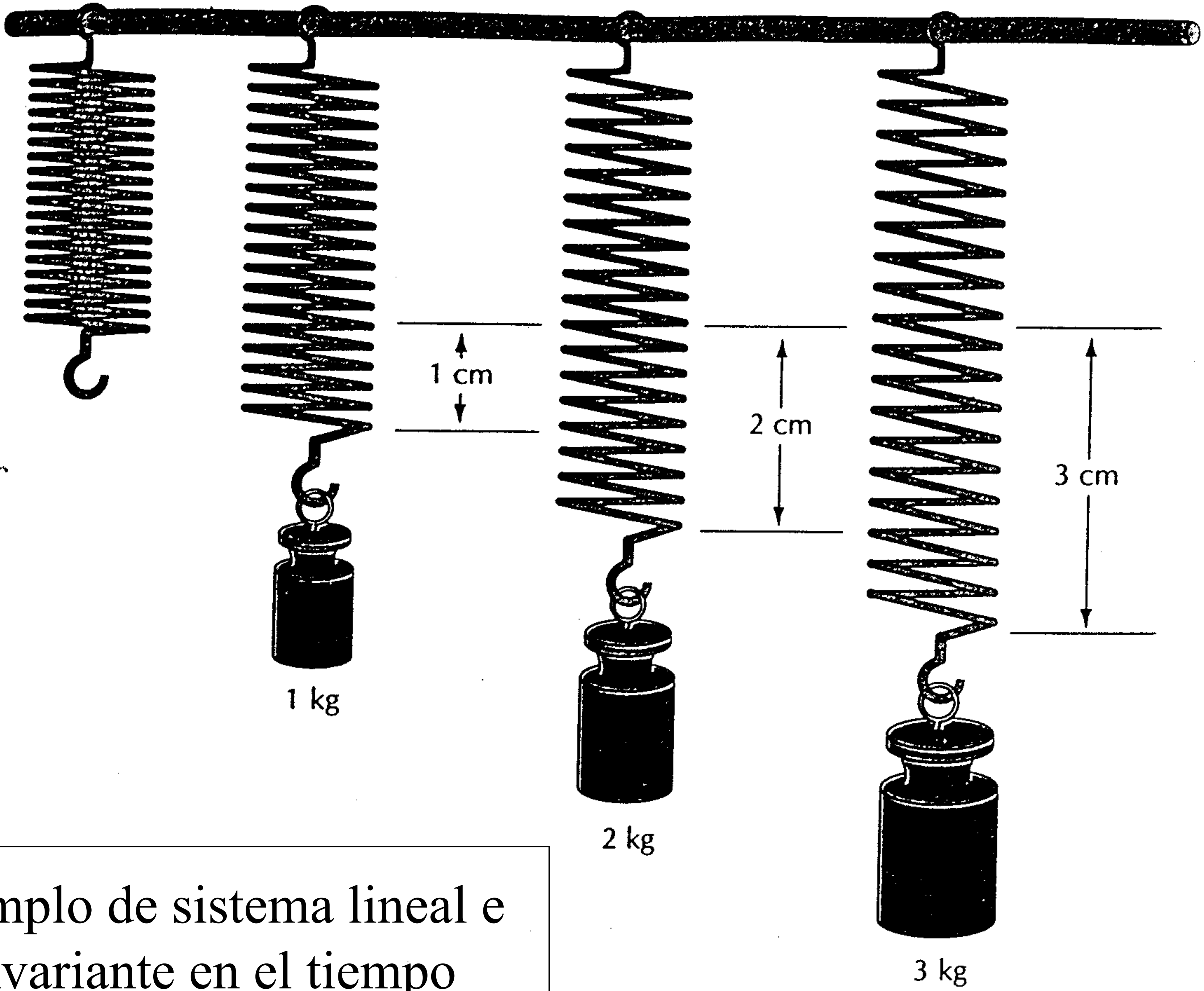
Ingeniería Informática

Medios de Transmisión (MT)

Tema 3
Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

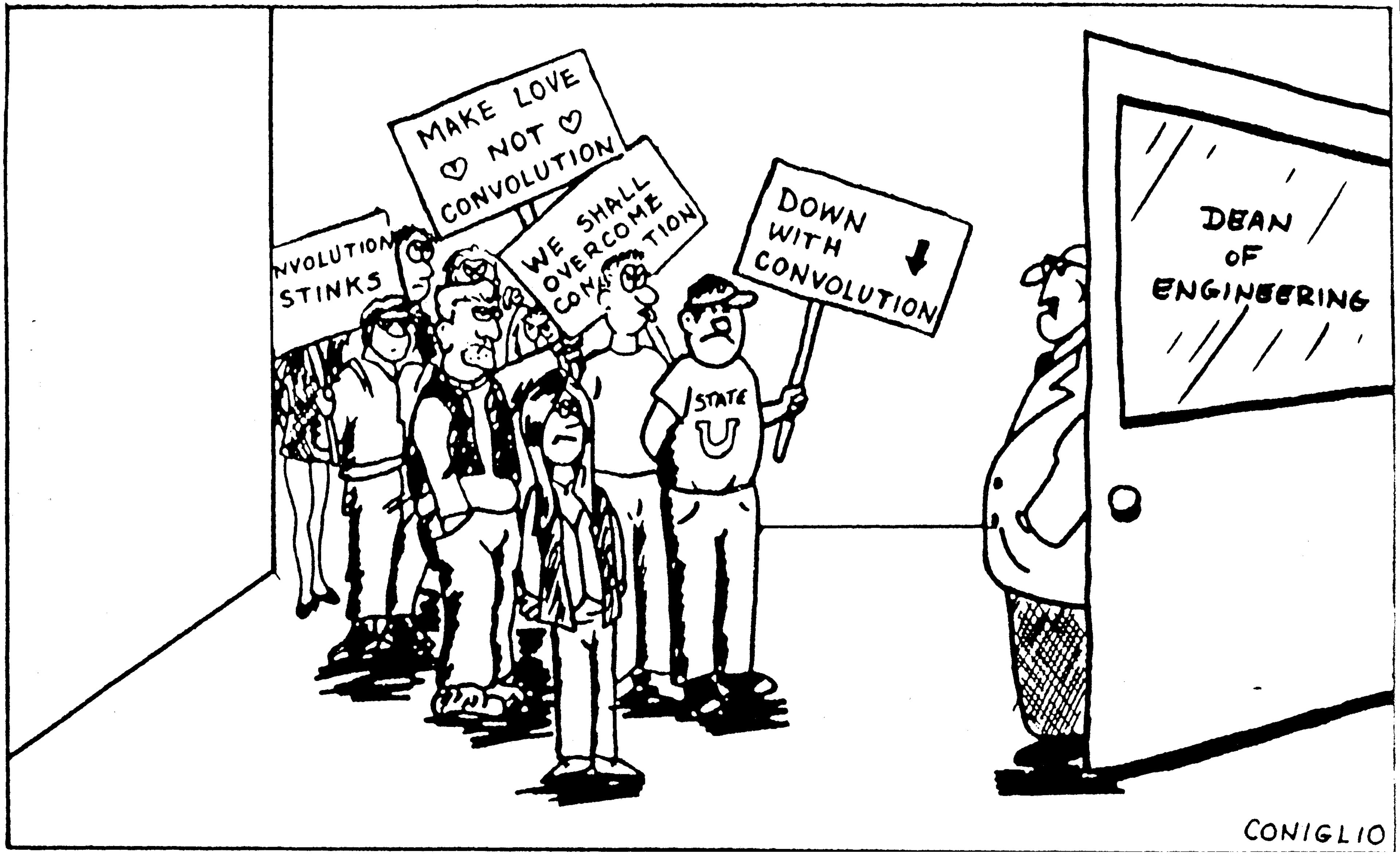
Curso 2009-10



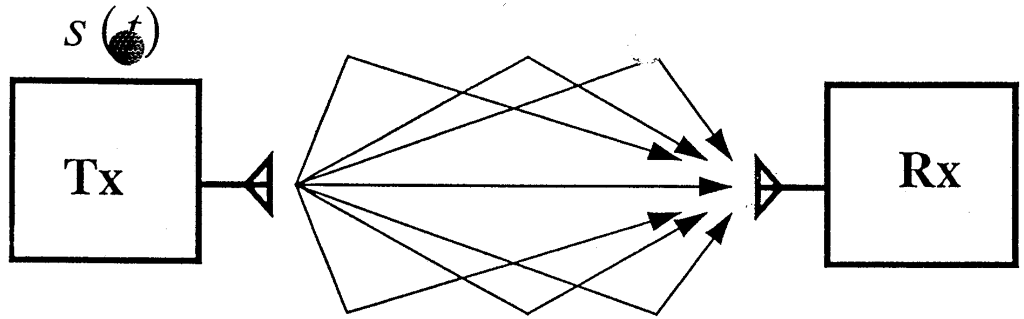
Ejemplo de sistema lineal e invariante en el tiempo

Se ilustra aquí una relación lineal mediante

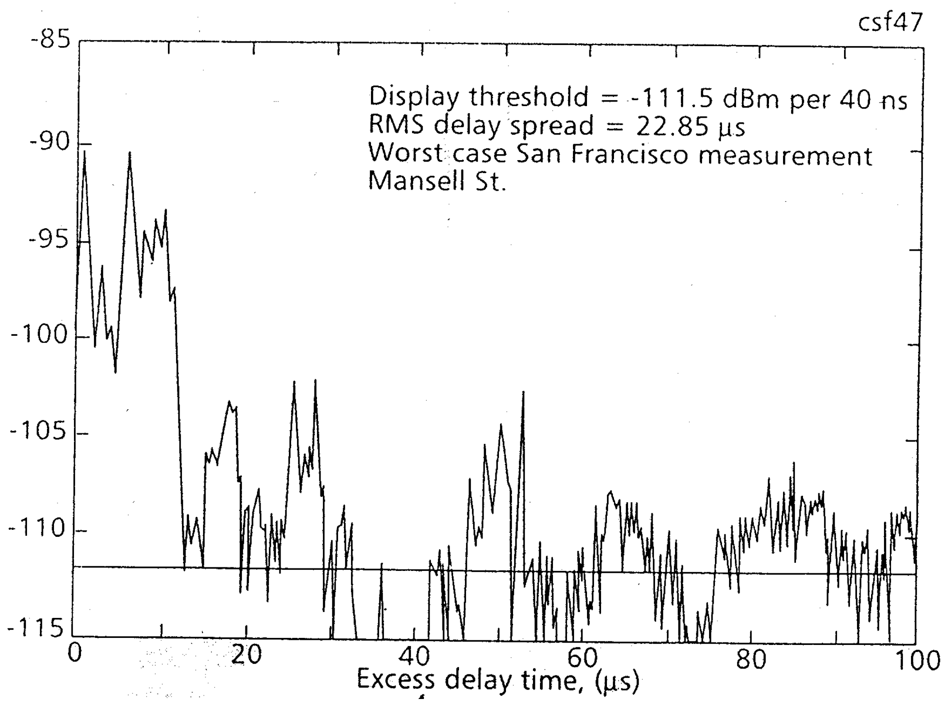
La convolución es una operación intrincada



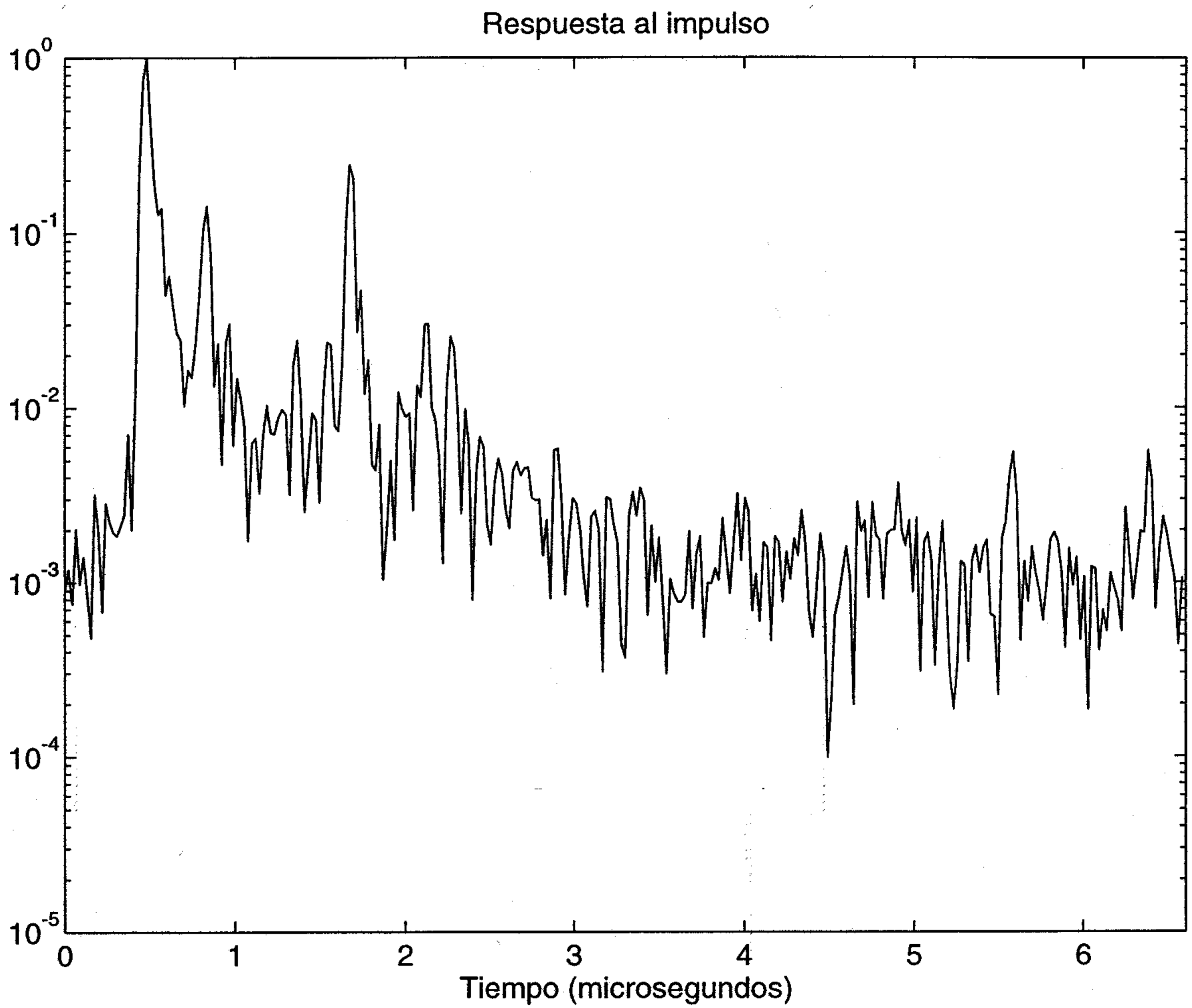
Respuesta al Impulso de un Radiocanal de Telefonía Móvil



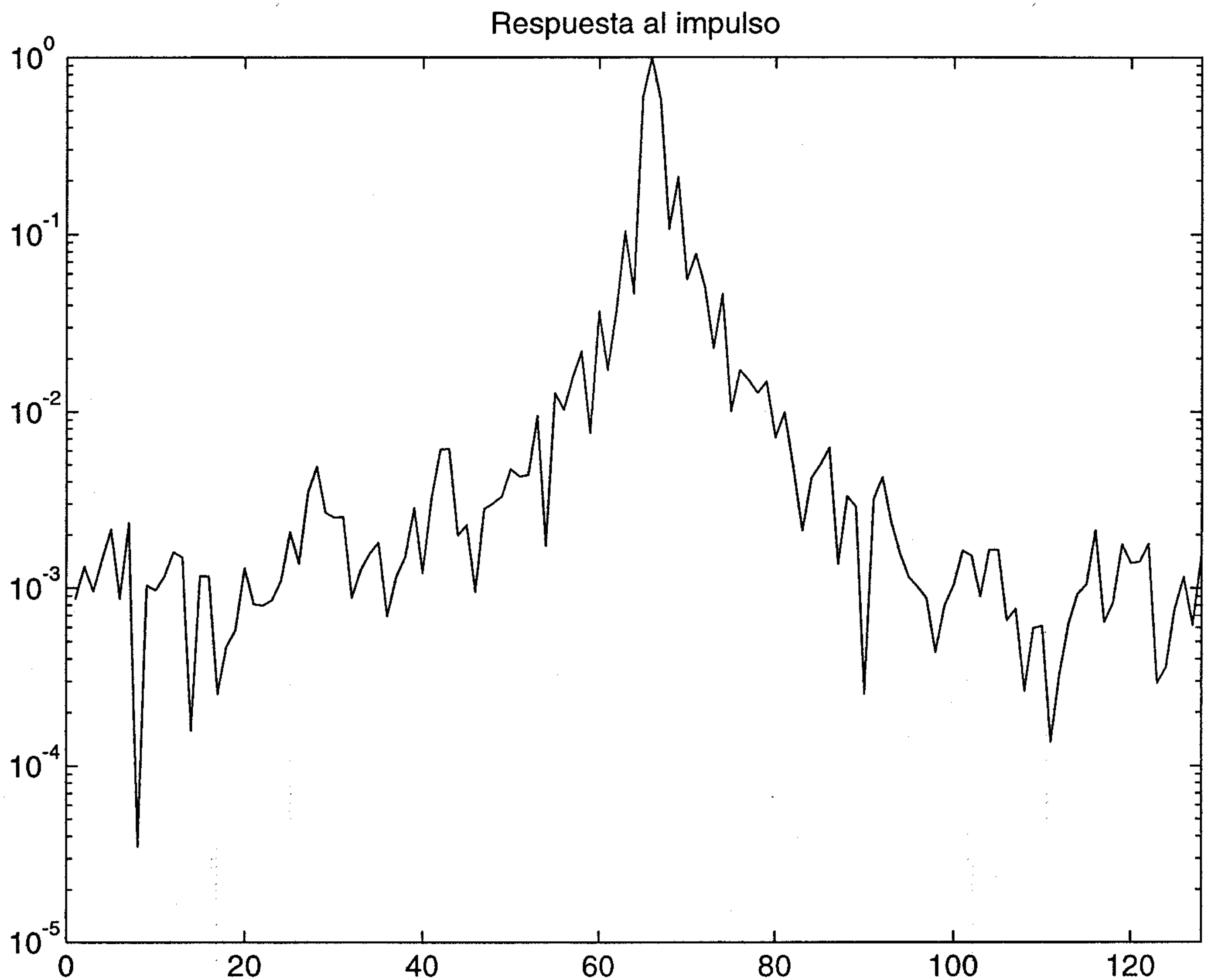
Ejemplo de respuesta al impulso



Respuesta al Impulso de un Canal de Radio de Microondas



Respuesta al Impulso de un Cable Coaxial



Propiedades de la convolución

- Propiedad conmutativa:

$$x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$$

- Propiedad distributiva respecto de la suma:

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

- Propiedad asociativa:

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t) = x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

- Elemento unitario:

$$x(t)*\delta(t) = \delta(t)*x(t) = x(t)$$

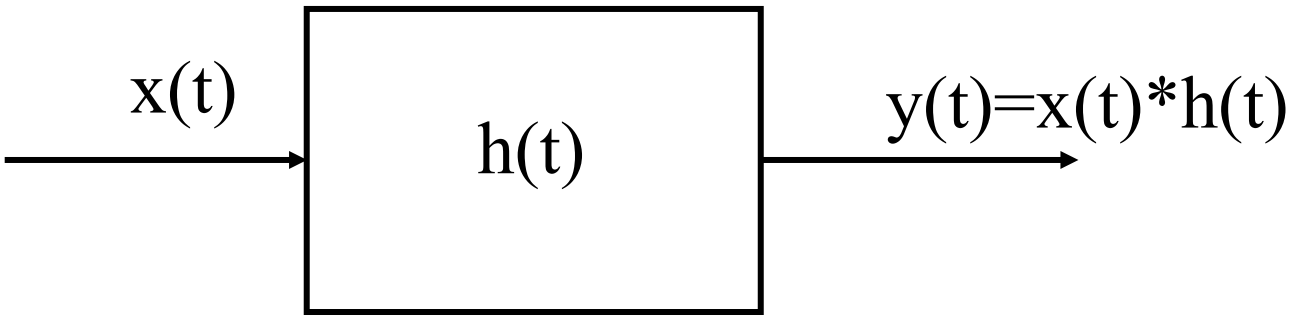
- Elemento neutro:

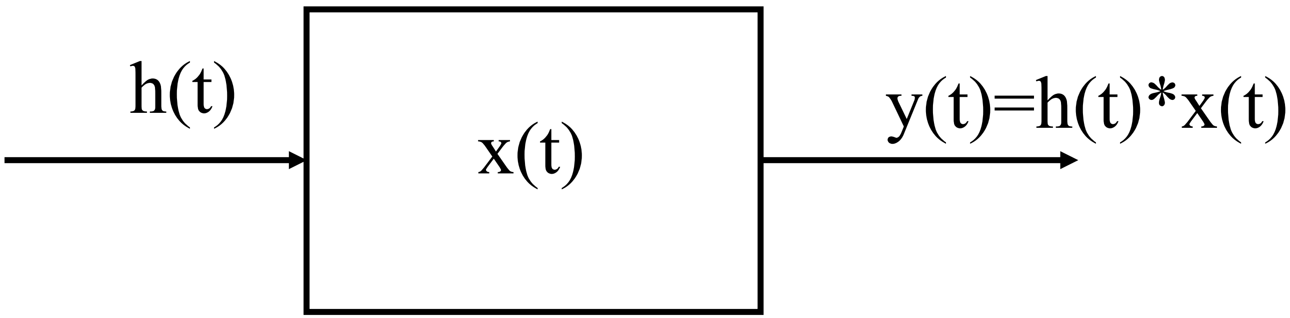
$$x(t)*0 = 0*x(t) = 0$$

¡La convolución tiene propiedades similares a las de un producto!

Propiedad conmutativa

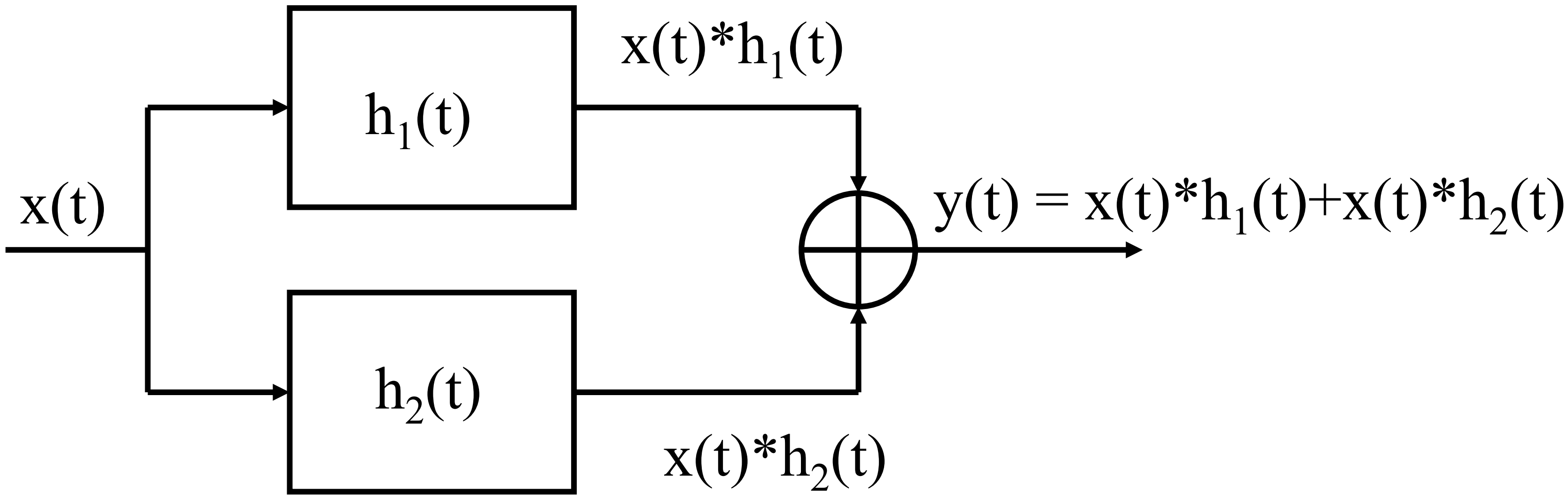
$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$$

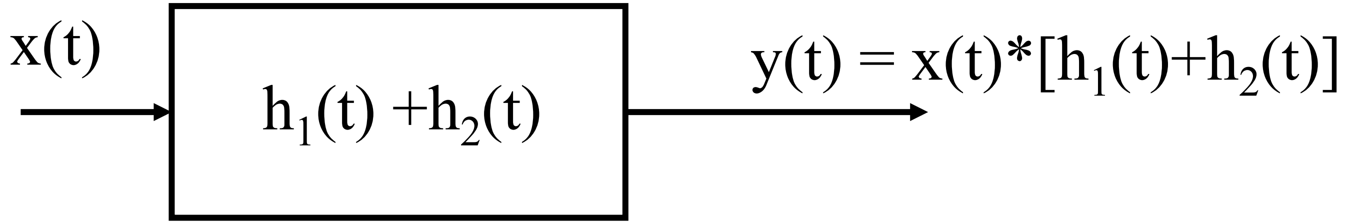




Propiedad distributiva

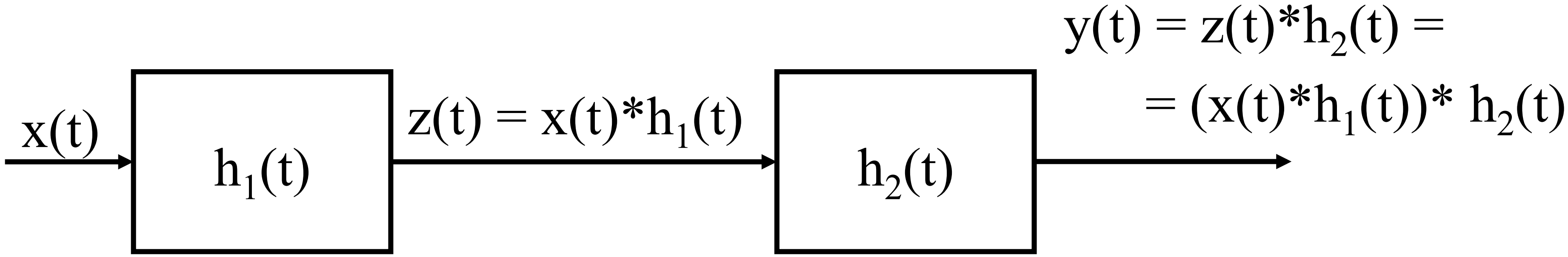
$$\boxed{x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)}$$

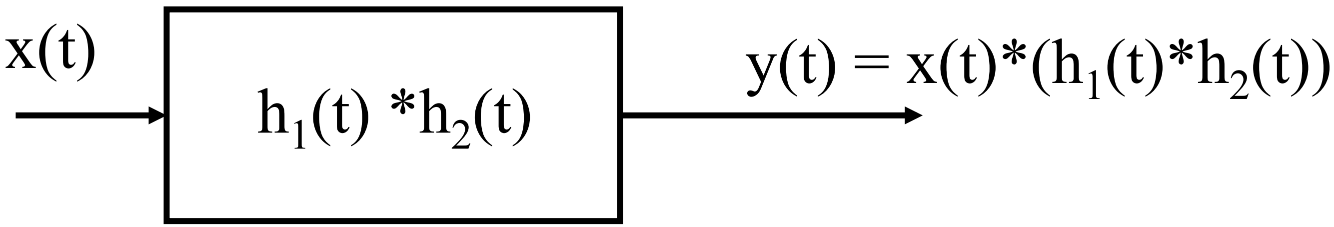




Propiedad asociativa

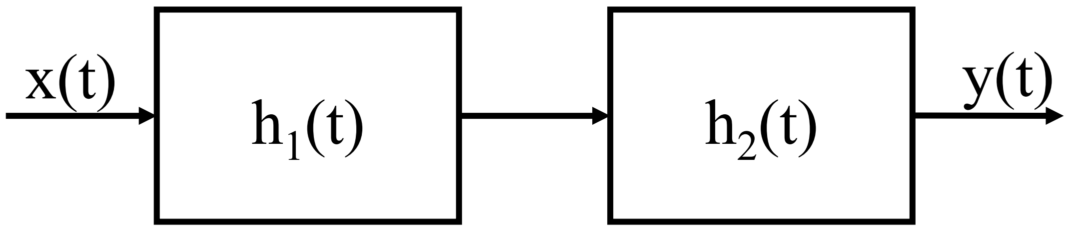
$$\boxed{\left(x(t) * h_1(t)\right) * h_2(t) = x(t) * \left(h_1(t) * h_2(t)\right)}$$

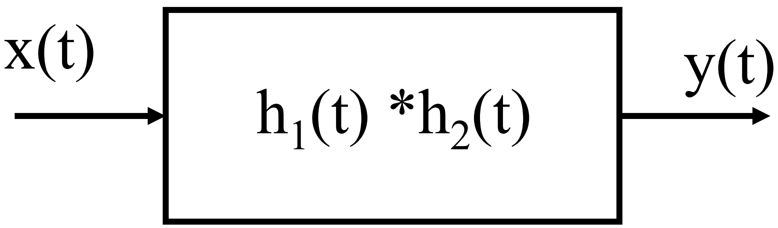




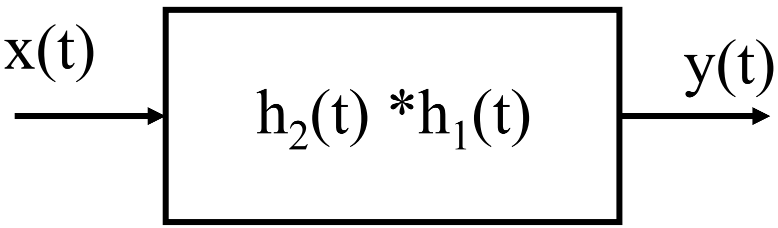
Orden interconexión en serie (I)

El orden de interconexión en serie de dos sistemas LTI es irrelevante

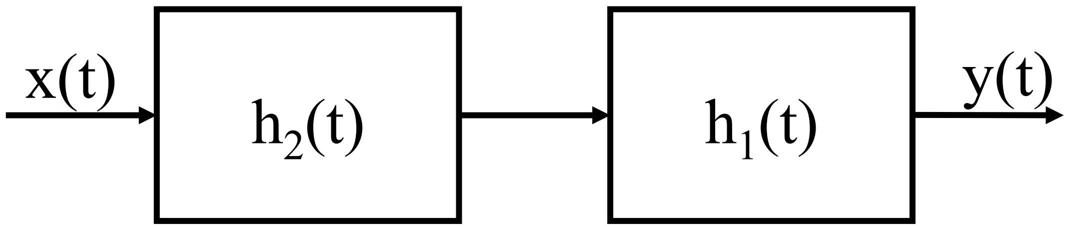




Asociativa



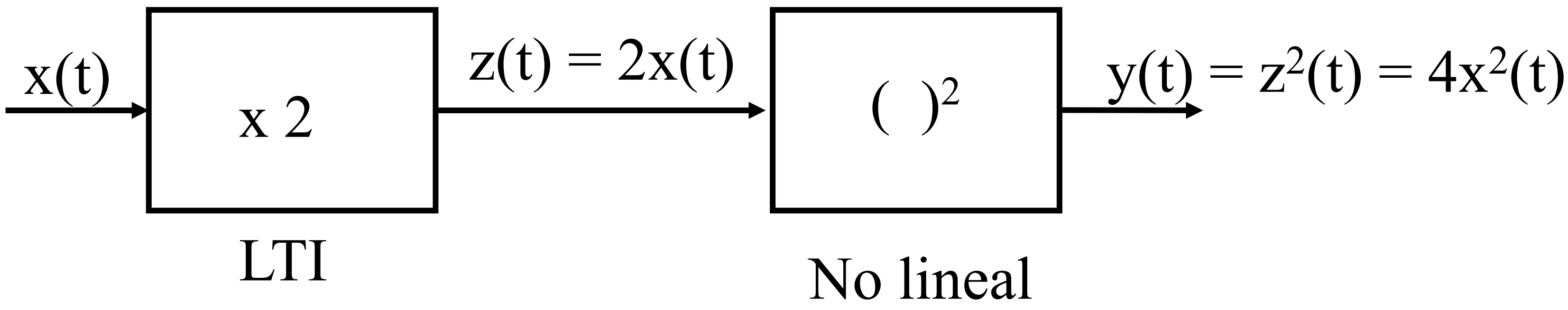
Conmutativa

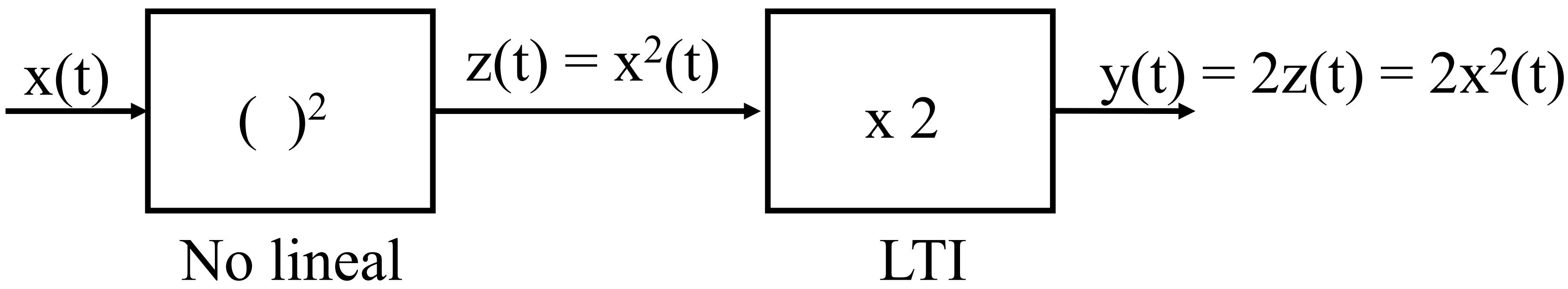


Asociativa

Orden interconexión en serie (II)

El orden es importante si alguno de los sistemas no es LTI





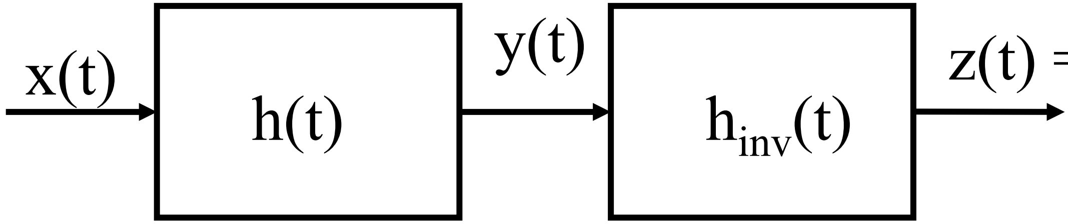
Propiedades de los sistemas LTI

Los sistemas LTI se caracterizan completamente a través de su respuesta al impulso, h(t). Por tanto, examinando h(t) podemos determinar qué propiedades tiene el sistema. A continuación vamos a analizar las siguientes propiedades de los sistemas LTI

- Invertibilidad
- Causalidad
- Memoria
- Estabilidad

Invertibilidad de sistemas LTI

Si un sistema LTI es invertible, su inverso también es LTI



$z(t) = x(t)*h(t)*h_{inv}(t) = x(t)$

La condición de invertibilidad de sistemas LTI es

$h(t)*h_{inv}(t) = \delta(t)$ contínuo

$h(n)*h_{inv}(n) = \delta(n)$ discreto

Causalidad de sistemas LTI

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) =$$

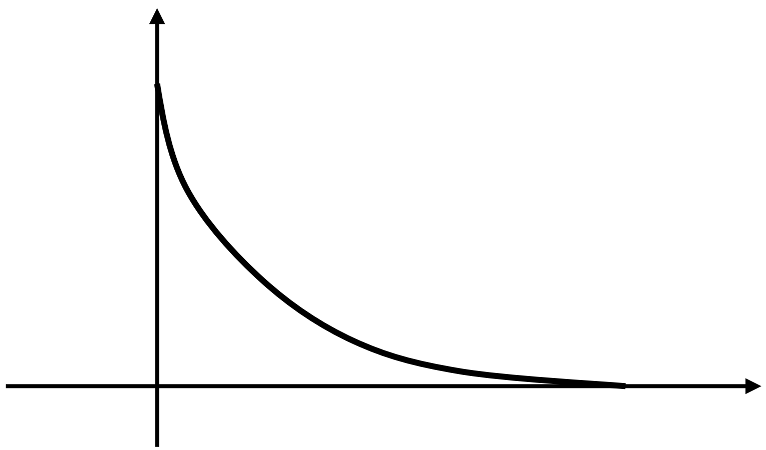
$$= \underbrace{\cdots h(-1)x(n+1)}_{\text{futuro}} + \underbrace{h(0)x(n)}_{\text{presente}} + \underbrace{h(1)x(n-1) + \cdots}_{\text{pasado}}$$

Un sistema LTI discreto es causal $\Leftrightarrow$ h(n) = 0 para n < 0

Un sistema LTI contínuo es causal $\Leftrightarrow$ h(t) = 0 para t < 0

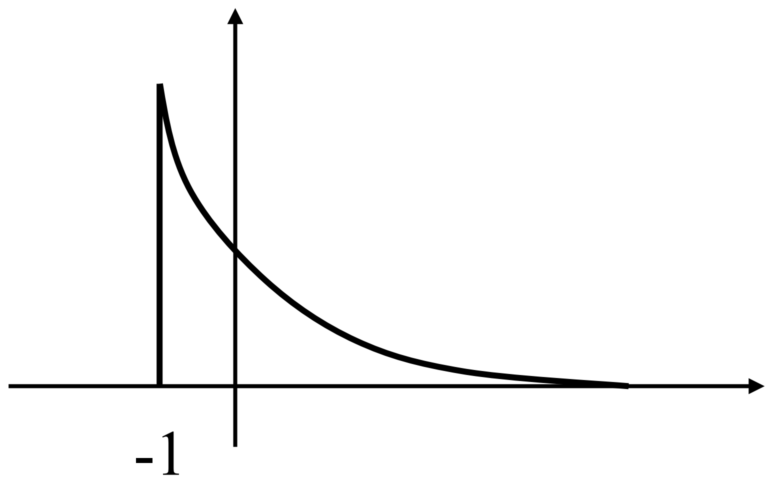
Causalidad de sistemas LTI: ejemplo

$h(t) = e^{-at}\, u(t)$



Sistema LTI causal

$h(t) = e^{-at}\, u(t+1)$



Sistema LTI no causal

Memoria de sistemas LTI

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) =$$

$$= \cdots \underbrace{h(-1)x(n+1)}_{\text{futuro}} + \underbrace{h(0)x(n)}_{\text{presente}} + \underbrace{h(1)x(n-1) + \cdots}_{\text{pasado}}$$

Un sistema LTI discreto no tiene memoria $\Leftrightarrow$ h(n) = 0 para n $\neq$ 0

Esto significa que la respuesta al impulso de un sistema LTI sin memoria tiene la forma h(n) = k δ(n) $\Rightarrow$ y(n) = x(n) * k δ(n) = k x(n)

Un sistema LTI continuo no tiene memoria $\Leftrightarrow$ h(t) = k δ(t) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ y(t) = k x(t)

Estabilidad de sistemas LTI

Un sistema LTI discreto es estable $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|h(k)\right| < \infty$

Un sistema LTI discreto es estable $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt < \infty$

<u>Ejemplo</u>: sabemos que el sistema $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ es inestable

Se demuestra fácilmente que este sistema es LTI y que su respuesta al impulso es

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|u(t)\right| dt = \int_{0}^{\infty} 1dt = \infty \Rightarrow \text{sistema LTI inestable}$$