CONJUNTOS DIFUSOS

- Aspectos generales
- Nomenclatura
- Estructura algebraica
- Operaciones algebraicas
- Representación del conocimiento
- Razonamiento difuso

CONJUNTOS DIFUSOS

- Textos Básicos
  - Lofti Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, vol.8, 1965
  - Watson, Weiss & Donnell, Fuzzy decision analysis, IEEE Trans. Systems, Man & Cybernetics, vol.9, 1979
  - Zadeh, Knowledge representation in fuzzy logic, IEEE Trans. Knowledge & Data Engineering, vol.1, 1989

CONJUNTOS DIFUSOS

- Planteamiento general…
  – Criterios lingüísticos para describir los objetos del mundo
  – Ambigüedad
    - Lenguaje
    - Clasificación
    - Taxonomías
    - Jerarquías
    - Razonamiento

CONJUNTOS DIFUSOS

- Concepto de “ser vivo”… Definición
  - ¿planta? ¿piedra? ¿virus?
- Cuestiones subjetivas
  - Lo hermoso
  - Esto es hermoso
- Contextos…Ejemplo: Alto
  - Sueco
  - Pigmeo
  - Niño

CONJUNTOS DIFUSOS

- Lofti Zadeh, 1965
  - Universo N de los números naturales

$$A \subseteq N \,/\, A = naturales\_pares\_menores\_que\_10$$

$$A = \{2,4,6,8\}$$

$$2 \in A$$

$$3 \notin A$$

$$\ldots$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Referencial U = seres humanos vivos
- B $\subseteq$ U / B = seres humanos vivos morenos y altos…¿B?

$$Conjuntos\_ordinarios$$

$$U, A \subseteq U / \exists \mu_A(x) : U \rightarrow \{0, x \notin A : 1, x \in A\}, \forall x \in U$$

$$Conjuntos\_difusos$$

$$U, A \subseteq U / \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1], \forall x \in U$$

$$\mu_A(x) = 1 \rightarrow x \in A$$

$$\mu_A(x) = 0 \rightarrow x \notin A$$

$$0 < \mu_A(x) < 1 \rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A)$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Criterios para definir la función μ de grado de pertenencia…
  - U = personas vivas
  - $A \subseteq U$ / A = personas vivas jóvenes
  - Criterio para μ
    - ¿edad?
    - ¿cómo?

CONJUNTOS DIFUSOS

- Aplicación ferroviaria del criterio
  - Joven $\rightarrow$ Inter-Rail
  - No Joven $\rightarrow$ Tarjeta oro de Renfe (3ª edad)

$$\mu_A(x) = 1 : \forall x / Edad(x) \leq 25\_años$$

$$\mu_A(x) = 0 : \forall x / Edad(x) \geq 65\_años$$

$$¿\,\mu_A(x) : \forall x / 25 < Edad(x) < 65\,?$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Criterio lineal para μ:

$$\mu_A(x) = \frac{65 - Edad(x)}{40} : \forall x \,/\, Edad(x) \in [25,65]$$

$$A = Persona\_viva\_joven$$

$$Edad(Juan) = 17 \rightarrow \mu_{joven}(Juan) = 1.00$$

$$Edad(Marisa) = 31 \rightarrow \mu_{joven}(Marisa) = 0.85$$

$$Edad(Blas) = 47 \rightarrow \mu_{joven}(Blas) = 0.45$$

$$Edad(Ana) = 57 \rightarrow \mu_{joven}(Ana) = 0.20$$

$$Edad(Alex) = 73 \rightarrow \mu_{joven}(Alex) = 0.00$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Cuantificación lingüística (incorrecta)
  - Juan es 1.00 Joven
  - Marisa es 0.85 Joven
  - Blas es 0.45 Joven
  - Ana es 0.20 Joven
  - Alex es 0.00 Joven

CONJUNTOS DIFUSOS

- Escala semántica (correcta)

$$0.00 = \mu_A(x) = 0.00 \rightarrow No\_es$$

$$0.00 < \mu_A(x) < 0.20 \rightarrow Es\_muy\_poco$$

$$0.20 \leq \mu_A(x) \leq 0.40 \rightarrow Es\_poco$$

$$0.40 < \mu_A(x) < 0.60 \rightarrow Es\_a\lg o$$

$$0.60 \leq \mu_A(x) \leq 0.80 \rightarrow Es\_\mathrm{mod}eradamente$$

$$0.80 < \mu_A(x) < 1.00 \rightarrow Es\_bas\tan te$$

$$1.00 = \mu_A(x) = 1.00 \rightarrow Es$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Traducción

x $\in$ U	**Etiqueta(μ)**	**A $\subseteq$ U**
Juan	Es	Joven
Marisa	Es bastante	Joven
Blas	Es algo	Joven
Ana	Es poco	Joven
Alex	No es	Joven

CONJUNTOS DIFUSOS

- Comentarios
  - La zona difusa no tiene por qué ser lineal
  - La escala lingüística es arbitraria
  - El número de elementos de la escala es arbitrario
  - Podemos definir conjuntos difusos complementarios
  - Cualquier conjunto es difuminable

CONJUNTOS DIFUSOS

- Caracterización y nomenclatura de conjuntos ordinarios

  – Implícitamente

    - En función del dominio: Naturales pares

  – Explícitamente

    - Identificando sus elementos: {2, 4, 6, 8}

  – Mediante una función booleana $\forall\ x \in U$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Caracterización y nomenclatura de conjuntos difusos
  - Dado un referencial U, y un subconjunto A de ese referencial U:

$$\forall A \subset U : A\_difuso \leftrightarrow \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Dado un referencial U, y sea A $\subset$ U

$$A\_ordinario \rightarrow \mu_A(x) = \{0, x \notin A : 1, x \in A\}$$

$$Naturales\_pares\_menores\_que\_10$$

$$\mu_A(x) = \{\mu_A(1) = 0 + \mu_A(2) = 1 + \mu_A(3) = 0 +$$

$$+ \mu_A(4) = 1 + \mu_A(5) = 0 + \mu_A(6) = 1 + \mu_A(7) = 0 +$$

$$+ \mu_A(8) = 1 + \mu_A(9) = 0 + \mu_A(10) = 0 + \ldots\}$$

$$\mu_A(x) = \{0/1 + 1/2 + 0/3 + 1/4 + 0/5 +$$

$$+ 1/6 + 0/7 + 1/8 + 0/9 + 0/10 + \ldots\}$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Estructura algebraica
  - Conjunto vacío

$$Universo\_referencial: U$$

$$\mathrm{Z} \subset U \,/\, \exists \mu_{\mathrm{Z}}(x): U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$\mathrm{Z} = \varnothing \leftrightarrow \mu_{\mathrm{Z}}(x) = 0 \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Identidad

$$Universo\_referencial : U$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U \,/\, \exists \mu_B(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$A = B \leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

Complementariedad

$$Universo\_referencial : U$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$\neg A = A' \leftrightarrow \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Inclusión

$$Universo\_referencial : U$$

$$A \subset U / \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U / \exists \mu_B(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset A \leftrightarrow \mu_B(x) \leq \mu_A(x) : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Ejemplo de inclusión

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A \subset U \;/\; A = \{1,2,3,4\}$$

$$B \subset U \;/\; B = \{1,3\}$$

$$\mu_A(x) = \{1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 0/5 + 0/6\}$$

$$\mu_B(x) = \{1/1 + 0/2 + 1/3 + 0/4 + 0/5 + 0/6\}$$

$$1/1 = 1/1 : 1/2 > 0/2 : 1/3 = 1/3$$

$$1/4 > 0/4 : 0/5 = 0/5 : 0/6 = 0/6$$

CONJUNTOS DIFUSOS

Unión

$$Universo\_referencial : U$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U \,/\, \exists \mu_B(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$C \subset U \,/\, \exists \mu_C(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$C = A \cup B \leftrightarrow \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} : \forall x \in U$$

$$Asociatividad : A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Intersección

$$Universo\_referencial : U$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U \,/\, \exists \mu_B(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$C \subset U \,/\, \exists \mu_C(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$C = A \cap B \leftrightarrow \mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} : \forall x \in U$$

$$Asociatividad : A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

CONJUNTOS DIFUSOS

Leyes de DeMorgan

$$Universo\_referencial : U$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U \,/\, \exists \mu_B(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

1^{a} *Ley*

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\neg[\mu_A(x) \vee \mu_B(x)] = [\neg \mu_A(x) \wedge \neg \mu_B(x)] : \forall x \in U$$

2^{a} *Ley*

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

$$\neg[\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)] = [\neg \mu_A(x) \vee \neg \mu_B(x)] : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

Demostración 1ª ley de DeMorgan (1)

$$Universo\_referencal : U$$

$$A \subset U / \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U / \exists \mu_B(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$\neg(A \cup B) \rightarrow \mu_{\neg(A \cup B)}(x) = 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} : \forall x \in U$$

$$\neg A \cap \neg B \rightarrow \mu_{\neg A \cap \neg B}(x) = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

Demostración 1ª ley de DeMorgan (2)

$$Casos\_extremos$$

$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x) : \forall x \in U$$

$$1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = 1 - \mu_A(x) : \forall x \in U$$

$$\min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} = 1 - \mu_A(x) : \forall x \in U$$

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) : \forall x \in U$$

$$1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = 1 - \mu_B(x) : \forall x \in U$$

$$\min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} = 1 - \mu_B(x) : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

Leyes distributivas

$$Universo\_referencial\_U$$

$$A \subset U / \exists \mu_A(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U / \exists \mu_B(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$C \subset U / \exists \mu_C(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$1^a\_ley$$

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

$$\mu_C(x) \wedge [\mu_A(x) \vee \mu_B(x)] = [\mu_C(x) \wedge \mu_A(x)] \vee [\mu_C(x) \wedge \mu_B(x)] : \forall x \in U$$

$$2^a\_ley$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$$

$$\mu_C(x) \vee [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)] = [\mu_C(x) \vee \mu_A(x)] \wedge [\mu_C(x) \vee \mu_B(x)] : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Los conjuntos difusos no son un álgebra de Boole(1)

$$Ley\_del\_tercero\_excluido$$

$$Universo\_referencial\_U$$

$$Conjuntos\_ordinarios: A \cup \neg A = U$$

$$Conjuntos\_difusos:$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) \to U : [0,1] \forall x \in U$$

$$\neg A \to \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) : \forall x \in U$$

$$A \cup \neg A \to \mu_{A \cup A'}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_{A'}(x)\} = \max\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} : \forall x \in U$$

$$\mu_{A \cup A'}(x) \geq \frac{1}{2}$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Los conjuntos difusos no son un álgebra de Boole(2)

$$Ley\_de\_no\_contradicción$$

$$Universo\_referencial\_U$$

$$Conjuntos\_ordinarios: A \cap \neg A = \varnothing$$

$$Conjuntos\_difusos:$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) \to U : [0,1] \forall x \in U$$

$$\neg A \to \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) : \forall x \in U$$

$$A \cap \neg A \to \mu_{A \cap A'}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_{A'}(x)\} = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_A(x)\} : \forall x \in U$$

$$\mu_{A \cap A'}(x) \leq \frac{1}{2}$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Producto de conjuntos difusos

$$Universo\_referencial\_U$$

$$A \subset U / \exists \mu_A(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U / \exists \mu_B(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$A \times B \rightarrow \mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x) : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Relación Producto-Intersección

$$Conjuntos\_ordinarios$$

$$A \times B = A \cap B$$

$$Conjuntos\_difusos$$

$$Universo\_referencial\_U$$

$$A \subset U / \exists \mu_A(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U / \exists \mu_B(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$A \times B \rightarrow \mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x) : \forall x \in U$$

$$A \cap B \rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} : \forall x \in U$$

$$\mu_{AB}(x) < \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} : \forall x \in U$$

$$A \times B \subset A \cap B$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Suma y suma acotada

$$Universo\_referencial\_U$$

$$A \subset U / \exists \mu_A(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U / \exists \mu_B(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$A + B \rightarrow \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) : \forall x \in U$$

$$A \oplus B \rightarrow \mu_{A \oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Diferencia y diferencia absoluta

$$Universo\_referencial\_U$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$B \subset U \,/\, \exists \mu_B(x) \rightarrow U : [0,1] \forall x \in U$$

$$A - B \rightarrow \mu_{A-B}(x) = \mu_A(x) - \mu_B(x) : \forall x \in U$$

$$|A - B| \rightarrow \mu_{|A-B|}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)| : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Núcleo de un conjunto difuso

$$Universo\_referencial\_U$$

$$A \subset U \,/\, \exists \mu_A(x) \rightarrow U:[0,1] \forall x \in U$$

$$Núcleo: N_A = \{x \in U \,/\, \mu_A(x) = 1\}$$

$$A = Normalizado \leftrightarrow N_A \neq \{\emptyset\}$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Relación difusa
  - Dado un referencial U, definimos una relación difusa de orden “n” en U, como un conjunto difuso A en el espacio U x U x…x U (n veces), caracterizado por una función de grado de pertenencia del tipo:

$$\mu_A(x1,...,xn) : \forall x \in U$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Ejemplo
  - Referencial U = {1, 2, 3, 4}
  - Relación difusa de orden 2
  - A = {números aproximadamente iguales}

	U2			
U1	1	2	3	4
1	1.0	0.8	0.2	0.0
2	0.8	1.0	0.8	0.2
3	0.2	0.8	1.0	0.8
4	0.0	0.2	0.8	0.0

CONJUNTOS DIFUSOS

- Representación y razonamiento
  - Normalmente se tarda alrededor de 45´ en llegar desde Oleiros a Santiago, por la autopista, y con tráfico ligero
  - No es previsible que el paro disminuya en España, al menos de manera drástica, en los próximos meses
  - La mayoría de los expertos opinan que la probabilidad de un terremoto serio en el Caurel es pequeña en un futuro inmediato

CONJUNTOS DIFUSOS

- Cuestiones importantes
  - Predicados difusos, cuantificadores difusos, probabilidades difusas
  - El conocimiento derivado del sentido común es léxicamente impreciso
  - El conocimiento derivado del sentido común es no categórico
  - Las lógicas de 1er orden, o las teorías clásicas de la probabilidad no son suficientes para representar el sentido común

CONJUNTOS DIFUSOS

- Características
  - En lógica difusa, el razonamiento categórico es un caso particular del razonamiento aproximado
  - En lógica difusa todo es cuestión de grado
  - Cualquier sistema lógico puede ser difuminado
  - En lógica difusa el conocimiento se interpreta como una colección de restricciones difusas que operan sobre variables
  - En lógica difusa los procesos inferenciales son propagaciones de las restricciones difusas

CONJUNTOS DIFUSOS

- Implicación difusa
  - Si x es A Entonces y es B

$$Universo\_referencial\_U$$

$$A \subset U / \exists \mu_A(x) : U \rightarrow [0,1] \forall x \in U$$

$$Universo\_referencial\_V$$

$$B \subset V / \exists \mu_B(y) : V \rightarrow [0,1] \forall y \in V$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \oplus B : en\_U \times V$$

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\} : x \in U, y \in V$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Modus Ponens Generalizado:
  - Si x es A entonces y es B
  - x es A*
  - y es B*

$$\mu_{B*}(y) = \sup_V\{[\neg A \oplus B] \cap A*\}$$

$$A \subset U : A* \subset U$$

$$B \subset V : B* \subset V$$

$$\mu_{B*}(y) = \sup_V\{\min[\min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)], \mu_{A*}(x)]\}$$

$$x \in U : y \in V$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Ejemplo
  - Sean A $\subset$ U, A* $\subset$ U, B $\subset$ V, B* $\subset$ V
  - U = V = {1, 2, 3, 4}

$$\mu_A(x) = \{0.0/1 + 0.6/2 + 1.0/3 + 0.5/4\}$$

$$\mu_{A*}(x) = \{0.0/1 + 0.2/2 + 0.6/3 + 1.0/4\}$$

$$\mu_B(y) = \{0.0/1 + 1.0/2 + 0.6/3 + 0.2/4\}$$

$$x\_es\_A \rightarrow y\_es\_B$$

$$x\_es\_A*$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Encontrar:
  - $\neg$ A
  - Evaluar $\neg A \oplus B$ en U x V
  - Evaluar $[\neg A \oplus B] \cap A^*$ en U x V
  - Encontrar la expresión que caracteriza a B*

CONJUNTOS DIFUSOS

$$\neg A \rightarrow \mu_{\neg A}(x) = \{1.0/1 + 0.4/2 + 0.0/3 + 0.5/4\}$$

$$\neg A \oplus B : U \times V$$

	V			
U	1	2	3	4
1	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.4	1.0	1.0	0.6
3	0.0	1.0	0.6	0.2
4	0.5	1.0	1.0	0.7

CONJUNTOS DIFUSOS

$$A^* \to \mu_{A^*}(x) = \{0/1 + 0.2/2 + 0.6/3 + 1/4\}$$

$$(\neg A \oplus B) \cap A^* : U \times V$$

	V			
U	1	2	3	4
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.2	0.2	0.2	0.2
3	0.0	0.6	0.6	0.2
4	0.5	1.0	1.0	0.7

CONJUNTOS DIFUSOS

- Y el resultado final, que caracteriza al conjunto difuso B* es…

$$B^* \rightarrow \mu_{B^*}(y) = \sup_V \{(\neg A \oplus B) \cap A^*\} : U \times V$$

$$\mu_{B^*}(y) = \{0.5/1 + 1.0/2 + 1.0/3 + 0.7/4\} : y \in V$$

CONJUNTOS DIFUSOS

- Diferencias entre razonamiento (±) convencional y razonamiento difuso (1)
  – Modus Ponens Generalizado
  – Certeza
    - Lógica bivalente
      – Cierto o Falso
    - Sistemas multivaluados
      – Elemento de un conjunto finito
      – Un intervalo
      – Un álgebra de Boole

CONJUNTOS DIFUSOS

- Diferencias entre razonamiento (±) convencional y razonamiento difuso (2)
  - Predicados
    - Sistemas bivalentes
      - Predicados categóricos
    - Sistemas difusos
      - Predicados difusos
  - Modificadores
    - Sistemas clásicos : NOT
    - Sistemas difusos : MUY, MÁS O MENOS, BASTANTE,…

CONJUNTOS DIFUSOS

- Diferencias entre razonamiento (±) convencional y razonamiento difuso (3)
  - Cuantificadores
    - Sistemas clásicos: $\forall$, $\exists$
    - Sistemas difusos: pocos, bastantes, la mayoría,…
  - Probabilidades
    - Sistemas clásicos: probabilidad numérica
    - Sistemas difusos: etiquetas lingüísticas (plausible,…)

CONJUNTOS DIFUSOS

- Diferencias entre razonamiento (±) convencional y razonamiento difuso (4)
  - Posibilidades
    - A diferencia de lo que ocurre con los sistemas lógicos clásicos, el concepto de posibilidad en los sistemas difusos no es bivalente. Al igual que sucede con las probabilidades, las posibilidades pueden ser tratadas como variables lingüísticas que adoptan valores del tipo: casi imposible, bastante posible,…

CONJUNTOS DIFUSOS

- Modos de Razonamiento (1)
  - Razonamiento categórico
    - Utiliza declaraciones difusas, pero no emplea ni cuantificadores difusos ni probabilidades difusas
    - Ejemplo
      - María es una chica delgada
      - María es una chica muy inteligente
      - ___________________________________
      - María es una chica delgada y muy inteligente

CONJUNTOS DIFUSOS

- Modos de Razonamiento (2)
  - Razonamiento Silogístico
    - Produce inferencias con premisas que incorporan cuantificadores difusos
    - Ejemplo
      - La mayoría de los suecos son rubios
      - La mayoría de los suecos rubios son altos
      - ___________________________________
      - (La mayoría)^2 de los suecos son rubios y altos
      - (La mayoría)^2 es el cuadrado de (La mayoría) en aritmética difusa

CONJUNTOS DIFUSOS

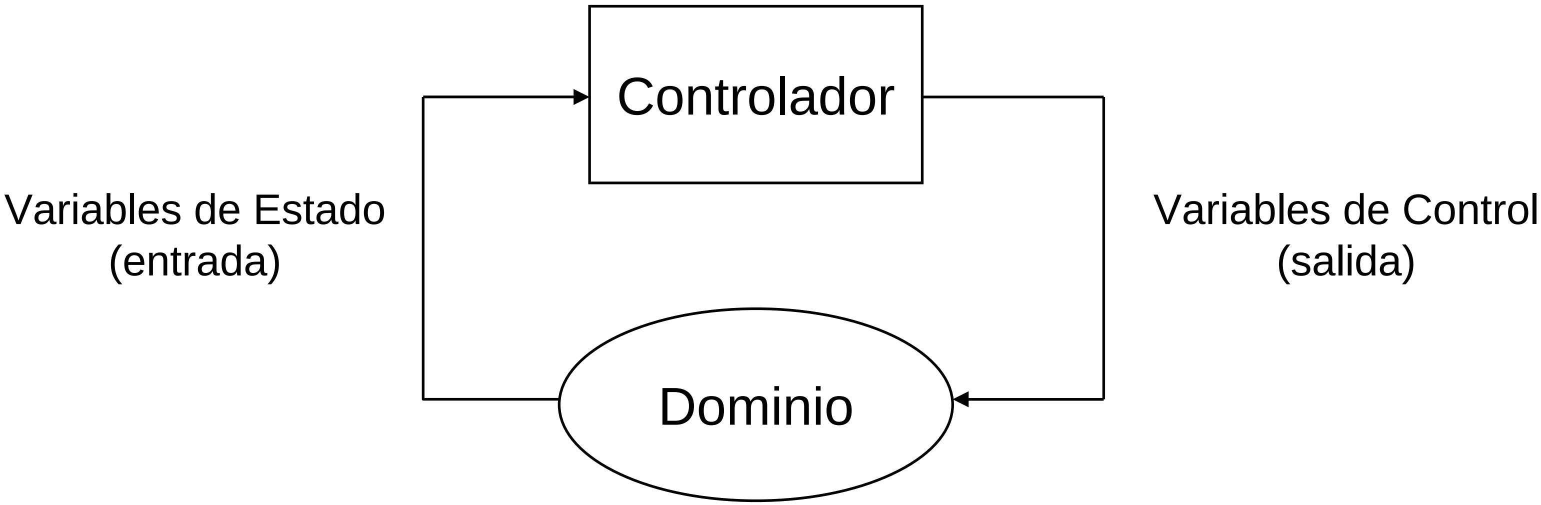
- Modos de Razonamiento (3)
  - Razonamiento Cualitativo
    - Se define como un modo de razonamiento en el cual las relaciones entrada/salida de un sistema se representan por medio de una colección de reglas difusas de tipo IF-THEN, en las que los antecedentes y los consecuentes incluyen variables lingüísticas
    - Este tipo de razonamiento es el empleado habitualmente en las aplicaciones de la lógica difusa al análisis de sistemas y al control de procesos

Control Difuso

- Control
  - Cuando hablamos de control nos referimos a la regulación de características que pueden ser físicas, mecánicas, numéricas, etc.
  - Ejemplos de características a controlar serían: la temperatura, la corriente eléctrica, el fluido de gases o líquidos, medidas financieras como el nivel de caja óptimo, el tiempo de espera en un semáforo, etc.
- Controlador
  - Un controlador es un mecanismo que lee una serie de variables de estado de un determinado dominio, en base a estas entradas decide cómo actuar sobre el dominio modificando una serie de variables de control
  - Ej. Un termostato lee la temperatura ambiente, cuando esta cae por debajo de un mínimo enciende la caldera, cuando sobrepasa un máximo apaga la caldera

Control Difuso

- Partes de un controlador



Control Difuso

- Partes de un controlador difuso
  - Codificación (Fuzzificación)
    - Se encarga de leer y codificar las variables de entrada
    - Estas variables de entrada serán datos numéricos no difusos (crisp) que es necesario convertir a datos difusos para ser tratados por el controlador difuso
    - Por ejemplo, si leemos que la temperatura es de 25º C esto se puede codificar como que la temperatura pertenece al conjunto “temperatura alta”, con un grado de pertenencia del 0,75.

Control Difuso

- Partes de un controlador difuso
  - Base de conocimiento
    - Contiene el conocimiento asociado al dominio de la aplicación y los objetivos del control
    - Está formado por un conjunto de reglas difusas de la forma:

      Si (X1 es A1) y (X2 es A2) y … (Xn es An) entonces (Y es B)

      Donde Xi son variables de estado, Y es una variable de control y los Ai y B son conjuntos difusos.
    - Ejemplo: Si la temperatura es alta la potencia de la caldera tiene que ser baja

Control Difuso

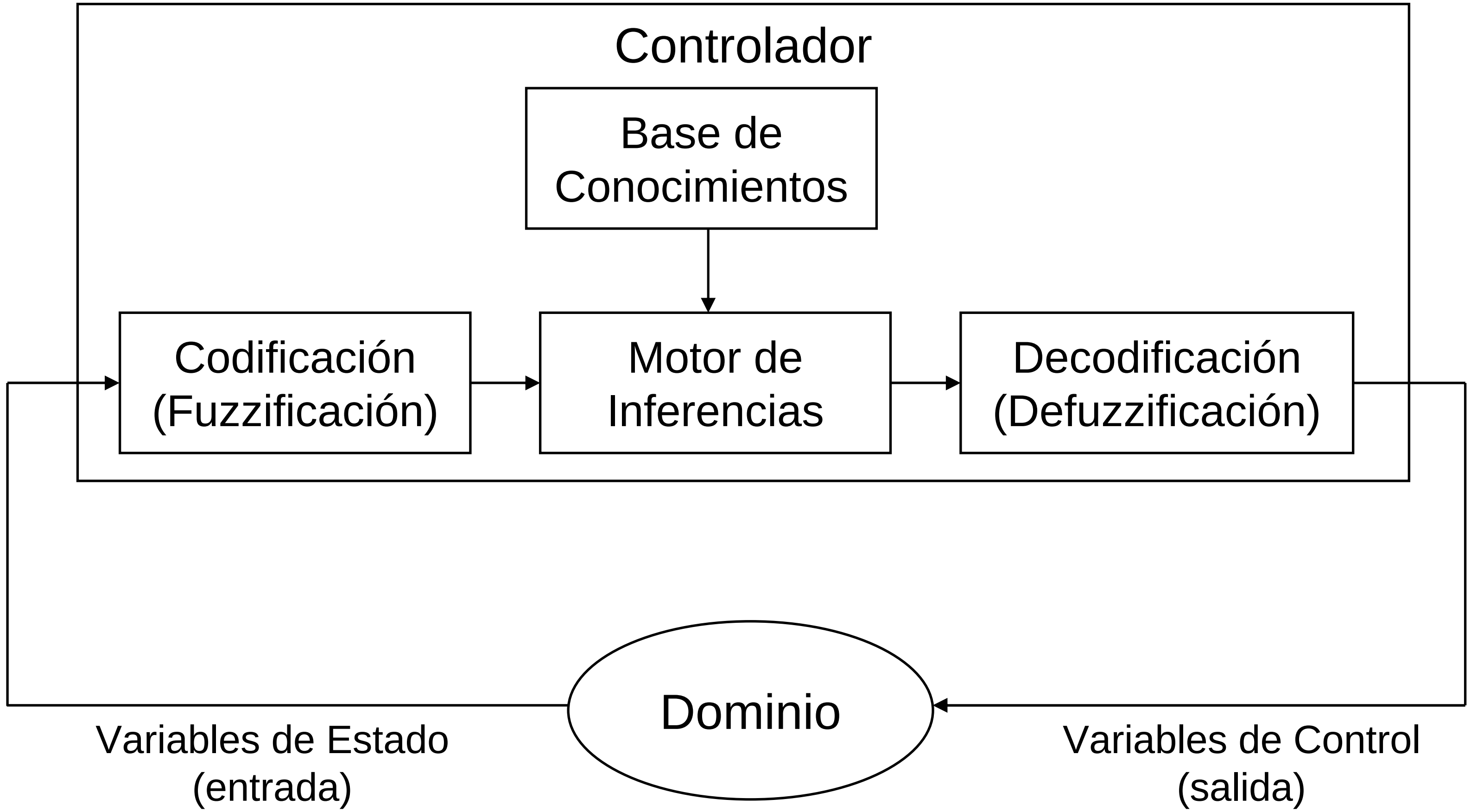
- Partes de un controlador difuso
  - Motor de inferencias
    - Es el núcleo del controlador difuso
    - Infiere las acciones de control utilizando las reglas de la base de conocimientos y simulando el proceso de decisión humano mediante la implicación difusa y las reglas de inferencia de la lógica difusa

Control Difuso

- Partes de un controlador difuso
  - Decodificación (Defuzzificación)
    - La salida de un controlador difuso es una variable difusa que es necesario convertir en una variable concreta (crisp) del dominio de discurso
    - El proceso de decodificación genera una acción no difusa a partir da la acción difusa resultante del sistema de inferencia
    - Ejemplo, el resultado puede ser: potencia de la caldera media con un grado de pertenencia del 0,25 y potencia de la caldera baja con un grado de pertenencia del 0,5. La decodificación convertirá este conjunto difuso en el valor exacto al que hay que poner la potencia de la caldera

Control Difuso

- Partes de un controlador difuso



Control Difuso

- Implicación clásica
  - La implicación en lógica clásica tiene la siguiente tabla de verdad

A	B	$A \rightarrow B$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

- Ejemplo

Llueve	Nubes	Si Llueve $\rightarrow$ Hay Nubes	Explicación
0	**0**	**1**	**Si no llueve ni hay nubes no se contradice la implicación**
0	**1**	**1**	**Si no llueve pero hay nubes no se contradice la implicación**
1	**0**	**0**	**Si llueve y no hay nubes la implicación es falsa**
1	**1**	**1**	**Si llueve y hay nubes la implicación se cumple**

Control Difuso

- Implicación en control difuso
  - La implicación puede interpretarse como una implicación “local” y no “global” como en lógica clásica
  - Quiere decir que la implicación se cumple cuando el antecedente y el precedente son ciertos
  - En lógica difusa significa que el valor de verdad de la función de implicación será alto si el valor de verdad del antecendente y el consecuente es alto.

Abrir válvula	Salir gas	Abrir válvula → Salir gas	Explicación
0	**0**	**0**	**Esta situación es indeterminada no se considera que se cumpla la implicación**
0	**1**	**0**	**Esta situación es indeterminada no se considera que se cumpla la implicación**
1	**0**	**0**	**De darse esta situación no se cumpliría la implicación**
1	**1**	**1**	**Si abro la válvula sale gas, la implicación se cumple**

Control Difuso

- Implicación en control difuso (cont.)
  - La implicación se convierte en una regla

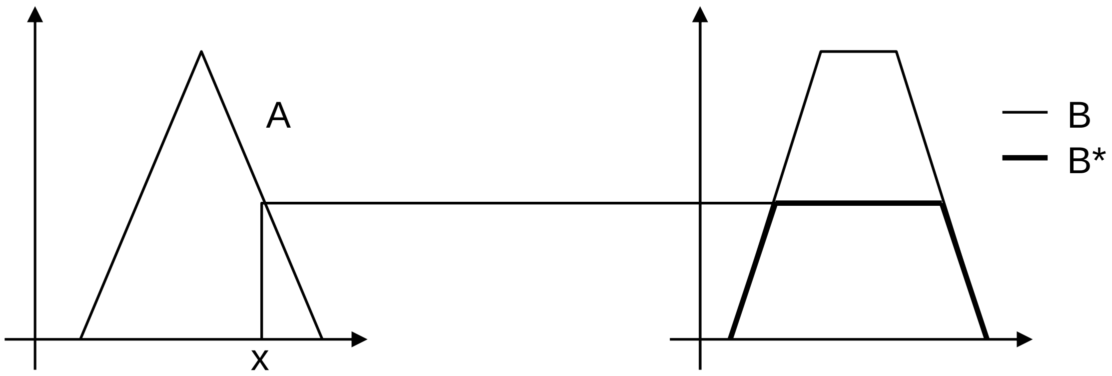
    IF A THEN B ELSE NADA
  - La función de implicación definida de esta forma es igual a la función de conjunción
    - $f_{\rightarrow}(a,b) = f_{\wedge}(a,b)$
  - Este tipo de implicación se conoce como implicación de Mamdani ya que fue el primer autor que la propuso en un trabajo de control difuso
  - Para representar la conjunción puede utilizarse cualquier norma aunque lo habitual es emplear la norma estándar del mínimo
    - $f_{\rightarrow}(a,b) = f_{\wedge}(a,b) = \min(a,b)$

Control Difuso

- Ejemplo de implicación difusa
  – Modus ponens generalizado

    IF x es A THEN y es B
    x es A*
    ----
    y es B*

  – Representación gráfica del operador de implicación de Mamdani



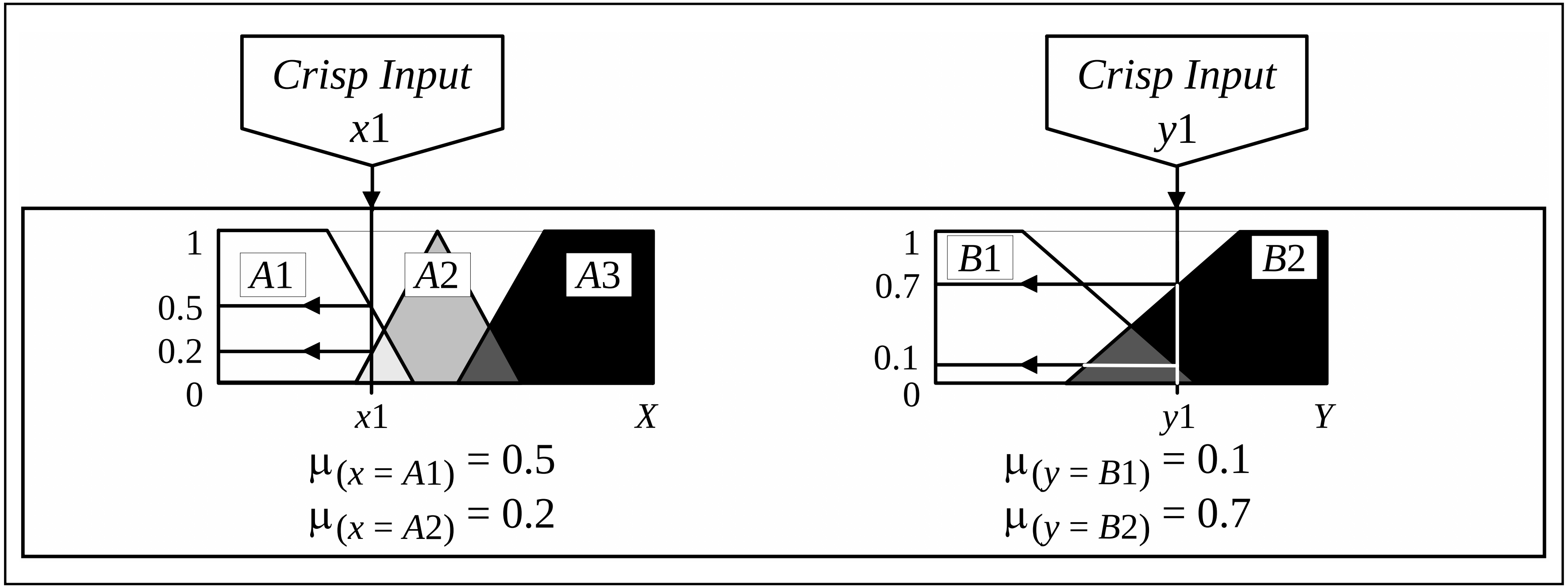
Control Difuso (Ejemplo)

- Reglas difusas de la base de conocimientos

Rule: 1		Rule: 1	
IF	x is A3	IF	project_funding is adequate
OR	y is B1	OR	project_staffing is small
THEN	z is C1	THEN	risk is low
Rule: 2		**Rule: 2**	
IF	x is A2	IF	project_funding is marginal
AND	y is B2	AND	project_staffing is large
THEN	z is C2	THEN	risk is normal
Rule: 3		**Rule: 3**	
IF	x is A1	IF	project_funding is inadequate
THEN	z is C3	THEN	risk is high

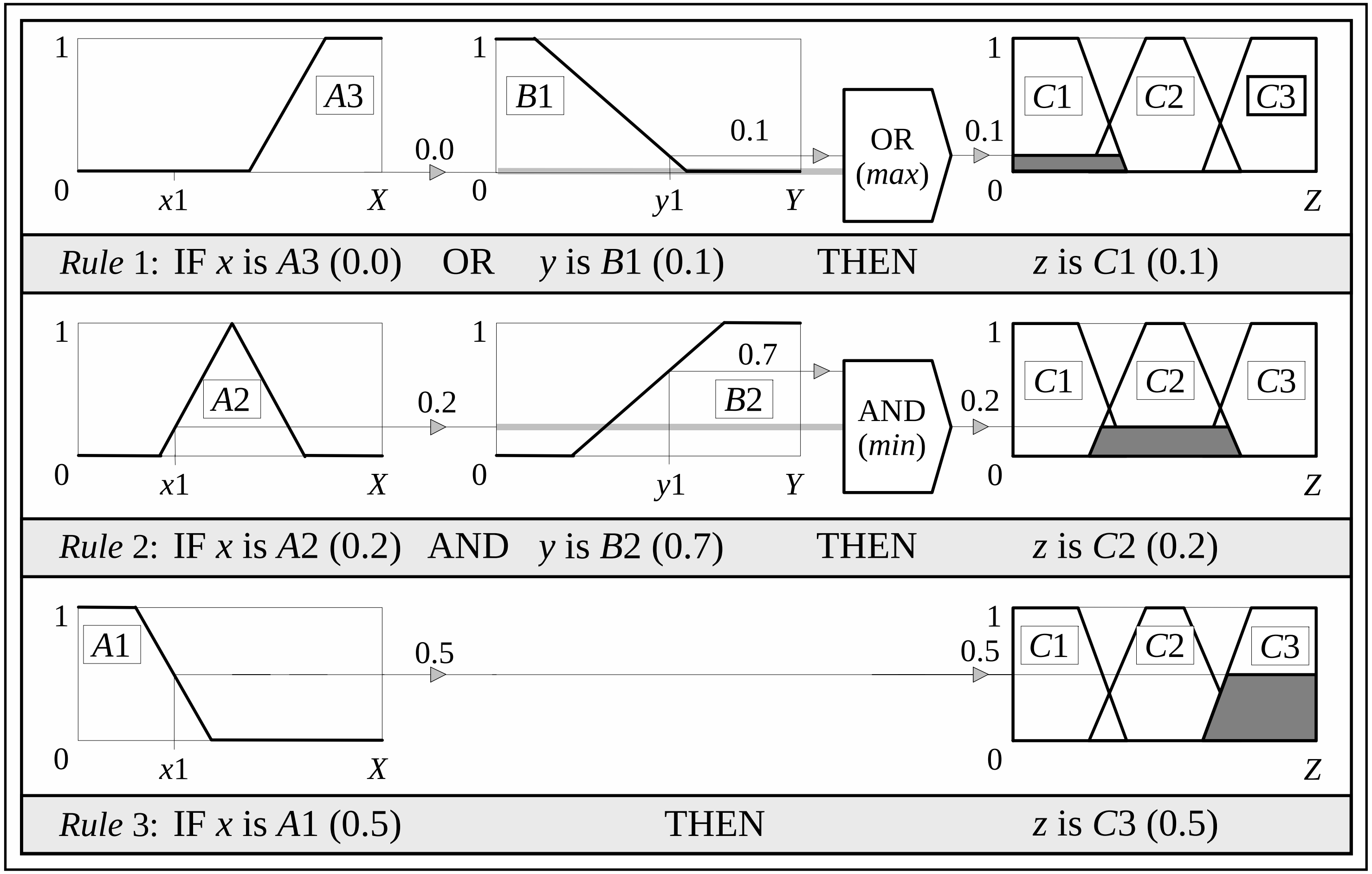
Control Difuso (Ejemplo)

- Codificación
  - Variable x1 en el referencial {A1, A2, A3}
  - Variable y1 en el referencial {B1. B2}



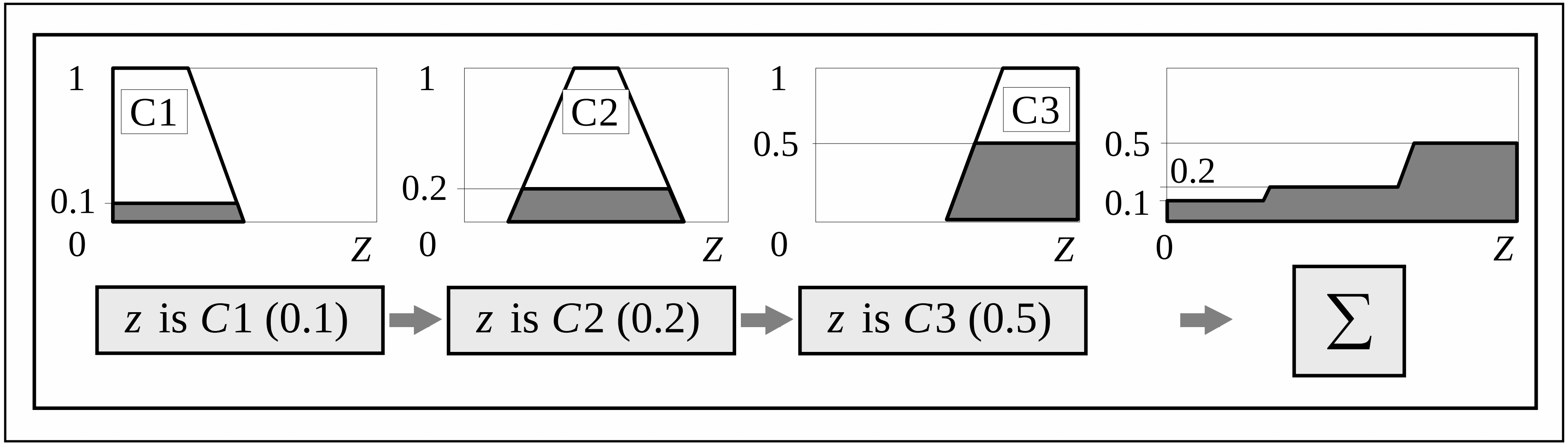
Control Difuso (Ejemplo)

- Razonamiento (evaluación de reglas)



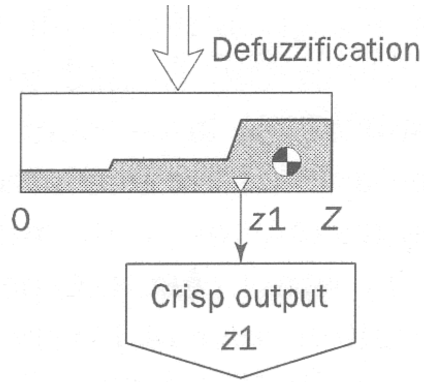
Control Difuso (Ejemplo)

- Razonamiento
  (agregación de los consecuentes de las reglas)



Control Difuso (Ejemplo)

- Decodificación
  - Variable Z en el referencial {C1, C2, C3} se convierte a un valor numérico



  - Principal método de decodificación: Centro de Gravedad (COG) o método del centroide
    - Encuentra el punto en el que una línea vertical cortaría el conjunto difuso resultante en dos, cada parte con la misma "masa"

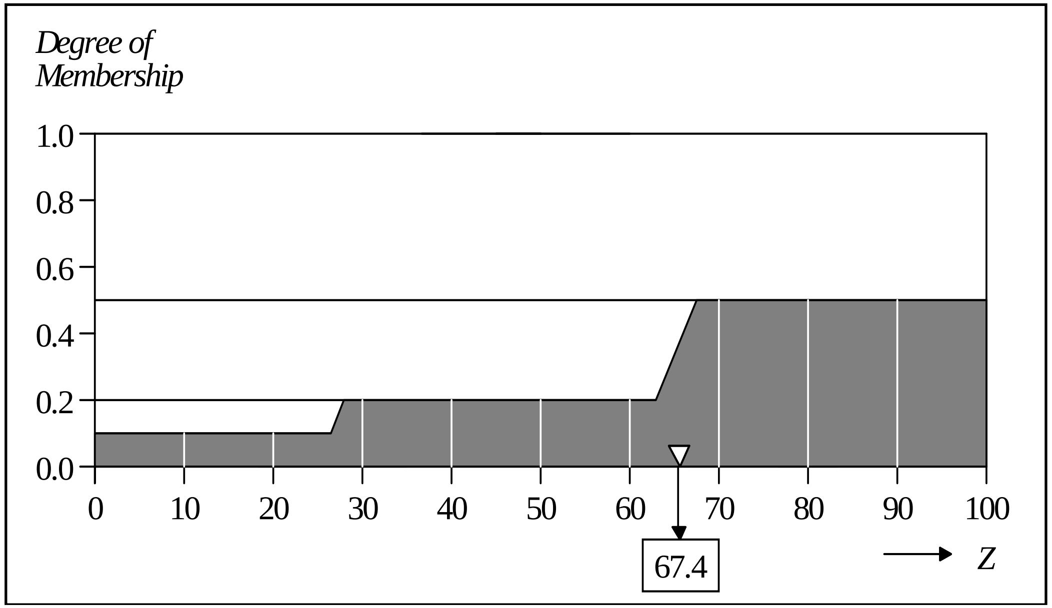
$$COG = \frac{\int_a^b \mu_A(x)\, x\, dx}{\int_a^b \mu_A(x)\, dx}$$

Control Difuso (Ejemplo)

- Decodificación (cont.)
  - El método COG implica la realización de una integral.
  - Puede obtenerse una aproximación razonable muestreando la función de pertenencia y hallando el centro de gravedad según esas muestras (no es necesaria la realización de una integral)
  - Ejemplo:

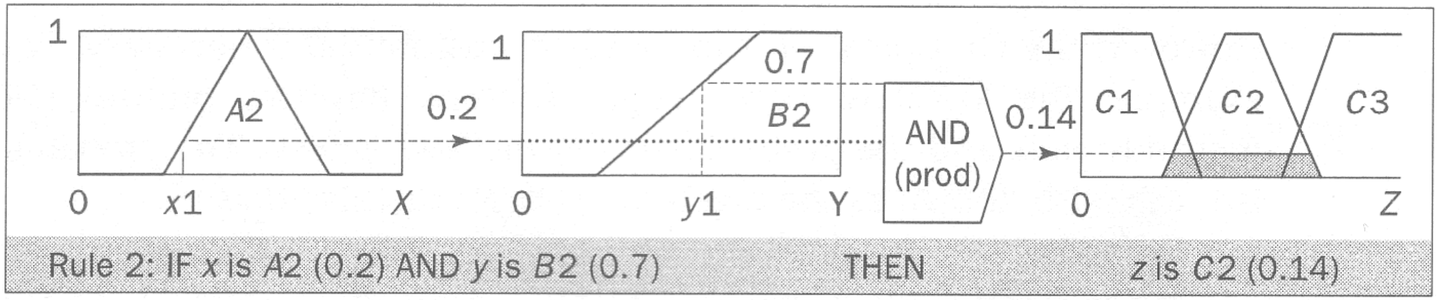
$$COG = \frac{(0+10+20)\times 0.1 + (30+40+50+60)\times 0.2 + (70+80+90+100)\times 0.5}{0.1+0.1+0.1+0.2+0.2+0.2+0.2+0.5+0.5+0.5+0.5} = 67.4$$

$$\mathrm{COG} = \frac{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)x}{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)}$$



Control Difuso (Ejemplo)

- Alternativas al razonamiento
  - Pueden utilizarse otras normas para la conjunción y otras conormas para la disyunción
  - Ejemplo: Utilización de la norma producto para representar el AND difuso



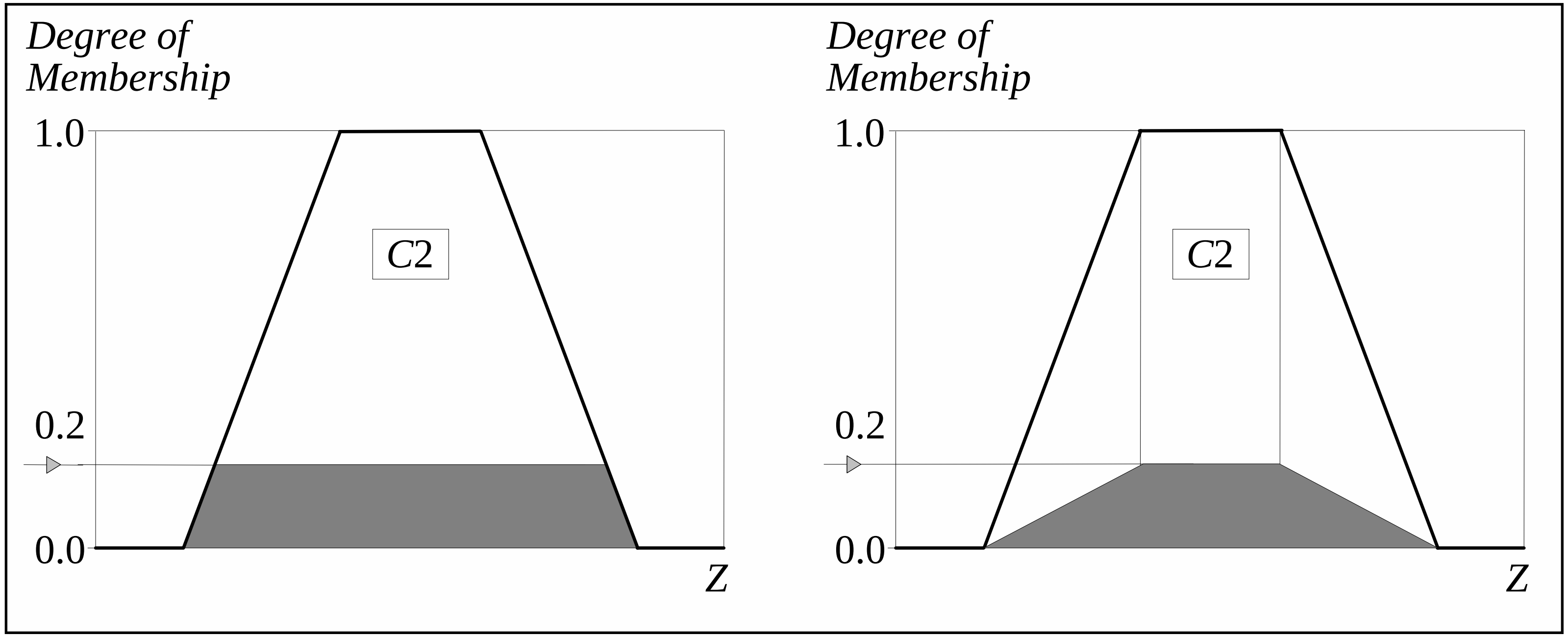
The AND *product* fuzzy operation

Control Difuso (Ejemplo)

- Alternativas al razonamiento (cont.)
  - La utilización de la norma mínimo o producto en la definición de la implicación también da lugar a variaciones ($f_{\rightarrow} = f_{\wedge}$).
  - Corte (implicación de Mamdani)
    - La evaluación de la implicación se hace mediante la aplicación de la función mínimo entre el antecedente de la regla y la función de pertenencia del resultado
    - La operación es poco compleja de realizar y el resultado es fácil de defuzzificar
    - Sin embargo al hacer un corte se pierde la verdadera forma del conjunto difuso
  - Escalamiento (implicación de Larsen)
    - La evaluación de la implicación se hace mediante la aplicación de la función producto entre el antecedente de la regla y la función de pertenencia del resultado
    - La operación es más compleja de realizar que el mínimo
    - Pero el resultado pierde menos información ya que lo que hace es escalar la función de pertenencia del resultado para que tenga la misma forma que la original pero sin que sobrepase el valor del antecedente

Control Difuso (Ejemplo)

- Alternativas al razonamiento (cont.)
  - Representación gráfica del Corte y Escalamiento



Links de lógica y control difusos

- Páginas web con herramientas y ejemplos
  - FuzzyJ ToolKit for the Java(tm) Platform & FuzzyJess
    - URL: http://www.iit.nrc.ca/IR_public/fuzzy/fuzzyJToolkit2.html
    - Muestra los ejemplos de la ducha, el camión y el péndulo realizados con el FuzzyJ Toolkit
  - Fuzzy Logic: Freeware and Shareware Tools
    - URL: www.emsl.pnl.gov:2080/proj/neuron/fuzzy/systems/shareware.html
    - Descripción de herramientas con lógica difusa
  - Fuzzy Logic: Demos
    - URL: http://www.emsl.pnl.gov:2080/proj/neuron/fuzzy/demos.html
    - Colección de demos de lógica difusa
  - Fuzzy Logic: The Net's Original Fuzzy Logic Archive
    - URL: http://www.austinlinks.com/Fuzzy/
    - Archivos con información sobre lógica difusa