

**EJERCICIOS RESUELTOS DE CADENAS DE MARKOV**

- 1) En un pueblo, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen días nublados. Con esta información modelar el clima del pueblo como una cadena de Markov.

**SOLUCIÓN:**

Se trata de una cadena de Markov con dos estados {Soleado, Nublado} que para abreviar representaremos por {S, N}, siendo la matriz de probabilidades de

$$\text{transición: } P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- 2) El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje  $n$ -ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

- Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena
- Dibujar el grafo asociado
- ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos.

**SOLUCIÓN:**

- a) Los estados de la cadena los denotaremos por { 0, 1, 2 } haciendo corresponder el 0 al bajo y 1 y 2 al primer y segundo piso respectivamente.

Las probabilidades de transición son:

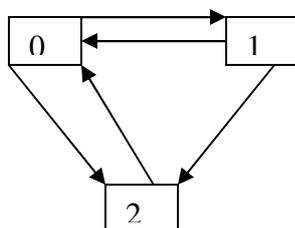
$p_{00} = P(R_n=0 / R_{n-1}=0)$ , esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta baja si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es 0, porque se supone que de etapa a etapa el ascensor se mueve.

$p_{01} = P(R_n=1 / R_{n-1}=0)$ , esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta primera si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es  $\frac{1}{2}$ . Basta leer el enunciado.

Y así sucesivamente vamos obteniendo las distintas probabilidades de transición cuya matriz es:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b)



c)

$\bar{q} \cdot P = \bar{q}$ , siendo  $q = (x, y, z)$  los valores de las probabilidades pedidas, añadiendo la ecuación  $x+y+z = 1$

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z), \text{ añadiendo } x+y+z = 1. \text{ produce el siguiente sistema:}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y - 4z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{cuyas soluciones son: } x=8/17; y=4/17; z=5/17$$

3º) Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a B es 0,4 y la de tener que ir a A es 0,2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0,2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0,1, irá a B con una probabilidad de 0,3 y a C con una probabilidad de 0,6.

- Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?
- ¿Cuales son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

### SOLUCIÓN:

La matriz de transición P es la siguiente para el orden A,B,C

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}; \text{ El apartado a) consiste en averiguar el término } p_{33}^4, \text{ es decir el}$$

término que ocupa la fila 3 y la columna 3 de la matriz  $P^4$ . lo cual se obtiene con la fila 3 y la columna 3 de  $P^2$ , cuyos valores son:

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & - & 0,48 \\ - & - & 0,48 \\ 0,18 & 0,30 & 0,52 \end{pmatrix}, \quad \text{por tanto el término buscado es:}$$

$$0,18 \cdot 0,48 + 0,30 \cdot 0,48 + 0,52 \cdot 0,52 = \mathbf{0,5008}$$

- c) Nos piden las probabilidades estacionarias. Para ello hay que resolver el siguiente sistema:

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} = (x, y, z) \quad ; \quad x + y + z = 1$$

Desarrollando resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -9x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 8y + 4z = 0 \\ 6x + 6y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{elimino } y \text{ en las dos primeras: } -33x + 12z = 0, \text{ y elimino } y \text{ en las}$$

dos últimas :  $12z=6$  ; de ambas se deduce que  $x = 2/11=0,1818$      $y = 7/22=0,3181$   
 $z = 0,5$ . En porcentajes serían el 18,18% para la ciudad A, el 31,81% para B y el 50% para la ciudad C.

4º) Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90% de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80% de que repita la vez siguiente. Se pide:

- Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy?
- Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?
- Supongamos que el 60% de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40% Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola.
- Determinar el estado estable.

**SOLUCIÓN:** La situación se puede modelar como una cadena de Markov con dos estados {Coca-Cola, Pepsi-Cola} = {C,P}

La matriz de transición para el orden C,P, es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- Se pide la probabilidad de transición en dos pasos, es decir que se pide el valor en fila 2, columna 1 para la matriz  $P^2$ , obteniéndose que este es :  $0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,34$
- Al igual que en el apartado anterior se pide el valor de probabilidad de transición en fila 1 y columna 1 para la matriz  $P^3$ . La matriz es  $P^3 = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 781 & 219 \\ 438 & 562 \end{pmatrix}$ ; esto quiere decir que la solución al problema es 0,781

- c) El vector de probabilidad inicial es  $(0,6, 0,4)$ , por tanto la probabilidad de consumir ambos estados a partir de tres etapas es:

$$(0,6 \ 0,4) \cdot P^3. \text{ Calculamos primero } P^2, \text{ resultando que } P^2 = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 83 & 17 \\ 34 & 66 \end{pmatrix},$$

Por tanto  $P^3 = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 781 & 219 \\ 438 & 562 \end{pmatrix}$ , entonces el resultado solicitado es

$\frac{1}{10000} (6438 \ 3562) = (0,6438, 0,3562)$ ; esto es que al cabo de tres compras el 64,38% comprará Coca Cola y el 35,62% comprará Pepsi Cola.

- d) El estado estable se determina resolviendo el sistema de ecuaciones:

$(x, y) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (x, y)$  añadiendo la ecuación  $x+y = 1$ , siendo  $x$  la probabilidad de que una persona compre Coca Cola a largo plazo e  $y$  lo mismo de que compre Pepsi Cola.

El sistema resultante es: 
$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
, obsérvese que las dos primeras ecuaciones son

la misma por tanto quedémonos con las dos últimas, obteniendo como solución:  
 $x = 2/3$  ;  $y = 1/3$ .

5º) La cervecería más importante del mundo (Guinness) ha contratado a un analista de investigación de operaciones para analizar su posición en el mercado. Están preocupados en especial por su mayor competidor (Heineken). El analista piensa que el cambio de marca se puede modelar como una cadena de Markov incluyendo tres estados, los estados G y H representan a los clientes que beben cerveza producida por las mencionadas cervecerías y el estado I representa todas las demás marcas. Los datos se toman cada mes y el analista ha construido la siguiente matriz de transición de los datos históricos.

	G	H	I
G	0,7	0,2	0,1
H	0,2	0,75	0,05
I	0,1	0,1	0,8

¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos cervecerías grandes.?

**SOLUCIÓN:**

Tres estados {G, H, I}

El problema consiste en resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$(x, y, z) \cdot P = (x, y, z); x + y + z = 1$ , siendo  $x$  la probabilidad de que el consumidor compre G,  $y$  de que el consumidor compre H y  $z$  la del que consumidor compre I.

De ambas expresiones se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ 20x - 25y + 10z = 0 \\ 10x + 5y - 20z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ cuya solución es } x = 9/26; y = 10/26 \quad z = 7/26$$

6º) En una comunidad hay 3 supermercados (S1, S2, S3) existe la movilidad de un cliente de uno a otro. El 1 de septiembre,  $\frac{1}{4}$  de los clientes va al S1,  $\frac{1}{3}$  al S2 y  $\frac{5}{12}$  al S3 de un total de 10.000 personas. Cada mes el S1 retiene el 90% de sus clientes y pierde el 10% que se va al S2. Se averiguó que el S2 solo retiene el 5% y pierde el 85% que va a S1 y el resto se va a S3, el S3 retiene solo el 40%, pierde el 50% que va al S1 y el 10% va al S2.

- Establecer la matriz de transición
- ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?
- Hallar el vector de probabilidad estable.

**SOLUCIÓN:**

a) La matriz de transición para el orden S1, S2, S3 es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,85 & 0,05 & 0,10 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

b) Para el mes de noviembre (han transcurrido 2 meses desde 1 de septiembre), la proporción de clientes es

$$\left( \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{12} \right) P^2 = \left( \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{12} \right) \begin{pmatrix} 0,895 & 0,095 & 0,01 \\ 0,8575 & 0,0975 & 0,045 \\ 0,735 & 0,095 & 0,17 \end{pmatrix} = (0,8158 \quad 0,0958 \quad 0,0883)$$

La proporción es del 81,58% para S1, 9,58% para S2 y 8,83% para S3

c) El vector de probabilidad estable se obtiene resolviendo:

$$(x, y, z) \cdot P = (x, y, z); x + y + z = 1$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} -10x + 85y + 50z = 0 \\ 10x - 95y + 10z = 0 \\ y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{de donde } y = 2/31, \quad z = 1/93; \quad x = 86/93$$

7º) Los consumidores de café en el área de Pontevedra usan tres marcas A, B, C. En marzo de 1995 se hizo una encuesta en la que entrevistó a las 8450 personas que compran café y los resultados fueron:

Compra actual	Compra en el siguiente mes			TOTALES
	Marca A	Marca B	Marca C	
Marca A = 1690	507	845	338	1690
Marca B = 3380	676	2028	676	3380
Marca C = 3380	845	845	1690	3380
TOTALES	2028	3718	2704	<b>8450</b>

- Si las compras se hacen mensualmente, ¿cuál será la distribución del mercado de café en Pontevedra en el mes de junio?
- A la larga, ¿cómo se distribuirán los clientes de café?
- En junio, ¿cuál es la proporción de clientes leales a sus marcas de café?

### SOLUCIÓN:

a) A la vista de las frecuencias anteriores, las probabilidades de transición, conservando el mismo orden que la tabla (A,B,C) es:

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{De marzo a Junio hay 4 etapas por lo que nos piden las}$$

probabilidades de transición al cabo de 4 meses, las que vendrán dadas por los coeficientes de  $P^4$

$$P^2 = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 24 & 50 & 26 \\ 23 & 51 & 26 \\ 25 & 40 & 35 \end{pmatrix} \quad P^4 = \frac{1}{10000} \begin{pmatrix} 2376 & 4790 & 2834 \\ 2375 & 4791 & 2834 \\ 2395 & 4690 & 2915 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0,2376 & 0,4790 & 0,2834 \\ 0,2375 & 0,4791 & 0,2834 \\ 0,2395 & 0,4690 & 0,2915 \end{pmatrix}$$

b) A la larga se trata de la situación estable:

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z) \quad ; \quad x + y + z = 1$$

$$\begin{cases} -7x + 2y + 2,5z = 0 \\ 5x - 4y + 2,5z = 0 \\ 2x + 2y - 5z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}, \text{ resolviendo se obtiene: } x = 5/21; y = 10/21; z = 2/7$$

c) En Marzo la proporción de clientes de A es:  $2028/8450 = 0,24$  ; para B es  $3718/8450 = 0,44$  y para C es  $2704/8450 = 0,32$ .

En el mes de junio la proporción es:

$$(0,24 \quad 0,44 \quad 0,32) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,24 \quad 0,464 \quad 0,296), \text{ es decir } 24\% \text{ para A, } 46,4\% \text{ para B y } 29,6\% \text{ para C.}$$