CAPITULO 1

CONJUNTOS DIFUSOS

- **Aspectos Generales de los Conjuntos Difusos**
- **Caracterización y Nomenclatura de los Conjuntos Difusos**
- **Estructura Algebraica de los Conjuntos Difusos**
- **Operaciones Algebraicas con Conjuntos Difusos**
- **Representación del Conocimiento y Razonamiento Difuso**
- **Resumen**
- **Textos Básicos**

1. CONJUNTOS DIFUSOS

El refranero español, rico como es en expresiones populares, nos ofrece un dicho que nos va a permitir introducir la idea de *conjunto difuso.* El refrán en cuestión es el siguiente: *En este mundo nada es verdad y nada es mentira, todo es según el color del cristal con que se mira*. Esta es precisamente la noción de conjuntos difusos, para los cuales la descripción de objetos y entidades del mundo real debe realizarse según los criterios lingüísticos propios de los seres humanos.

La mayoría de las declaraciones humanas son ambiguas, y esta ambigüedad es una característica esencial, no sólo del lenguaje, sino también de los procesos de clasificación, del establecimiento de taxonomías y jerarquías, y de los procesos de razonamiento en sí mismos.

Así, si definimos al "ser vivo" como una estructura molecular organizada, que nace, crece, se reproduce y muere, parece claro que una remolacha participa de todas y cada una de las características anteriores, y por lo tanto debe ser considerada como un ser vivo. Por el contrario, una lámina de mica no participa de todas las características anteriores, y en consecuencia no debe ser considerada como un ser vivo, pero... ¿cómo debemos considerar a un virus? Los virus tienen, a veces, una estructura molecular bien organizada -cuando encuentran un medio apropiado-, y en tal estado son capaces de reproducir su estructura molecular y hacer réplicas de sí mismos. En otras condiciones su estructura se desnaturaliza, y se convierten en conjuntos moleculares amorfos e inertes. Cuando vuelven a encontrar un medio apropiado, estos conjuntos moleculares vuelven a organizarse y, por decirlo de algún modo, *cobran vida*. En ningún caso debemos confundir el proceso -por supuesto muy simplificado- que hemos descrito en relación a los virus, con los procesos de *letargo* ni con los de *enquistamiento*. En los procesos de letargo simplemente se produce una disminución de la actividad metabólica del individuo, mientras que en los procesos de enquistamiento no tiene lugar una desorganización celular ni, por supuesto, una desorganización molecular. Los virus son pues entes ambiguos respecto al concepto de *ser vivo*: A veces actúan como tales, otras claramente se comportan como seres inertes. Si tuviésemos que responder categóricamente a la pregunta: ¿Considera usted al virus del mosaico del tabaco como un ser vivo?, probablemente la mejor respuesta sería un indeciso -y poco clarificador- "depende."

La dificultad para clasificar a un virus en el conjunto de los seres vivos surge de la propia definición del concepto de ser vivo. En otros casos, sin embargo, la dificultad aparece por cuestiones de carácter subjetivo. Así, caracterizar el conjunto de *mujeres guapas*[44] no es fácil -cada uno tendrá una idea distinta de los atributos que debe tener una mujer "abstracta" para ser considerada hermosa-, pero será todavía mucho más difícil decir si una mujer concreta es guapa o no. En este último caso aparecen matices subjetivos que desvirtúan la clasificación.

---

[44] Los autores no son en absoluto sexistas. Lo dicho para las mujeres puede ser igualmente aplicado a los hombres sin ninguna diferencia, a favor o en contra.

Por último, no sólo problemas de definición, o matices subjetivos, hacen difícil una clasificación categórica. En otras ocasiones incluso los contextos pueden modificar los criterios. Así, el concepto de *hombre alto* -que es intínsecamente ambiguo-, es notablemente diferente entre los habitantes de Estocolmo y entre los Pigmeos... ¡y lo grave del asunto es que probablemente ambos tengan razón!

De lo que acabamos de exponer se puede concluir rápidamente que los conjuntos ordinarios, en los que un elemento de un universo determinado pertenece o no pertenece al conjunto, no nos bastan para representar el conocimiento habitualmente empleado por los humanos, y mucho menos para *razonar* con él.

Las Matemáticas y la Inteligencia Artificial, atentas como siempre a problemas interesantes relacionados con las ciencias cognoscitivas, no podían quedar al margen de esta peculiaridad, y en 1965 Lofti Zadeh hizo públicos sus trabajos relacionados con este tema en su famoso artículo "Fuzzy Sets."

1.1. Aspectos Generales de los Conjuntos Difusos

Consideremos un universo cualquiera. Por ejemplo el universo formado por el conjunto N de los números naturales. Definamos un subconjunto A de N caracterizado por la siguiente descripción:

"*A* es el conjunto formado por los números naturales pares menores que diez"

El subconjunto A de N queda perfectamente definido del siguiente modo:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

Claramente:

$$2 \in A$$
$$3 \notin A$$
$$10 \notin A$$

En este caso no tenemos ningún problema para establecer el grado de pertenencia de un elemento del universo de discurso con respecto al subconjunto considerado.

Consideremos ahora el universo C caracterizado por la siguiente descripción:

"*C* es el conjunto formado por todos los seres humanos vivos",

y sea B un subconjunto de C caracterizado por la descripción:

"*B* es el subconjunto de *C* de hombres morenos y altos"

En este caso sí tenemos problemas a la hora de establecer el grado de pertenencia de un elemento del universo al subconjunto B considerado.

Claramente, un conjunto ordinario puede definirse como una colección de elementos. Si un elemento del universo está representado en la colección, el elemento en cuestión pertenece a dicho conjunto. En estos casos se puede decir que el grado de pertenencia de un elemento cualquiera del referencial[45] tiene un valor booleano, de forma que:

- Si el elemento pertenece al conjunto, el valor booleano es "1"

- Si el elemento no pertenece al conjunto, el valor booleano es "0"

De este modo, podemos construir una función "f", que para conjuntos ordinarios es una función booleana, tal que dado un elemento "*x*" del referencial *U*, y dado un subconjunto *A* de *U*:

- $f_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$
- $f_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A$

Ampliaremos ahora la cuestión a ese tipo especial de conjuntos que hemos denominado *conjuntos difusos*. En este caso decíamos que matices de carácter lingüístico, subjetivo,... nos impedían establecer con claridad el grado de pertenencia de algunos elementos del referencial al conjunto difuso considerado. Así, habrá elementos del referencial que claramente pertenezcan al conjunto, habrá otros que claramente no pertenezcan, y habrá otros que *pertenezcan en cierto grado* -aunque no totalmente-.

Siguiendo con el planteamiento anteriormente esbozado, el problema es muy fácil de resolver si consideramos que la función *f* adopta los siguientes valores, dado un elemento *x* del referencial *U*, y un subconjunto difuso *A* de *U*:

- $f_A(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$
- $f_A(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$
- $0 < f_A(x) < 1 \quad \Leftrightarrow$ *x* pertenece en cierto grado a *A*

La función *f* de algún modo cuantifica el grado de pertenencia de un elemento del referencial al conjunto difuso considerado. Así, un conjunto difuso es aquel en el que no existe una frontera clara entre la pertenecia y la no pertenencia de determinados elementos del referencial.

De todas formas, para establecer los "límites difusos" del conjunto correspondiente, vamos a necesitar un criterio, que casi siempre va a ser arbitrario. Analicemos el siguiente ejemplo:

Consideremos el referencial *U* de *personas vivas*, y consideremos también el subconjunto difuso *A* de *U* definido por la etiqueta "*A* es el conjunto de personas vivas jóvenes". Una propiedad que nos parece adecuada para caracterizar al subconjunto difuso *A* es la *edad* de los elementos del referencial, pero... ¿con qué criterio? Nos

---

[45] Referencial es el sinónimo de Universo de Discurso tradicionalmente empleado cuando se habla de conjuntos difusos.

encontramos ante el problema no trivial de la definición de criterios para la "fuzzyficación" de conjuntos. En nuestro caso, y continuando con el ejemplo, consideraremos "jóvenes" a todos aquellos elementos del referencial cuya edad les permita adquirir -legalmente- el "inter-rail"[46], y "no jóvenes" a todos aquellos del referencial que puedan beneficiarse -también legalmente- de la "tarjeta de la tercera edad" de RENFE (respectivamente, ≤ 25 años, y ≥ 65 años). De este modo:

- $f_A(x) = 1 \ \forall x \,/\, \text{Edad}(x) \leq 25$
- $f_A(x) = 0 \ \forall x \,/\, \text{Edad}(x) \geq 65$

Pero ¿qué pasa ahora con todos aquellos elementos del referencial con edades comprendidas entre 25 y 65 años? ¿cuál es su "grado de juventud" en base al criterio "edad"?... Estamos ante un nuevo problema: la caracterización de la zona difusa. Para salir del embrollo vamos a construir una función lineal del siguiente modo:

- $f_A(x) = \dfrac{65 - \text{Edad}(x)}{65\text{-}25} = \dfrac{65 - \text{Edad}(x)}{40} \qquad \forall x/\text{Edad}(x) \in [25,65]$

Con esta aproximación hemos sido capaces de segmentar nuestro espacio numérico [0 - 1] en tres zonas; dos de las cuales son no difusas y se refieren a aquellos elementos del referencial que pertenecen, o que no pertenecen, al subconjunto difuso considerado; y una tercera zona, de carácter difuso, que se refiere a aquellos elementos del referencial que pertenecen en cierto grado al subconjunto difuso considerado. La Figura 1.1 ilustra el tratamiento efectuado.

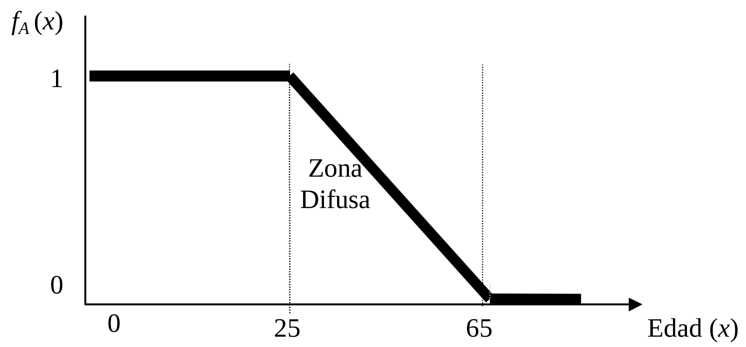

Figura 1.1

Planteémonos ahora la siguiente cuestión: sabiendo que Juan tiene 17 años, Marisa tiene 31 años, Joaquín tiene 47 años, Aurora tiene 57 años, y Marcial tiene 73 años, y sabiendo que todos ellos son personas vivas, ¿qué podemos decir acerca de su "juventud"?

---

[46] ... un excelente medio para viajar por toda Europa en tren, durante un mes y a un precio muy razonable.

De acuerdo con los criterios establecidos y efectuando las sustituciones oportunas, los valores de sus respectivas funciones de pertenencia al subconjunto difuso de “personas vivas jóvenes” serían los siguientes:

- f_{joven}(Juan) = 1.00
- f_{joven}(Marisa) = 0.85
- f_{joven}(Joaquín) = 0.45
- f_{joven}(Aurora) = 0.20
- f_{joven}(Marcial) = 0.00

Es claro que a medida que la edad de nuestros amigos aumenta, su grado de pertenencia al subconjunto difuso de *personas vivas jóvenes* disminuye. La aproximación es coherente, pero no es muy natural en términos lingüísticos. Para ilustrar lo que queremos decir analicemos el siguiente diálogo:

- Oye Luis ¿qué edad tiene Marisa?
- Creo que tiene 31 años
- ¡Ah, entonces Marisa es 0.85 joven!

¡Absurdo!, nadie se expresaría de tal modo. Estamos ante un nuevo problema, el de la *clasificación lingüística* con conjuntos difusos. Al respecto, la idea básica es que, una vez hemos sido capaces de segmentar el espacio numérico -indicativo de los grados de pertenencia de los elementos del referencial al subconjunto difuso considerado-, debemos segmentar también el espacio lingüístico, estableciendo un conjunto determinado de etiquetas dotadas de contenido semántico, y hacer corresponder a cada etiqueta lingüística un intervalo numérico concreto según un criterio mínimamente razonable. Existen estudios teóricos que tratan de demostrar que la máxima imprecisión lingüística puede conseguirse a través de una escala semántica formada por no más de nueve elementos literales[47].

Volvamos al caso de nuestro ejemplo, y definamos la siguiente escala lingüística, a la que asociaremos valores concretos de nuestra función grado de pertenenencia de los elementos del referencial al subconjunto difuso considerado. De este modo:

- $f_A(x) = 0.00 \rightarrow$ no es
- $0.00 < f_A(x) < 0.20 \rightarrow$ es muy poco
- $0.20 \leq f_A(x) \leq 0.40 \rightarrow$ es poco
- $0.40 < f_A(x) < 0.60 \rightarrow$ es algo
- $0.60 \leq f_A(x) \leq 0.80 \rightarrow$ es moderadamente
- $0.80 < f_A(x) < 1.00 \rightarrow$ es bastante
- $f_A(x) = 1.00 \rightarrow$ es

Según esta escala, y con los datos del ejemplo, ahora podríamos decir que:

[47] Sobre esta cuestión volveremos un poco más adelante.

- Juan es joven
- Marisa es bastante joven
- Joaquín es algo joven
- Aurora es poco joven
- Marcial no es joven

expresiones que se ajustan mucho más a la forma normal que utilizaríamos para emitir un juicio acerca de la juventud de nuestros amigos.

Llamaremos ahora la atención sobre algunos aspectos relacionados con este tratamiento:

- La función $f_A(x)$ definida para la zona difusa, que aquí hemos construido lineal, podría haber sido definida de cualquier otra forma[48].

- La escala lingüística asociada al espacio numérico -que es arbitraria- depende, no obstante, del tipo de clasificación que queremos obtener. Así, si queremos saber algo sobre la eventualidad de un determinado hecho, una escala semántica apropiada podría ser la siguiente:

  { imposible, casi imposible, muy improbable,..., casi seguro, seguro }

- El número de elementos semánticos de nuestra escala lingüística también es arbitrario.

- En algunos casos -como en nuestro ejemplo- es posible definir conjuntos difusos *lingüísticamente complementarios* que hagan más natural la expresión verbal. De este modo podríamos definir al subconjunto difuso *B* de "personas vivas viejas", -del referencial de "personas vivas"- de forma que alguien que sea "bastante joven" sea, simultáneamente "muy poco viejo", o lo que es más aceptable desde un punto de vista semántico, alguien que sea "muy poco joven" sea, al mismo tiempo "bastante viejo".

- Cualquier conjunto, sea cual sea su naturaleza, es "fuzzyficable"[49]; es decir, se puede establecer una gradación entre los niveles de pertenencia de distintos elementos de un referencial con respecto al conjunto considerado.

1.2. Caracterización y Nomenclatura de los Conjuntos Difusos

Cualquier conjunto, sea difuso o sea ordinario, tiene que poder ser descrito de manera conveniente. En el caso de los conjuntos ordinarios, y dado que se puede establecer sin ambigüedades la correspondiente relación de pertenencia de los elementos del referencial al conjunto considerado, resulta equivalente caracterizar al

---

[48] Dentro de un orden, por supuesto. ¡¡¡Una función helicoidal podría no ser del todo apropiada!!!
[49] Horrenda palabra para la que desgraciadamente no encontramos equivalente castellano... tal vez "difuminable".

conjunto en cuestión en función de su dominio (e.g., A es el conjunto de los números naturales pares menores que diez), o haciendo explícitos los elementos que lo constituyen (e.g., $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$)

Por otra parte ya hemos visto que, para cada elemento de un referencial dado, podemos definir una función f -que será de carácter booleano en el caso de conjuntos ordinarios-, tal que a cada elemento del referencial le asignará su valor lógico correspondiente, 0 ó 1, según el elemento en cuestión pertenezca, o no pertenezca, al conjunto. Así pues:

Dado un referencial U, y sea $A \subset U$,

$$\exists\ \mathrm{f}_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$$
$$= 0 \Leftrightarrow x \notin A$$

Aplicando este criterio al conjunto ordinario A que nos sirve de ejemplo, A estará perfectamente determinado con la siguiente expresión:

$$f_A(x) = \{ f_A(1) = 0 + f_A(2) = 1 + f_A(3) = 0 + f_A(4) = 1 + f_A(5) = 0 +$$
$$+ f_A(6) = 1 + f_A(7) = 0 + f_A(8) = 1 + f_A(9) = 0 + f_A(10) = 0 + ...\}$$

expresión en la que el signo “+” se lee “Y”

Una expresión equivalente a la anterior, pero algo más simplificada, es la siguiente:

$$f_A(x) = \{ 0/1 + ½ + 0/3 + ¼ + 0/5 + 1/6 + 0/7 + 1/8 + 0/9 + 0/10 + ...\}$$

en donde los numeradores de las fracciones representan los valores de la función de grado de pertenencia, y los denominadores son los elementos del referencial considerado. De este modo, un subconjunto ordinario A de un referencial U puede ser descrito:

- Implícitamente
- Explícitamente
- Mediante una $f_A(x)$, booleana, $\forall x \in U$

Por razones obvias, cuando trabajemos con conjuntos difusos preferiremos emplear descripciones implícitas o utilizar las funciones de grado de pertenencia. En este último caso tendremos en cuenta que se pierde el carácter booleano de la mencionada función. De esta forma:

$$\forall A \subset U \,/\, A \text{ difuso} \rightarrow \exists\, f_A(x) \,/\, f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$$

es decir, la función $f_A(x)$ puede tomar cualquier valor en el intervalo [0,1]. Como veremos más adelante, esta forma de nombrar a los conjuntos difusos nos lleva directamente a establecer que los conjuntos ordinarios son un caso particular de los conjuntos difusos, aunque -como también veremos- no tienen la misma estructura algebraica.

Siguiendo con esta forma de denotar conjuntos, y suponiendo que queremos establecer una relación entre un conjunto A de un referencial U, y un conjunto B de un referencial V, también serán equivalentes expresiones del tipo:

A relación B = (a1,...,an) relación (b1,...,bm) = $f_A(x)$ relación $f_B(y)$,
con $A \subset U$, $B \subset V$, $x \in U$, $y \in V$

1.3. Estructura Algebraica de los Conjuntos Difusos

Para investigar la estructura algebraica de los conjuntos difusos se tienen que verificar un conjunto de propiedades, que trataremos de establecer y desarrollar a continuación. No obstante, el punto de enfoque de esta sección es tratar de demostrar que los conjuntos difusos no tienen estructura de álgebra de Boole. Al respecto, comenzaremos a establecer las propiedades correspondientes.

Conjunto vacío

- Sea un referencial U, y sea $Z \subset U$ tal que

$\exists\, f_Z(x) : U \rightarrow [0,1] \;\; \forall x$ de U [50]

decimos que $Z = ø \Leftrightarrow f_Z(x) = 0 \quad \forall x \in U$

Identidad

- Sea un referencial U, y sean $A \subset U$ y $B \subset U$ tales que

$\exists\, f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \;\; \forall x \in U$
$\exists\, f_B(x) : U \rightarrow [0,1] \;\; \forall x \in U$

decimos que $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x) \quad \forall x \in U$

Complementariedad

- Sea un referencial U, y sea $A \subset U$ tal que

$\exists\, f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$

decimos que $A' = Ac$ = complementario de $A \Leftrightarrow f_A'(x) = 1 - f_A(x) \quad \forall x \in U$

Obviamente, $f_A'(x) : U \rightarrow [0,1]$

---

[50] Esta expresión define al subconjunto Z de U como un conjunto difuso.

Inclusión

- Sea un referencial U, y sean $A \subset U$ y $B \subset U$ tales que

$\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$
$\exists\ f_B(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$

decimos que $B \subset A \Leftrightarrow f_B(x) \leq f_A(x)\ \forall x \in U$

Esta caracterización es totalmente análoga a la que obtendríamos si considerásemos conjuntos ordinarios, y los describiésemos con notación difusa. Así:

- Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- Sea A en U / $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Sea B en U / $B = \{1, 3\}$

evidentemente $B \subset A$. Si denotamos ahora a los mencionados subconjuntos de U por medio de sus funciones de grado de pertenencia resulta:

- $f_A(x) = \{ 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 0/5 + 0/6 + 0/7 + 0/8 \}$
- $f_B(x) = \{ 1/1 + 0/2 + 1/3 + 0/4 + 0/5 + 0/6 + 0/7 + 0/8 \}$

Efectivamente, podemos comprobar que $\forall x \in U$, $f_B(x) \leq f_A(x)$

Unión de conjuntos difusos

- Sea un referencial U, y sean $A \subset U$, $B \subset U$, y $C \subset U$ tales que

$\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$
$\exists\ f_B(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$
$\exists\ f_C(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$

decimos que $C = A \cup B \Leftrightarrow f_C(x) = \max\ \{f_A(x), f_B(x)\} \quad \forall x \in U$

Ilustraremos el concepto con un ejemplo -de naturaleza similar al empleado para describir la relación de *inclusión*-, en el que A, B y C son los conjuntos ordinarios que se muestran a continuación:

- $A = \{1, 2\}$
- $B = \{1, 3, 5\}$
- $C = \{1, 2, 3, 5\}$

en donde A, B, y C son subconjuntos del referencial $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y, claramente, $C = A \cup B$.

Utilizando ahora la notación difusa:

- $f_A(x) = \{ 1/1 + 1/2 + 0/3 + 0/4 + 0/5 \}$

- $f_B(x) = \{ 1/1 + 0/2 + 1/3 + 0/4 + 1/5 \}$
- $f_C(x) = \{ 1/1 + 1/2 + 1/3 + 0/4 + 1/5 \}$

pero, según esta expresión, constatamos fácilmente que:

$$f_C(x) = \max \{ f_A(x), f_B(x) \} \ \forall x \in U$$

Al respecto, se puede demostrar que la unión de conjuntos difusos, que también puede denotarse del siguiente modo: $A \cup B = f_A(x)$ or $f_B(x)$ $\forall x \in U$, o simplemente "f_A or f_B", tiene la propiedad asociativa, por lo que:

- Dado un referencial U, y dados $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$, tales que

$\exists\, f_A(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$
$\exists\, f_B(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$
$\exists\, f_C(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$

se verifica que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, expresión que equivale a la siguiente:

$$f_A \text{ or } (f_B \text{ or } f_C) = (f_A \text{ or } f_B) \text{ or } f_C$$

<u>Intersección de conjuntos difusos</u>

- Sea un referencial U, y sean $A \subset U$, $B \subset U$, y $C \subset U$ tales que

$\exists\, f_A(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$
$\exists\, f_B(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$
$\exists\, f_C(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$

decimos que $C = A \cap B \Leftrightarrow f_C(x) = \min \{f_A(x), f_B(x)\} \ \ \forall x \in U$

El mismo tratamiento que hemos efectuado en el párrafo anterior para ilustrar la Unión, puede utilizarse para ilustrar la Intersección. La intersección de conjuntos difusos también puede denotarse del siguiente modo:

$A \cap B = f_A(x)$ and $f_B(x)$ $\forall x \in U$, o simplemente "f_A and f_B"

<u>Leyes de DeMorgan</u>

- Sea un referencial U, y sean $A \subset U$, $B \subset U$ tales que

$\exists\, f_A(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$
$\exists\, f_B(x) : U \to [0,1] \ \ \forall x \in U$

las leyes de DeMorgan establecen lo siguiente:

- Primera: El complementario de la Unión equivale a la intersección de los complementarios.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(f_A \text{ or } f_B)' = (f_A' \text{ and } f_B')$$

- Segunda: El complementario de la Intersección equivale a la Unión de los complementarios.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(\mathrm{f}_A \text{ and } \mathrm{f}_B)' = (\mathrm{f}_A' \text{ or } \mathrm{f}_B')$$

Analicemos brevemente la primera de estas leyes:

Sea un referencial U, y sean $A \subset U$, $B \subset U$ tales que

$\exists\, f_A(x) : U \to [0,1] \quad \forall x \in U$
$\exists\, f_B(x) : U \to [0,1] \quad \forall x \in U$

$A \cup B \quad \to \quad f_{\cup}(x) = \max \{ f_A(x), f_B(x) \} \qquad \forall x \in U$
$(A \cup B)' \quad \to \quad f_{\cup'}(x) = 1 - \max \{ f_A(x), f_B(x) \} \qquad \forall x \in U$

por otra parte

$A' \to f_A'(x) = 1 - f_A(x) \qquad \forall x \in U$
$B' \to f_B'(x) = 1 - f_B(x) \qquad \forall x \in U$

$A' \cap B' \to \mathrm{f}'{\cap}'(x) = \min \{ 1 - f_A(x), 1 - f_B(x) \} \qquad \forall x \in U$

Lo que tendremos que demostrar ahora es que:

$$1 - \max \{ \mathrm{f}_A(x), \mathrm{f}_B(x) \} = \min \{ 1 - \mathrm{f}_A(x), 1 - \mathrm{f}_B(x) \} \qquad \forall x \text{ de } U$$

para lo cual utilizaremos una prueba basada en el análisis de casos extremos.

(a) Supongamos que $f_A(x) \geq f_B(x) \ \ \forall x \in U$

en este caso se cumple que $1 - \max \{ f_A(x), f_B(x) \} = 1 - f_A(x) \ \ \forall x$ de U y además,
$\min \{ 1 - f_A(x), 1 - f_B(x) \} = 1 - f_A(x) \ \ \forall x$ de U

por lo tanto, bajo estas condiciones, la primera ley de DeMorgan se verifica.

(b) Sea ahora $f_A(x) \leq f_B(x) \ \ \forall x \in U$

en este caso se cumple que $1 - \max \{ f_A(x), f_B(x) \} = 1 - f_B(x) \ \ \forall x \in U$ y además,
$\min \{ 1 - f_A(x), 1 - f_B(x) \} = 1 - f_B(x) \ \ \forall x \in U$

así que, bajo estas condiciones, la primera ley de DeMorgan se verifica también. Por lo tanto, si en ambas situaciones extremas dicha ley se cumple, también debe cumplirse para las situaciones intermedias[51].

Este mismo planteamiento puede seguirse en relación a la segunda ley de DeMorgan, y encontraríamos que también se verifica.

Leyes distributivas

Aunque no haremos un tratamiento formal y completo de las expresiones correspondientes[52], los conjuntos difusos también verifican las leyes distributivas.

- primera:

Dado un referencial U, y dados $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$, tales que

$\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1]\ \forall x \in U$
$\exists\ f_B(x) : U \rightarrow [0,1]\ \forall x \in U$
$\exists\ f_C(x) : U \rightarrow [0,1]\ \forall x \in U$

la primera ley distributiva establece que:

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A)\ \cup (C \cap B)$$

o, lo que es lo mismo,

$$f_C(x) \text{ and } \{f_A(x) \text{ or } f_B(x)\} = \{f_C(x) \text{ and } f_A(x)\} \text{ or } \{f_C(x) \text{ and } f_B(x)\}\ \forall x \in U$$

- segunda:

Dado un referencial U, y dados $A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$, tales que

$\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1]\ \ \forall x \in U$
$\exists\ f_B(x) : U \rightarrow [0,1]\ \ \forall x \in U$
$\exists\ f_C(x) : U \rightarrow [0,1]\ \ \forall x \in U$

la segunda ley distributiva establece que:

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A)\ \cap (C \cup B)$$

o, lo que es lo mismo,

$$f_C(x) \text{ or } \{f_A(x) \text{ and } f_B(x)\} = \{f_C(x) \text{ or } f_A(x)\} \text{ and } \{f_C(x) \text{ or } f_B(x)\}\ \forall x \in U$$

---

[51] Esta no es una demostración formal. El lector interesado encontrará mejores demostraciones en los artículos de la bibliografía.
[52] Ejercicio que dejamos para el lector estudioso.

Según lo visto hasta ahora todo parece indicar que los conjuntos difusos tienen estructura de álgebra de Boole; sin embargo, hay dos leyes del álgebra de Boole que los conjuntos difusos no satisfacen. En concreto, los conjuntos difusos no cumplen ni el *principio de no contradicción*, ni la *ley del tercero excluido*.

Dado un referencial U, y dado $A \subset U$, en donde A es un conjunto ordinario, la ley del tercero excluido establece que la unión de un conjunto y su complementario es el referencial:

$$A \cup A' = U$$

Por otra parte, dado un referencial U, y dado $A \subset U$, en donde A es un conjunto ordinario, el principio de no contradicción establece que la intersección de un conjunto con su complementario es el conjunto vacío:

$$A \cap A' = \emptyset$$

En el caso de los conjuntos difusos, y en relación a la ley del tercero excluido, si U es un referencial, y A un subconjunto difuso del referencial -y por lo tanto $\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1]\ \ \forall x \in U$-, dado que $A' \rightarrow f_A'(x) = 1 - f_A(x)$ por lo tanto

$$A \cup A' \rightarrow f_{A \cup A}'(x) = \max \{ f_A(x), f_A'(x) \} = \max \{ f_A(x), 1 - f_A(x) \} \quad \forall x \in U$$

cantidad que es siempre $\geq 1/2$, pero que no necesariamente es "1".

Análogamente, en el caso del principio de no contradicción, si U es un referencial, y A un subconjunto difuso del referencial, y por lo tanto $\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1]$, $\forall x \in U$, dado que $A' \rightarrow f_A'(x) = 1 - f_A(x)$ por lo tanto

$$A \cap A' \rightarrow f_{A \cap A}'(x) = \min \{ f_A(x), f_A'(x) \} = \min \{ f_A(x), 1 - f_A(x) \} \ \forall x \in U$$

cantidad que es siempre $\leq 1/2$, pero que no necesariamente es "0".

Claramente, los conjuntos difusos no verifican las dos leyes anteriormente mencionadas, y por lo tanto no tienen estructura de álgebra de Boole -lo cual va a traernos alguna sorpresa cuando trabajemos con ellos,... como veremos a continuación-

1.4. Operaciones Algebraicas con Conjuntos Difusos

El desarrollo efectuado hasta ahora nos permite describir algunas operaciones algebraicas que podemos realizar con conjuntos difusos. La descripción de tales operaciones se realizará a partir de las correspondientes funciones de grado de pertenencia.

Producto de conjuntos difusos

- Sea un referencial U, y sean $A \subset U$, $B \subset U$ tales que

$\exists\, f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$
$\exists\, f_B(x) : U \rightarrow [0,1] \quad \forall x \in U$

definimos el producto de ambos subconjuntos difusos del siguiente modo:

$$A \text{ x } B \rightarrow f_{AB}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) \qquad \forall x \in U$$

Para ilustrar el producto analizaremos el siguiente ejemplo: sea el referencial $U = \{1, 2, 3, 4\}$ y sean $A \subset U$ y $B \subset U$ tales que:

$f_A(x) = \{ 0/1 + 0.3/2 + 0.7/3 + 1/4\}$
$f_B(x) = \{ 0.5/1 + 0.4/2 + 1/3 + 0/4 \}$

De acuerdo con nuestra definición anterior, el producto A x B estará caracterizado por la siguiente función de grado de pertenencia:

$f_{AB}(x) = \{ 0/1 + 0.12/2 + 0.7/3 + 0/4 \}$

Analicemos ahora un problema similar, pero con conjuntos ordinarios, de forma que las correspondientes funciones de grado de pertenencia le asignan el valor "1" a todos los elementos del referencial que tienen valores distintos de "0" en sus correspondientes homólogos difusos. Según este criterio:

A difuso $\rightarrow A$ ordinario $= A_o / f_{Ao}(x) = \{ 0/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 \}$
B difuso $\rightarrow B$ ordinario $= B_o / f_{Bo}(x) = \{ 1/1 + 1/2 + 1/3 + 0/4 \}$

El producto de los conjuntos ordinarios correspondientes vendrá descrito por la expresión:

$A_o \text{ x } B_o \rightarrow f_{Ao \text{ x } Bo}(x) = \{ 0/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 \}$

Vamos a calcular ahora la intersección de los conjuntos ordinarios *Ao* y *Bo*. En este caso:

$A_o \cap B_o \rightarrow f_{Ao \cap Bo}(x) = \min \{ f_{Ao}(x), f_{Bo}(x) \} \ \forall x \in U$

de donde: $f_{Ao \cap Bo}(x) = \{ 0/1 + 1/2 + 1/3 + 0/4 \}$

expresión que coincide exactamente con la obtenida para el producto. De este modo, podemos afirmar que en los conjuntos ordinarios el producto coincide con la intersección.

Observemos ahora qué ocurre en el caso de los conjuntos difusos, para ello recordemos que:

A difuso $= Ad \rightarrow f_{Ad}(x) = \{ 0/1 + 0.3/2 + 0.7/3 + 1/4\}$
B difuso $= Bd \rightarrow f_{Bd}(x) = \{ 0.5/1 + 0.4/2 + 1/3 + 0/4 \}$

y la intersección de ambos conjuntos difusos está caracterizada por la siguiente función de grado de pertenencia:

$Ad \cap Bd \rightarrow f_{Ad \cap Bd}(x) = \min \{f_{Ad}(x), f_{Bd}(x)\} \quad \forall x \in U$

de donde: $f_{Ad \cap Bd}(x) = \{ 0/1 + 0.3/2 + 0.7/3 + 0/4 \}$

Si comparamos el resultado obtenido para el producto con el resultado obtenido para la intersección, en el caso de conjuntos difusos observamos que:

$f_{AB}(x) \le f_{A \cap B}(x) \qquad \forall x \in U$

pero esta expresión es, precisamente, la que define la relación de inclusión en los conjuntos difusos. Por lo tanto, el producto de conjuntos difusos está contenido en su intersección[53].

Suma y suma acotada

- Sea un referencial U, y sean $A \subset U$, $B \subset U$ tales que

$\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \qquad \forall x \in U$
$\exists\ f_B(x) : U \rightarrow [0,1] \qquad \forall x \in U$

definimos la suma de conjuntos difusos del siguiente modo:

$A + B \rightarrow f_{A+B}(x) = f_A(x) + f_B(x) \qquad \forall x \in U$

Claramente, la suma de conjuntos difusos sólo está definida cuando

$f_A(x) + f_B(x) \le 1 \qquad \forall x \in U$

Para evitar este problema, definimos el concepto de *suma acotada* de conjuntos difusos del siguiente modo:

$A\ |{+}|\ B \rightarrow f_{A |+| B}(x) = \min \{ 1, f_A(x) + f_B(x) \} \quad \forall x \in U$

expresión que está definida siempre, de acuerdo con las restricciones impuestas a la función de grado de pertenencia.

Diferencia y diferencia absoluta

- Sea un referencial U, y sean A en U, B en U tales que

$\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \qquad \forall x \in U$
$\exists\ f_B(x) : U \rightarrow [0,1] \qquad \forall x \in U$

[53] No es trivial interpretar este resultado.

Definimos la diferencia de ambos conjuntos difusos del siguiente modo:

$A - B \rightarrow f_{A - B}(x) = f_A(x) - f_B(x) \qquad \forall x \in U$

Evidentemente, la diferencia de conjuntos difusos sólo está definida si $f_B(x) \leq f_A(x)\ \forall x \in U$; es decir, la diferencia de conjuntos difusos sólo se puede establecer cuando $B \subset A$.

Para evitar este problema, en los modelos difusos se define el concepto de *diferencia absoluta* del siguiente modo:

$|A - B| \rightarrow f_{|A - B|}(x) = |f_A(x) - f_B(x)| \qquad \forall x \in U$

expresión que está definida siempre, de acuerdo con las restricciones impuestas a la función de grado de pertenencia.

Núcleo de un conjunto difuso

- Sea un referencial U, y sea A en U, tal que

$\exists\ f_A(x) : U \rightarrow [0,1] \qquad \forall x \in U$

definimos como *núcleo* del conjunto difuso A, a todo aquel elemento del referencial, para el cual $f_A(x) = 1$. Así:

$NA = \{\ x \in U \,/\, f_A(x) = 1\ \}$

Un conjunto difuso se dice que está *normalizado* si tiene núcleo; es decir, si existe algún elemento del referencial que claramente pertenezca al conjunto difuso considerado.

Relación difusa

Dado un referencial U, definimos una relación difusa de orden "n" en U, como un conjunto difuso A en el espacio $U \times U \times \ldots \times U$ (n veces), caracterizado por una función de grado de pertenencia del tipo:

$f_A(x1, \ldots, xn) \qquad \forall x \in U$

Para visualizar el concepto consideremos el siguiente ejemplo: Sea el referencial $U = \{\ 1, 2, 3, 4\ \}$ y definamos una relación difusa de orden 2, caracterizada por la descripción "*A* es el conjunto difuso de los elementos que son aproximadamente iguales". Evidentemente, este conjunto difuso está definido en el espacio $U \times U$, y su función de grado de pertenencia[54] podría ser la siguiente:

[54] Arbitraria...

	U2			
U1	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1.0	0.8	0.2	0.0
2	0.8	1.0	0.8	0.2
3	0.2	0.8	1.0	0.8
4	0.0	0.2	0.8	1.0

Así la relación difusa establecida en los términos anteriores, relativa a los elementos 1 y 3 es la siguiente:

f_A (1, 3) = 0.2

1.5. Representación del Conocimiento y Razonamiento Difuso

Aunque un tratamiento amplio de los problemas derivados de la representación del conocimiento y del razonamiento difuso sobrepasa con mucho las pretensiones de este texto, sí parece conveniente iniciar al menos una aproximación a ambas cuestiones. Todos los conceptos vistos hasta ahora nos han permitido caracterizar a los conjuntos difusos y distinguirlos de los conjuntos ordinarios. Recordemos ahora que, desde la perspectiva de la inteligencia artificial, el modelo difuso debe permitirnos la representación de declaraciones como las siguientes:

- Normalmente se tarda alrededor de 45 minutos en llegar desde La Coruña a Santiago, por la autopista, y con tráfico ligero.

- No es previsible que el paro disminuya en España, al menos de manera drástica, en los próximos meses.

- La mayoría de los expertos opinan que la probabilidad de un terremoto serio en la zona del Caurel es muy pequeña en un futuro inmediato.

En las frases anteriores podemos reconocer predicados difusos, cuantificadores difusos y probabilidades difusas. Al respecto, otras aproximaciones más convencionales, usualmente empleadas para representar conocimiento, carecen de medios para representar eficazmente el significado de conceptos difusos. Así, los modelos que se basan en lógicas de primer orden, o los que se basan en teorías clásicas de la probabilidad, no nos permiten manipular correctamente el conocimiento de sentido común. Las causas evidentes son las siguientes:

- El conocimiento derivado del sentido común es léxicamente impreciso.
- El conocimiento derivado del sentido común es de naturaleza no categórica.

Por otra parte, las características ya estudiadas de los conjuntos difusos nos dan pistas sobre la manera de proceder, si lo que queremos es aplicar esquemas de representación del conocimiento, y modelos de razonamiento, basados en lógica difusa:

- En lógica difusa, el razonamiento categórico es un caso particular del razonamiento aproximado.

- En lógica difusa todo es una cuestión de grado.
- Cualquier sistema lógico puede ser "fuzzyficado".
- En lógica difusa el conocimiento debe ser interpretado como una colección de *restricciones difusas* que operan sobre una colección de variables.
- En lógica difusa, los problemas de razonamiento -y por consiguiente los procesos inferenciales- deben interpretarse como *propagaciones* de las restricciones difusas mencionadas en el párrafo anterior.

Este último punto es de vital importancia, y merece que nos detengamos en una breve explicación, que nos llevará al establecimiento del llamado "modus ponens generalizado" como procedimiento inferencial básico en los sistemas difusos.

¿Cómo podríamos representar en un sistema difuso una declaración del tipo "Si *x* es *A*, Entonces y es *B*", en donde *A* es un subconjunto difuso de un referencial *U*, *B* es un subconjunto difuso de un referencial *V* -que puede ser igual o distinto a *U*-, *x* es un elemento de *U*, e y es un elemento de *V*?

La respuesta a esta cuestión no es única, y varios autores proponen distintas soluciones. Al respecto, Zadeh propone que la función de grado de pertenencia de la declaración anterior puede calcularse del siguiente modo[55]:

Declaración : Si *x* es *A*, Entonces y es *B*

x es *A* : $f_A(x),\ x \in U$
y es *B* : $f_B(x),\ y \in V$

Si *x* es *A*, Entonces *y* es *B*:

$$f_A \to B(x,y) = A' \mid + \mid B = \min \{ 1, 1\text{-}f_A(x) + f_B(y) \},\ x \in U,\ y \in V$$

Así, podemos introducir el mecanismo de inferencia conocido como "modus ponens", según el cual:

Si $A \to B$
y A

Entonces B

Los sistemas difusos utilizan una generalización del "modus ponens", que podemos representar del siguiente modo:

[55] No existe una verdadera justificación que avale la propuesta de Zadeh, pero tampoco la hay para las soluciones propuestas por Adlassnig y otros autores.

Si $A \rightarrow B$
y A

Entonces B

en donde A se parece a A, pero no es A, y en donde B se parece a B, pero no es B.

Este mecanismo inferencial se conoce con el nombre de “modus ponens generalizado” y, siempre según Zadeh, la expresión correspondiente para calcular $f_B(y)$ es la siguiente:

$$f_B(y) = \sup_v [A' \,|{+}|\, B] \cap A, \quad A \subset U, A \subset U, B \subset V, B \subset V$$

por lo que $f_B(y) = \sup_v [\min [\min 1, 1\text{-}f_A(x) + f_B(y)], f_A(x)]]$, $x \in U$, y $\in V$

Un ejemplo contribuirá a aclarar el proceso:

Sean $A \subset U$, $A \subset U$, $B \subset V$, $B \subset V$, donde $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$, y sean:

$f_A(x) = \{0/1 + 0.6/2 + 1/3 + 0.5/4\}$
$f_A(x) = \{0/1 + 0.2/2 + 0.6/3 + 1/4\}$
$f_B(x) = \{0/1 + 1/2 + 0.6/3 + 0.2/4\}$

sea además la siguiente información:

- sabemos que: Si x es A, Entonces y es B
- sabemos que: x es A

(1) Encontrar A'
(2) Encontrar $A' \,|{+}|\, B$ en $U \times V$
(3) Evaluar $(A' \,|{+}|\, B) \cap A$ en $U \times V$
(4) Encontrar la expresión que caracteriza a B

Claramente este ejemplo no es más que el desarrollo “paso a paso” que nos permite caracterizar al subconjunto difuso B utilizando el modus ponens generalizado. De este modo:

$A' \rightarrow \quad f_A'(x) = \{1/1 + 0.4/2 + 0/3 + 0.5/4\}$

$A' \,|{+}|\, B$, en $U \times V$ =

	V			
U	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.4	1.0	1.0	0.6
3	0.0	1.0	0.6	0.2
4	0.5	1.0	1.0	0.7

$(A' \mid + \mid B) \cap A$, en $U \times V$ =

	V			
U	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.2	0.2	0.2	0.2
3	0.0	0.6	0.6	0.2
4	0.5	1.0	1.0	0.7

y, finalmente:

$B \rightarrow \quad f_B\,(\mathrm{y}) = \sup_v\ [(A' \mid + \mid B) \cap A\ ]$, en $U \times V$
$\qquad f_B\,(\mathrm{y}) = \{\ 0.5/1 + 1/1 + 1/1 + 0.7/1\}$ con $y \in V$

El modus ponens generalizado es ya una primera diferencia en el razonamiento de los sistemas difusos, frente al razonamiento en sistemas más clásicos y convencionales. Pero además, también podemos encontrar otras diferencias -tanto en representación como en razonamiento-, que resumimos en los siguientes puntos:

Certeza:

En sistemas que utilizan lógica bivalente la verdad de una declaración sólo puede tener dos valores: la declaración es cierta, o la declaración es falsa. Por el contrario, en sistema multivaluados, la verdad de una declaración puede ser: un elemento de un conjunto finito, un intervalo (e.g.,, [0,1]), o un álgebra de Boole. En lógica difusa la verdad de una declaración puede ser un subconjunto difuso parcialmente ordenado, pero normalmente se asume la existencia de un subconjunto difuso del intervalo [0,1], o dicho de otro modo, un punto de dicho intervalo. Así, los denominados valores lingüísticos de la verdad de una declaración pueden expresarse por medio de etiquetas del tipo: cierto, muy cierto, no exactamente cierto,... que son etiquetas correspondientes a subconjuntos difusos del mencionado intervalo.

Predicados:

En sistemas bivalentes los predicados son categóricos -e.g., mortal, par, impar, más alto que,...- Por el contrario, en sistemas difusos los predicados son, precisamente, difusos -e.g., alto, pronto, mucho mayor que,...-

Modificadores:

En sistemas clásicos el único modificador realmente utilizado es la negación NOT. En sistemas difusos hay una gran variedad de modificadores -e.g., muy, más o menos, bastante,...- Estos modificadores son esenciales para generar los valores apropiados de la variables lingüísticas involucradas en un proceso -e.g., muy joven, no muy viejo,...-

Cuantificadores:

En los sistemas clásicos hay únicamente dos cuantificadores, el universal y el existencial. Por el contrario, en los sistemas difusos encontramos una gran variedad de cuantificadores -e.g., pocos, bastantes, normalmente, la mayoría,...-

Probabilidades:

En los sistemas lógicos clásicos, la probabilidad es numérica. En los sistemas difusos la probabilidad se expresa por medio de etiquetas lingüísticas (probabilidades difusas), del tipo: plausible, poco probable, alrededor de 0.8,... El manejo de tales probabilidades difusas debe efectuarse a través de la llamada aritmética difusa.

Posibilidades:

A diferencia de lo que ocurre con los sistema lógicos clásicos, el concepto de posibilidad en los sistemas difusos no es bivalente. De hecho, al igual que sucede con las probabilidades, las posibilidades pueden ser tratadas como variables lingüísticas que adoptan valores del tipo casi imposible, bastante posible,...

Los elementos que acabamos de describir, como componentes básicos de la representación del conocimiento y del razonamiento difuso, nos permiten definir una amplia variedad de modos de razonamiento, no necesariamente disjuntos, entre los que citaremos:

Razonamiento Categórico:

Este tipo de razonamiento utiliza declaraciones difusas, pero no emplea ni cuantificadores difusos ni probabilidades difusas. Un ejemplo sencillo podría ser el siguiente:

María es una chica delgada
María es una chica muy inteligente

María es una chica delgada y muy inteligente

En este ejemplo, las premisas “delgada” y “muy inteligente” deben interpretarse como predicados difusos. Por otra parte, el predicado difuso de la conclusión es la conjunción de las premisas anteriores.

Razonamiento Silogístico:

A diferencia de lo descrito al hablar del razonamiento categórico difuso, el razonamiento silogístico produce inferencias con premisas que incorporan cuantificadores difusos. Un ejemplo sencillo podría ser el siguiente:

La mayoría de los suecos son rubios
La mayoría de los suecos rubios son altos

(La mayoría)^2 de los suecos son rubios y altos

En este caso, el cuantificador difuso “la mayoría” debe interpretarse como una proporción difusa, y “(la mayoría)^2” es el cuadrado de “la mayoría” en aritmética difusa.

Razonamiento Disposicional:

En este tipo de razonamiento las premisas son disposiciones. La conclusión obtenida es una máxima que debe interpretarse como un mandato disposicional. Un ejemplo sencillo podría ser el siguiente:

Fumar mucho suele ser causa de abundante tos

Para evitar tos abundante evite fumar mucho

Razonamiento Cualitativo:

En sistemas difusos, el razonamiento cualitativo se define como un modo de razonamiento en el cual las relaciones entrada/salida de un sistema se representan por medio de una colección de reglas difusas -de tipo IF-THEN-, en las que los antecedentes y los consecuentes incluyen variables lingüísticas. Este tipo de razonamiento es el empleado habitualmente en las aplicaciones de la lógica difusa al análisis de sistemas y al control de procesos.

Actualmente la aplicación de los conjuntos difusos a los sistemas inteligentes es un tema de gran interés en investigación. De todas formas, aunque las bases teóricas del formalismo difuso están ya bastante claras, su aplicación a sistemas de naturaleza inferencial encuentra problemas que, hoy en día, siguen sin estar resueltos. Sí parece, no obstante, que los sistemas difusos aplicados a problemas de control están proporcionando soluciones alternativas, de gran brillantez y elegancia, frente a planteamientos más tradicionales.

1.6. Resumen

En este capítulo hemos descrito con cierto detalle los planteamientos de la lógica difusa, y su eventual aplicación a la inteligencia artificial como esquema de representación del conocimiento, como base de nuevos modelos de razonamiento, y también como medio eficaz de abordar el problema de la clasificación lingüística de variables. Tras una fugaz presentación de la naturaleza y alcance de los conjuntos difusos, entramos de lleno en su caracterización y nomenclatura. Como consecuencia del formalismo introducido aparecen los conjuntos ordinarios como un caso particular de los conjuntos difusos. No obstante, conjuntos ordinarios y conjuntos difusos no tienen la misma estructura algebraica. De hecho los conjuntos difusos no tienen estructura de álgebra de Boole al no verificar ni el principio de no contradicción, ni la ley del tercero excluido. *A* continuación definimos y desarrollamos algunas operaciones algebraicas con conjuntos difusos. Los resultados de tales operaciones son, en ocasiones, difíciles de interpretar. Así, mientras el producto coincide con la intersección cuando hablamos de conjuntos ordinarios, cuando consideramos conjuntos difusos resulta que el producto está contenido en la intersección. Seguidamente abordamos el problema de las relaciones difusas, y proponemos la formulación de Zadeh para la representación de conocimiento del tipo: Si x es A, Entonces y es B. Ello nos lleva a definir el *modus ponens generalizado* como mecanismo inferencial estrella de los sistemas difusos. Finalmente se mencionan algunos de los modos de razonamiento que se pueden encontrar en los sistemas difusos. Estos modos de razonamiento surgen de las características diferenciales de la lógica difusa en relación a otras lógicas.

1.7. Textos Básicos

- Watson, Weiss and Donnell, “Fuzzy decision analysis”, IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, vol.9, 1979.

- Zadeh, “Fuzzy sets”, Information and Control, vol.8, 1965.

- Zadeh, “Knowledge representation in fuzzy logic”, IEEE Trans. Knowledge and Data Engineering, vol. 1, 1989.