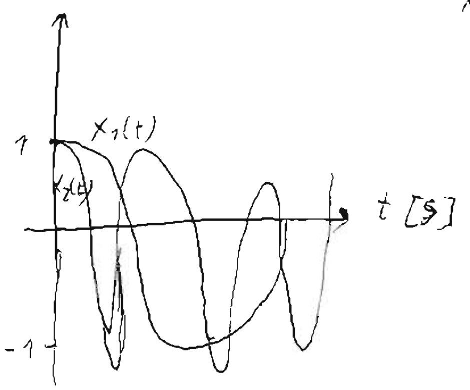
SAD- 3º (J.A. Noyr)

(2011-09-22)-1

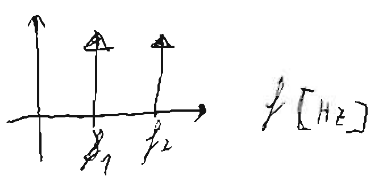
Usuario: 61 41 11 642

Password: ZZZ32hy2d



$x_1(t) = sen(2\pi f + \varphi)$

$f_1 < f_2$



Ancho de banda: Cuánto ocupa una señal en el dominio de la frecuencia.

Introducción a los SAD.

El tratamiento digital de señales se desarrolla mucho en los últimos 40 años:

- Fabricación de circuitos digitales.
- Avance en la informática (DSP- Digital Signal Processing).

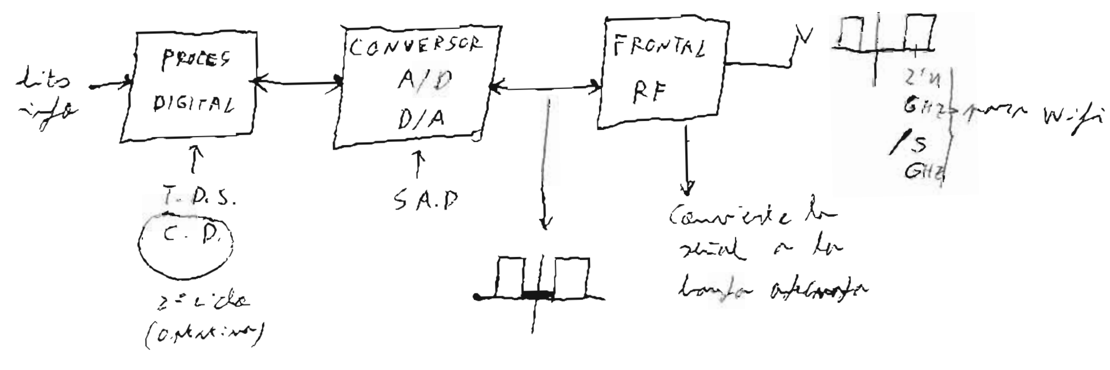
Con respecto a los circuitos digitales frente a los analógicos:

- Son más baratos
- Son más pequeños (MSI → LSI → VLSI).
- "Ley de Moore": Cada 18 meses se duplica el nº de transistores IC. (1965)
- Son más fiables: Para mismas entradas salidas similares siempre.
  * Firmware.
- Menor consumo de energía
- Facilidad de almacenamiento de la información.

Ventajas de los sistemas analógicos:

- Amplificación y acondicionamiento de la señal
- Los digitales no pueden trabajar a alta potencia.
- Frontal de RF: Traslada las señales en frecuencia.

TRANSCEIVER

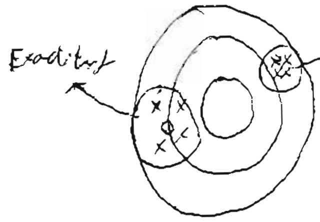


SAD - 3º (J.A. Noya) (2011-09-29)-2

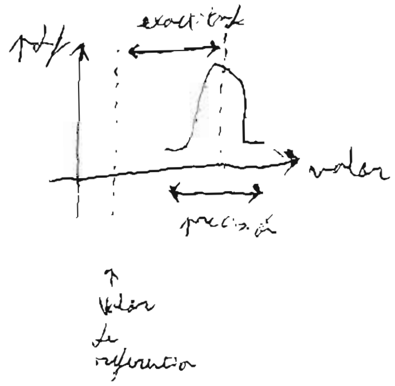
- Facilidad de integración.

- Precisión: Menor dispersión en los valores obtenidos, pero no implica proximidad al valor deseado.

Ejemplo diana:



Estadística:



Problemas del DSP:

- Requiere conversión A/D y D/A

Conversión A/D:

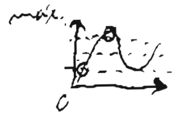
1) Muestrear la señal. Se puede hacer sin pérdidas (Teorema del muestreo).

$\Rightarrow x(n)$

$x[n] = [\text{valor}_1, \text{valor}_2, .., \text{valor}_n]$

Señal en tiempo discreto.

2) Cuantificación de las muestras: Conversión al dominio digital. A partir de las muestras cuantificadas no podremos recuperar las originales. Es la única etapa que introduce una distorsión en el proceso.



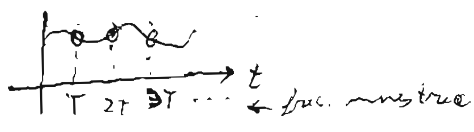
2 bits $\Rightarrow$ 4 tramos y cada tramo englobará múltiples valores originales en una misma calificación digital.

Señal analógica → ADC → bits

→ frecuencia de muestreo

→ bits precisión

La conversión se realiza con el ADC



$X(t): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Punto fijo en lugar de punto flotante (IEEE 754):

Trabajar con decimales convertidos a enteros, aumentando el nº de bits en las operaciones intermedias para minimizar los errores cometidos, conociendo siempre donde comienza la parte decimal.

David Goldberg "What every computer scientist should know about floating-point arithmetic", ACM (en la web de Oracle).

SAD - 3º (J.A. Mayo)

- Esquema de DSP:

Señal Analógica → Conversor A/D → (Señal Digital) → Procesado Digital (DSP) → (Señal Digital) → Conversor D/A → Señal Analógica

- Conversión A/D: Analog-to-Digital Converter (ADC).

Señal Analógica → ADC → bits

- Conversión D/A: Digital-to-Analog Converter (DAC)

bits → DAC → Señal Analógica

Los DAC y ADC son fundamentales en los sistemas de almacenamiento, procesado y transmisión de la información.

- Almacenamiento digital:

→ Transductor → (Señal Eléctrica (Analógica)) → ADC → (bits) → Memoria → (bits) → DAC → (Señal Eléctrica) → Transductor

- Transmisión digital:

→ Transductor → ADC → (bits) → TX Digital → Canal Digital → RX Digital → DAC → Transductor

- Conversión analógica/digital:

Conceptualmente es un proceso de tres pasos:

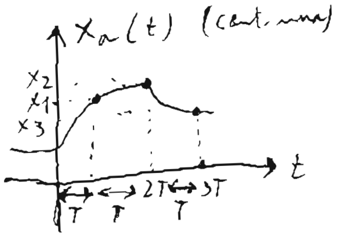
Señal analógica $x_a(t)$ → MUESTREO → (Señal discreta en tiempo $x(n)$ ó $x[n]$) → CUANTIFICACIÓN → (Señal cuantificada $x_q(n)$) → CODIFICACIÓN → bits

CUANTIFICACIÓN: (Suele presentar pérdidas)

CODIFICACIÓN: Trata de minimizar la cantidad de bits necesarios para almacenar la información (WAV vs MP3)

SAD- 3º (J. A. Noya)   (2011-10-05)-2

• Ejemplo:



$x(n) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ (discreta)

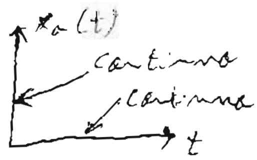
- Señal analógica o continua en tiempo.

Están definidas en todo instante de tiempo y toman valores sobre un intervalo continuo. Matemáticamente:

$t \equiv$ tiempo

$x_a(t) \equiv$ continua

$$x_a(t): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \rightsquigarrow x_a(t)$$



no necesariamente

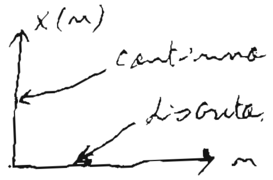
- Señal discreta en tiempo ($\neq$ señal digital).

Señal que sólo está definida en un conjunto finito (instantes discretos) del tiempo.

Se representa por $x(n)$ ó $x[n]$

$$x(n): \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightsquigarrow x(n)$$

índice de la secuencia



$x(nT)$ } si se toman las muestras a intervalos regulares.
$T \equiv$ periodo

- Concepto de frecuencia en señales continuas y discretas.

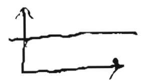
La frecuencia está relacionada con un tipo específico de movimiento periódico, denominado movimiento oscilatorio armónico, que se describe mediante funciones sinusoidales.

El concepto de frecuencia también está directamente relacionado con el del tiempo, y su dimensión es la inversa del tiempo.

tiempo t [s] $\Rightarrow$ frecuencia $F = \frac{1}{t}$ $[\frac{1}{s}] = [Hz]$ ciclos/segundo)

La señal sinusoidal de frecuencia más baja.

$F = 0 \Rightarrow T_p = \frac{1}{F} = \infty$



La señal sinusoidal de frecuencia más alta.

$F = \infty \Rightarrow T_p = 0$

Destacar que F puede tomar valores negativos.

$-\infty < F < \infty$

- Señales sinusoidales discretas en el tiempo.

Se definen como:

$x(n) = A \cdot \cos(\omega n + \theta)$, $-\infty < n < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$

$\uparrow$ indica o número de muestra (variable entera)

$A \equiv$ Amplitud

$\omega \equiv$ Frecuencia [radianes/muestra]

$\theta \equiv$ Fase [radianes]

Igual que en el caso continuo se puede hacer el cambio de variable para la frecuencia:

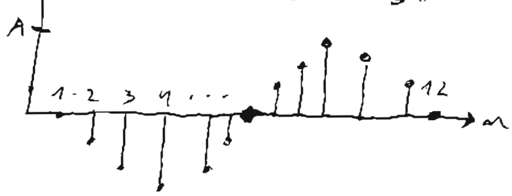
$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$ [ciclos/muestra].

$x(n) = A \cdot \cos(2\pi f n + \theta)$

Ejemplo: sinusoide $\omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f = \frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{1}{12}$ ciclos/muestra

y con fase $\theta = \frac{\pi}{3}$

$x(n) = A \cos\left(\frac{\pi}{6} n + \frac{\pi}{3}\right)$



Consecuentemente, la naturaleza del tiempo (continuo o discreto) afectará a la naturaleza de la frecuencia.

- Señales sinusoidales continuas en el tiempo.

$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty$

Se caracteriza por tres parámetros.

$A \equiv$ Amplitud, ya que $\cos(t) \in [-1, 1]$

$\Omega \equiv$ Frecuencia [radianes/s]

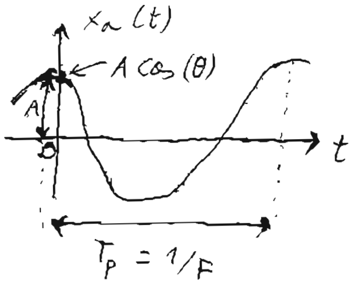
$\theta \equiv$ Fase [radianes]

En vez de Ω podemos usar la frecuencia F en Hz o ciclos/s

$\Omega = 2\pi F \Rightarrow F = \dfrac{\Omega}{2\pi}$ [Hz]

$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \theta)$

• Ejemplo:



- Propiedades:

1) $\forall$ valor fijo F, $x_a(t)$ es periódica.

$x_a(t + T_p) = x_a(t)$

donde $T_p = 1/F$ es el periodo fundamental.

$x_a(t+T_p) = A\cos(2\pi F(t+T_p)+\theta)$

$= A\cos(2\pi F t + 2\pi \underbrace{F T_p}_{=1} + \theta)$

$= A\cos(2\pi F t + \underbrace{2\pi + \theta}_{=\theta}) = x_a(t)$

2) Si tenemos dos señales sinusoidales continuas con diferentes frecuencias son diferentes.

3) Un incremento de F da lugar a un incremento de oscilación de la señal (mayor nº de periodos en el mismo tiempo).

• Propiedades de las sinusoides discretas en tiempo:

1) Una s.d.e.t. (← sinusoide discreta en tiempo) es periódica si y sólo si su frecuencia es un nº racional.

Una señal d.e.t. es periódica de periodo N con $N > 0$ si y sólo si $x(n+N) = x(n) \ \forall N \in \mathbb{Z}$

El valor mínimo de N para el que se cumple esa relación se llama periodo fundamental.

Demostración: para que una s.d.e.t. de frecuencia f_0 sea periódica:

$$A \cdot \cos(2\pi f_0 (N+n) + \theta) = A \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

Esta relación es cierta si y sólo si $\exists\, K \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$2\pi f_0 N = 2\pi K \Rightarrow f_0 = \frac{K}{N}$$

Como $K, N \in \mathbb{Z} \Rightarrow f_0$ es racional.

Para determinar el periodo fundamental hay que expresar f_0 de forma que K y N sean primos relativos.

NOTA: Esto significa que no todas las sinusoides discretas son periódicas.

Ejemplo:

a) Si $w = \frac{37}{11}\pi \Rightarrow wN = 2K\pi \Rightarrow N = \frac{2\pi K}{w} = \frac{2\pi K}{\frac{37\pi}{11}} = \frac{22}{37} K$

Si $K = 37 \Rightarrow N = 22 \Rightarrow$ la sinusoide es periódica.

b) Si $w = 2 \Rightarrow N = \frac{2\pi K}{w} = \pi K \Rightarrow \nexists\, K \in \mathbb{Z} / \pi K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ La sinusoide no es periódica.

NOTA: Una muy pequeña variación en el valor de la frecuencia puede dar lugar a una gran variación en el periodo fundamental.

Ejemplo: $f_1 = \frac{31}{60} \Rightarrow N_1 = 60$; $f_2 = \frac{30}{60} \Rightarrow N_2 = 2$

2) Las s.d.e.t. cuyas frecuencias están separadas un múltiplo entero de 2π son idénticas.

Demostración:

$$x(n) = A\cdot\cos((w_0+2\pi)n+\theta) = A\cdot\cos(w_0 n + \underbrace{2\pi n+\theta}_{\theta}),\ n\in\mathbb{Z}$$

$$= A\cdot\cos(wn+\theta) = x(n)$$

Por lo tanto todas las secuencias sinusoidales

$$x_K(n) = A\cdot\cos(w_K n+\theta),\ K=0,1,2.. ,\ -\infty<n<\infty,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$w_K = w_0 + 2\pi K,\ -\pi\le w_0\le\pi$$

son indistinguibles.

Cualquier secuencia resultante de una sinusoide discreta con frecuencia $|w|>\pi$ (es decir, $|f|>\frac{1}{2}$) es idéntica a una señal sinusoidal de frecuencia $|w|<\pi$ ($|f|<\frac{1}{2}$). Decimos que la sinusoide que tiene $|w|>\pi$ es un alias de la que tiene $|w|<\pi$.

Las frecuencias $\underbrace{-\pi\le w\le\pi}$ ($\underbrace{-\frac{1}{2}\le f\le\frac{1}{2}}$) son únicas y las restantes son alias.

NOTA: En el caso continuo

$$-\infty<\Omega<\infty,\ -\infty<F<\infty$$

3) La tasa de oscilación más alta de una s.d.e.t. se alcanza cuando $w=\pi$ (o $w=-\pi$), es decir, $f=\frac{1}{2}$ (o $f=-\frac{1}{2}$).

$x(n) = \cos w_0 n$ cuando w_0 varía entre 0 y π

w_0	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π ← valor máxima
f	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
N	∞	16	8	4	2

$\pi\le w_0\le 2\pi$, $w_1=w_0$, $w_2=2\pi-w_0$, $\pi\le w_1\le 2\pi$, $\pi\le w_2\le 0$

$$x_1(n) = A\cdot\cos(w_1 n) = A\cdot\cos(w_0 n)$$

$$x_2(n) = A\cdot\cos(w_2 n) = A\cdot\cos((2\pi-w_0)n)$$

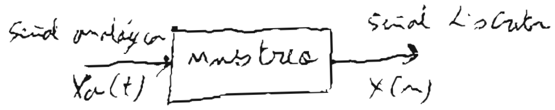
$$= A\cdot\cos(w_0 n + 2\pi n) = A\cdot\cos(w_0 n) = x_1(n)$$

w_2' es un alias de w_1; $w=2\pi \Rightarrow$ señal cte. como $w=0$ ← Tasa mínima de oscilación

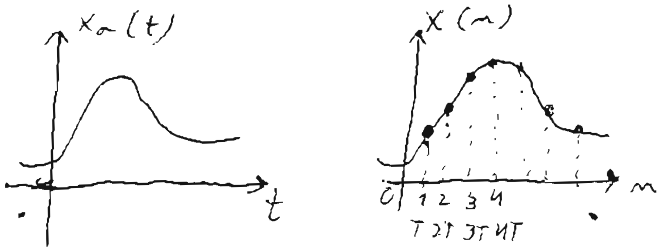
- Muestreo de señales analógicas.

Limitamos el estudio al muestreo uniforme o periódico (es el más común).

$$x(n) = x_a(nT) \;,\; n \in \mathbb{Z} \;,\; T \text{ es fijo (no tiene que ser entero)}$$



$x(n)$ es la señal discreta obtenida "tomando muestras" de la señal analógica $x_a(t)$ cada T segundos.



$T \equiv$ periodo/intervalo de muestreo

$F_s = \frac{1}{T} \equiv$ tasa de muestreo (muestras/segundo)
o frecuencia de muestreo (Hz).

$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_s \equiv$ frecuencia muestreo (radianes/segundo).

El muestreo periódico establece una relación entre las variables independientes n y t:

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \qquad F_s = \frac{1}{T}$$

Como consecuencia existe relación entre F para señales continuas y f para señales discretas.

$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \theta)$ se muestrea a $F_s = \frac{1}{T}$ para obtener:

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi F n T + \theta) = A\cos(2\pi \frac{F}{F_s} n + \theta)$$

$$= A\cos(2\pi f n + \theta) \Rightarrow f = \frac{F}{F_s} \Rightarrow 2\pi f = \frac{2\pi F}{F_s} \Rightarrow \omega = \frac{\Omega}{F_s} = \Omega T$$

SAD- 3º (J. A. Noya) (2011 - 10 - 13)-2

$$x(n) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \ , \ F_s$$

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < F < \infty \\ -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{F}{F_s} < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{F_s}{2} < F < \frac{F_s}{2}$$

$$-\frac{1}{2T} < F < \frac{1}{2T}$$

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_s < \Omega < \pi F_s = \frac{\pi}{T}$$

$$F_s = 100\,Hz,\ \frac{F_s}{2} = 50\,Hz \Rightarrow -50 < F < 50$$

S. continuas		S. discretas
$\Omega = 2\pi F$ rad/s Hz	$\xrightarrow{w = \Omega T,\ f = \frac{F}{F_s}}$ $\xleftarrow{\Omega = \frac{W}{T},\ F = f F_s}$	$W = 2\pi f$ rad/muestra ciclos/muestra
$-\infty < \Omega < \infty$ $-\infty < F < \infty$		$-\frac{\pi}{T} \le \Omega \le \frac{\pi}{T}$ $-\frac{F_s}{2} \le F \le \frac{F_s}{2}$

La frecuencia más alta en discreta es $f_{max} = \frac{1}{2}$, la frecuencia analógica más alta que se obtiene cuando se muestrea a F_s Hz es:

$$F_{max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T},\ \Omega_{max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T}$$

La frecuencia más alta de una señal continua en tiempo que puede determinarse unívocamente cuando la señal se muestrea a F_s Hz es:

$$F_{max} = \frac{F_s}{2},\ \Omega_{max} = \pi F_s$$

Ejemplo.

$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 10t) \; ; \; x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 50t)$$

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi F t + \theta)$$

$$A = 1, \; \theta = 0, \; F_1 = 10\,Hz, \; F_2 = 50\,Hz$$

muestreo a $F_S = 40\,Hz$

$$x_1(n) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{10}{40} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

$$x_1(nT) = x_1\left(\frac{n}{40}\right) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{10}{40} n\right)$$

$$x_2(n) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{50}{40} n\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} n\right) = \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{2} n\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{2} n + \frac{\pi}{2} n\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} n + 2\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) = x_1(n)$$

$F_2 = 50\,Hz > \frac{F_S}{2} = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow$ No se puede determinar unívocamente la sec. continua

$F_1 = 10\,Hz < \frac{F_S}{2} = 20$

$\downarrow$

Pasa lo mismo para toda $F = 50 + 40x, x = 0, 1, 2 \ldots$

$$x_n(t) = A \cos(2\pi (F_1 + K F_S) t)$$

muestreadas a F_S dan lugar a la misma sinusoide discreta

En general:

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \theta)$$

se muestrea a $F_S = \frac{1}{T}$ genera una s.d.e.t.:

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

donde $f_0 = \frac{F_0}{F_S}$ si suponemos que $-\frac{F_S}{2} < F_0 < \frac{F_S}{2}$ entonces

garantizamos $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$

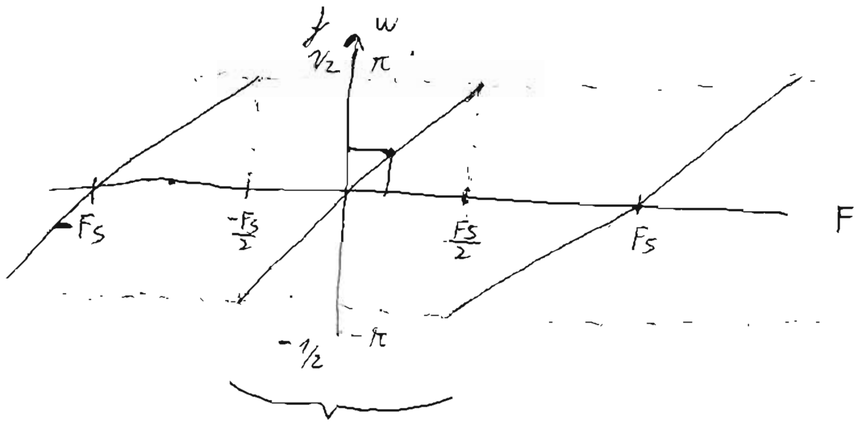
Si las sinusoides $x_a(t) = A \cos(2\pi F_K t + \theta)$

$F_K = F_0 + K F_S, \; K \in \mathbb{Z}$, se muestrean a F_S entonces

$F_K \notin \left[-\frac{F_S}{2}, \frac{F_S}{2}\right]$ de frec. fundamental.

La señal muestreada es:

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos\left(2\pi \frac{\overbrace{F_0 + kF_s}^{f}}{F_s} + \theta\right) = A\cos\left(2\pi \frac{F_0}{F_s} n + \theta + \frac{2\pi k F_s}{F_s} n\right) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$$



Representación unívoca

Una señal sinusoidal estará representada unívocamente representada por sus muestras sólo cuando su frecuencia:

$$-\frac{F_s}{2} < F < \frac{F_s}{2} \iff |F| < \frac{F_s}{2}$$

o lo que es lo mismo:

$$F_s > 2|F| \Rightarrow \text{Teorema muestreo}$$

SAD - 3.º (J.A. Mayor)

Teorema de muestreo

Nos dice cómo seleccionar F_s si disponemos de información general acerca del "contenido en frecuencia" de la señal analógica a muestrear.

Ej: de contenido en frecuencia:
Las componentes más importantes de la señal de voz se encuentran por debajo de 3 KHz.

En general, si se conoce la frecuencia máxima que alcanza una señal analógica podremos especificar la frecuencia de muestreo necesaria para convertir la señal analógica en una señal en tiempo discreto.

¿Por qué hemos trabajado con sinusoides?

En general, cualquier señal analógica puede representarse como una suma de sinusoides con diferentes amplitudes, frecuencias y fases.

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i)$$ donde N indica el nº de componentes de frecuencia

Supongamos que las frecuencias no exceden una determinada frec. conocida F_{max}, entonces se puede seleccionar una frecuencia de muestreo F_s sabiendo que la frec. máxima de una señal analógica que puede reconstruirse sin ambigüedades cuando se muestrea a $F_s = \frac{1}{T}$ Hz es $F_s/2$

Para evitar efectos de aliasing hay que seleccionar la F_s lo suficientemente grande. Es decir, $F_s/2$ tiene que ser mayor que F_{max} ($F_s > 2F_{max}$).

Seleccionando F_s de esta forma, cualquier componente de frecuencia de la señal analógica $x_a(t)$

$$|F_i| < F_{max}$$

se corresponderá con una sinusoide discreta en tiempo con una frecuencia $-\frac{1}{2} \leq f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2}$ || $-\pi \leq w_i = 2\pi f_i \leq \pi$

Todas los componentes de frecuencia F_i de $x_a(t)$ están representados en la forma muestreada por la correspondiente $f_i = F_i / F_s$ sin ambigüedades.

En consecuencia, la señal $x_a(t)$ puede reconstruirse sin distorsión a partir de los valores de las muestras empleando el "método de interpolación adecuado" (Conversión D/A). Dicha fórmula "adecuada" la proporciona el teorema de muestreo.

Teorema de muestreo (forma banda base)

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{máx} = B$ Hz y la señal se muestrea a una frecuencia $F_s > 2F_{máx} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$ puede recuperarse de forma exacta a partir de los valores de sus muestras utilizando la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi B t)}{2\pi B t}$$

Por lo tanto $x_a(t)$ puede expresarse como $x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$

donde $x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = x_a(nT) \equiv x(n)$ son las muestras de $x_a(t)$.

Para el caso $F_s = 2B$

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\operatorname{sen}[2\pi B(t - n/2B)]}{2\pi B(t - n/2B)}$$

La frec. de muestreo $F_N = 2B = 2F_{máx}$ se denomina FRECUENCIA DE NYQUIST.

HISTORIA

Harry Nyquist 1889 - 1976

Teorema de Nyquist - Shannon

o " " Whittaker - Nyquist - Kotelnikov - Shannon

Shannon demostró el teorema.

30/04/1916 - 24/02/2001

Boole

- Verano 1937

Descubre y demuestra la aplicación del álgebra de Boole a los circuitos digitales.

- 1948

Publica "Una teoría matemática de la comunicación".

$$C = B \cdot \log_2(1+SNR) \quad [bits/s]$$

Ejemplo

$$x_a(t) = 3\cos(50\pi t) + 10\,\text{sen}(300\pi t) - \cos(100\pi t)$$

calcular la frecuencia de Nyquist

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \overset{\,0}{\theta})$$

$F_1 = 25 \quad F_2 = 150, \quad F_3 = 50$

$F_N = 2F_{max} = 2 \times F_2 = 300\ Hz$

Si consideramos sólo
$x_a(t) = 10\,\text{sen}(300\pi t)$, $F_S = F_N = 300 Hz$

$$\left.\begin{array}{l} x(n) = 10\,\text{sen}(2\pi f n) \\ \\ f = \dfrac{F}{F_S} = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x(n) = 10\,\text{sen}(\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Si desfasamos la señal original $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi \Rightarrow x(n) \neq 0$

Ejemplo:

$$x_a(t) = 3\cos(2000\pi t) + 5\,\text{sen}(6000\pi t) + 10\cos(12000\pi t)$$

a) F_N?

$F_1 = 1000 \quad F_2 = 3000 \quad F_3 = 6000$

$F_N = 2F_{max} = 2F_3 = 12000\ Hz = 12\ KHz$

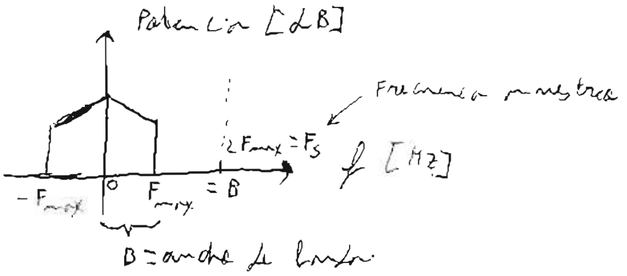
b) Se muestrea a $F_S = 5000$ muestras/seg. ¿$x(n)$?
$\downarrow$
$< F_N \Rightarrow$ Solapamiento

$-\dfrac{F_S}{2} < F < \dfrac{F_S}{2} \Rightarrow -2'5 KHz < F < 2'5 KHz \Rightarrow$ representación unívoca

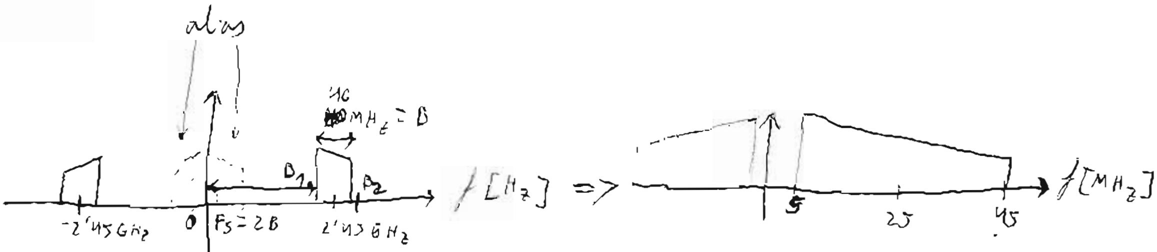
$$x(n) = x_a\left(\frac{n}{F_S}\right) = x_a(nT)$$
$$= 3\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(2\pi \frac{3}{5}n\right) + 10\cos\left(2\pi\frac{6}{5}n\right)$$
$$= 3\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(2\pi\left(1-\frac{2}{5}\right)n\right) + 10\cos\left(2\pi\left(1+\frac{1}{5}\right)n\right)$$

- Teorema del muestreo: interpretación en frecuencia.

Forma banda base del Teorema del muestreo.

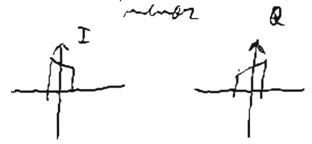


Pasa banda



$B << B_1$ ← mucho menor

Demodulación I/Q ⇒

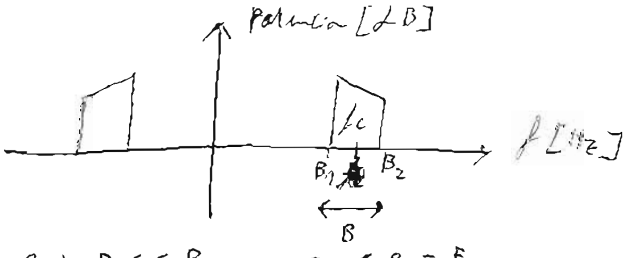


X(n) de forma unívoca $F_s > F_{max} = 2B$

$X_a(t)$ es una señal

- banda base (tiene el 0 incluido).
- banda limitada.

Si $X_a(t)$ es una señal pasa banda y de banda limitada



Se cumple que $B << B_1$ y $B << B_2 = F_{max}$

Podemos reconstruir $X_a(t)$ a partir de sus muestras $X(n)$ obtenidas cuando la señal se ha muestreado a una frecuencia $F_s > 2B$ siendo $X_a(t)$ de banda limitada o de banda estrecha (B pequeña respecto a B_1 y B_2

$= 3 \cos(2\pi \frac{1}{5} n) - 5 \operatorname{sen}(2\pi (\frac{2}{5}) n) + 10 \cos(2\pi \frac{1}{5} n)$

$= 13 \cos(2\pi \frac{1}{5} n) - 5 \operatorname{sen}(2\pi \frac{2}{5} n)$

$F_k = F_0 + k F_s \quad , k = \pm 1, \pm 2, \dots \qquad -\frac{F_s}{2} \leq F_0 \leq \frac{F_s}{2}$

$F_1 < \frac{F_s}{2} \Rightarrow \underset{1 KHz}{F_1}$ No aliasing

$F_2' = F_2 - F_s = 3 KHz - 5 KHz = -2 KHz$

$F_3' = F_3 - F_s = 6 KHz - 5 KHz = 1 KHz$

La 1ª y la 3ª coinciden en la representación

$f = \frac{F}{F_s} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{5} \; ; \; f_2 = \frac{F_2'}{F_s} = \frac{-2}{5} \; ; \; f_3 = \frac{1}{5}$

c) $y_a(t) = 13 \cos(2\pi \frac{1}{5} F_s t) - 5 \operatorname{sen}(2\pi \frac{2}{5} F_s t)$

$= 13 \cos(2000\pi t) - 5 \operatorname{sen}(4000\pi t) \neq x_a(t)$

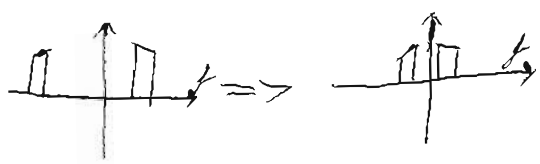
SAD – 3º (J.A. Nagr) (2011-10-26)-c

Dos posibles interpretaciones:

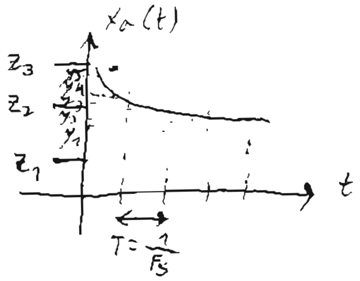
1) Si $F_s = 2B \Rightarrow F_s << B_1$ y todos los componentes de frecuencia de $x_a(t)$ serán alias de las frecuencias comprendidas en el rango $0 < F < F_s/2$

Si observamos el contenido en frecuencia de la señal en el rango fundamental $0 < F < F_s/2$, entonces conocemos de forma precisa el contenido en frecuencia de la señal analógica, ya que conocemos la banda de frecuencias $B_1 < F < B_2$ que se está considerando (Subsampling o Submuestreo).

2) Se puede llevar a cabo una traslación en frecuencia de $x_a(t)$ de modo que la frecuencia central (o de portadora) f_c esté mucho más próxima a 0 y se pueda aplicar la forma banda base del teorema de muestreo.
Esta operación se denomina down-conversion o conversión descendente.



– CUANTIFICACIÓN DE SEÑALES CONTINUAS EN AMPLITUD.



$x(n) = [\cdots, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5,] = [\cdot, z_1, z_2, z_2, z_2, z_3]$

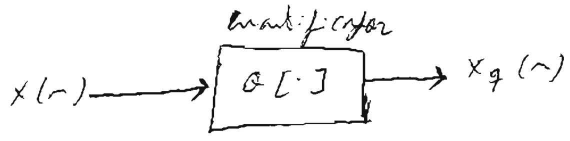
$y(n) = x_a(nT)$

Varios valores de y son representados por un único valor de z

Una señal digital es una secuencia de muestras de precisión finita (nº finito de dígitos).

Denominamos cuantificación al proceso de convertir una señal discreta en tiempo con amplitudes continuas en una señal digital expresando cada muestra con un nº finito de dígitos.

Error de cuantificación o ruido de cuantificación es el error introducido al representar la señal continua mediante un conjunto finito de niveles discretos.



Q[·] denota la operación de cuantificación

El error de cuantificación se define como:

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$$

Cuantificación.

$$X(n) \longrightarrow \underset{\text{Cuantificador}}{\boxed{Q[\cdot]}} \longrightarrow x_q(n) = Q[X(n)]$$

Error de cuantificación.

$$e_q(n) = x_q(n) - X(n)$$

Los valores permitidos de la señal discreta cuantificada son los niveles de cuantificación.

La distancia Δ entre dos niveles consecutivos define el tamaño del escalón de cuantificación o resolución.

- Cuantificación por redondeo: asigna el nivel más próximo.
- " " truncamiento: asigna el nivel inmediatamente inferior.

Error redondeo:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \underbrace{e_q(n)}_{\text{Error instantáneo}} \leq \frac{\Delta}{2}$$

$X_{max} \equiv$ máximo de $x(n)$

$X_{min} \equiv$ mínimo de $X(n)$

$X_{max} - X_{min} \equiv$ rango dinámico de $X(n)$

$L \equiv$ nº de niveles de cuantificación

$$\Delta = \frac{X_{max} - X_{min}}{L - 1} = \frac{1 - 0}{11 - 1} = 0'1 \text{ (ejemplo transparencia)}$$

En teoría la cuantificación siempre produce pérdida de información.

Cuantificación de señales sinusoidales.

$$x_a(t) = A\cos(\Omega_0 t)$$

La señal $x_a(t)$ es prácticamente lineal entre niveles de cuantificación.

Error de cuantificación

$$e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$$

$\tau \equiv$ tiempo que $x_a(t)$ permanece dentro de los niveles de cuantificación.

Potencia del error cuadrático medio:

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t)\,dt$$

$$e_q(t) = \begin{cases} \frac{\Delta}{2\tau} t, & -\tau < t < \tau \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$P_q = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)^2 t^2\,dt = \frac{1}{2\tau}\left(\frac{\Delta}{2\tau}\right)^2 \frac{t^3}{3}\Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{\Delta^2}{8\tau^3}\left(\frac{\tau^3-(-\tau)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{\Delta^2}{12}$$

Si el cuantificador tiene b bits de precisión y cubre el rango completo $2A$, entonces el escalón de cuantificación es:

$$\Delta = \frac{2A}{2^b}$$

$$P_q = \frac{\left(\frac{2A}{2^b}\right)^2}{12} = \frac{4A^2}{12\ 2^{2b}} = \frac{A^2}{3\cdot 2^{2b}}$$

Potencia media de la señal $x_a(t)$:

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}(A\cdot\cos(\Omega_0 t))^2\,dt = \frac{A^2}{2}$$

La calidad de la salida del convertidor A/D se mide mediante la relación señal - ruido de cuantificación SQNR (Signal Quantization Noise Ratio).

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{A^2/2}{\Delta^2/12} = 6\,\frac{A^2}{\Delta^2}$$

Para el caso de b bits de precisión:

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{A^2/2}{A^2/(3\,2^{2b})} = \frac{3}{2}\,2^{2b}$$

$$SQNR[dB] = 10 \cdot \log_{10}(SQNR) = 1'76 \cdot 6'02\, b$$

A mayor valor de SQNR mayor calidad.

Ejemplo:

El cd de audio utiliza 16 bits por muestra.

$$SQNR = 1'76 \cdot 6'02 \times 16 = 97'76\, dB$$

Codificación de muestras cuantificadas.

Codificar los distintos niveles de cuantificación numerándolos unívocamente en binario.

Con una longitud de palabra de b bits podemos obtener 2^b nºs binarios diferentes.

Para numerar L niveles de cuantificación se cumplirá que:

$$2^b \geq L \Rightarrow b \geq \log_2 L$$

Lo habitual es hacer que L sea potencia de dos:

$$L = 2^b$$

En el caso de una señal sinusoidal

$$x_a(t) = A\cos(\Omega_0 t)$$

se ajusta el rango dinámico del cuantificador sabiendo que

$x_{máx} = A$ y $x_{mín} = -A$ $\qquad \Delta = \frac{x_{máx} - x_{mín}}{L} = \frac{A-(-A)}{2^b} = \frac{2A}{2^b}$

$$SQNR = \frac{3}{2} 2^{2b}$$

Conversión digital-analógica (D/A)

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

El proceso de recuperar la señal analógica a partir de sus muestras se llama reconstrucción.

Si señal $x(n)$ no cuantificada.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Reconstrucción}} \longrightarrow \hat{x}_a(t) = x_a(t)$$

Análisis en frecuencia de $x_a(t)$ y de $x(n) = x_a(nT)$

$$TF[x_a(t)] = X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\, e^{-j2\pi F t}\, dt$$

$$TF^{-1}[X_a(F)] = x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)\, e^{j2\pi F t}\, dF$$

SAD-3ª (J.A. Noya)

Para el caso discreto:

$$TF[x(n)] = X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j2\pi f n}$$

$$x(n) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{j2\pi f n}\, df \quad , \; f = \frac{F}{F_s}$$

Nótese que $X(f)$ es periódica de periodo 1.

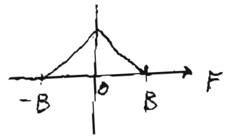
El espectro de $x(n) = x_a(nT)$:

$$x(n) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)\, e^{j2\pi \frac{F}{F_s} n}\, dF$$

$$x(n) = \frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X(F)\, e^{j2\pi \frac{F}{F_s} n}\, dF$$

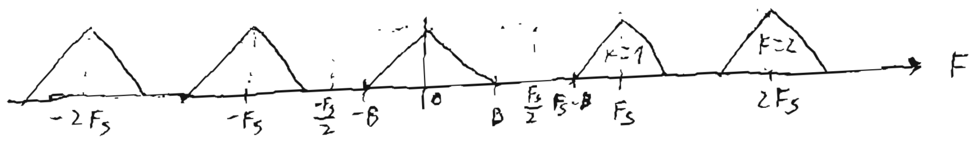
$$\frac{1}{F_s} X(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \Rightarrow \boxed{X = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - F_s)}$$

$$x_a(t) \xrightarrow{TF} X_a(F)$$



El espectro de $X(F)$

$$x(n) = x_a(nT) \xrightarrow{TF} X(f) \longrightarrow X(F)$$



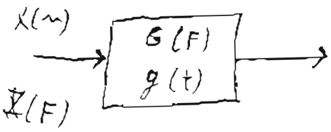
No hay solapamiento si $B < F_s - B \Rightarrow F_s > 2B$

Reconstrucción ideal (teorema de muestreo).

$$\hat{X}_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s}\,\bar{X}(F) , & |F| \le \frac{F_s}{2} \\ 0 , & \text{resto} \end{cases}$$

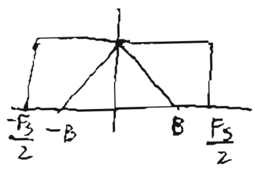
$\hat{X}_a(F)$ se obtiene filtrando con un filtro paso bajo ideal de respuesta en frecuencia

$$G(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} & |F| \le \frac{F_s}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} = \begin{cases} T & |F| \le \frac{F_s}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



$\hat{x}_a(t) = x(n) * g(t)$

$\hat{X}_a(F) = \bar{X} \cdot G(F)$

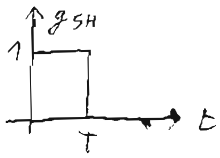


SAD - 3ª (J.A. García Naya) (2011-11-10) - 1

Reconstrucción utilizando Sample & Hold (SH).

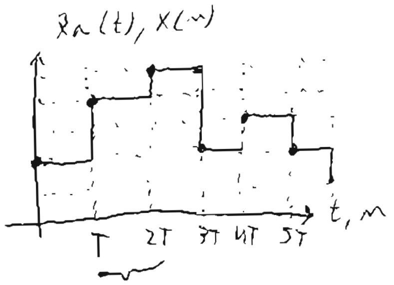
Forma sencilla, aunque imprecisa, de reconstruir la señal analógica y consiste en utilizar un pulso rectangular como función de interpolación

$$g_{SH}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, g_{SH}(t - nT)$$

Ejemplo:

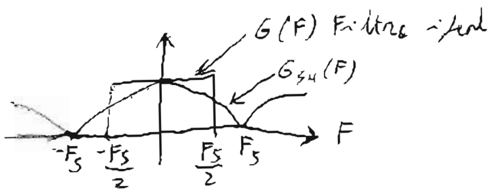


$T = \frac{1}{F_s}$

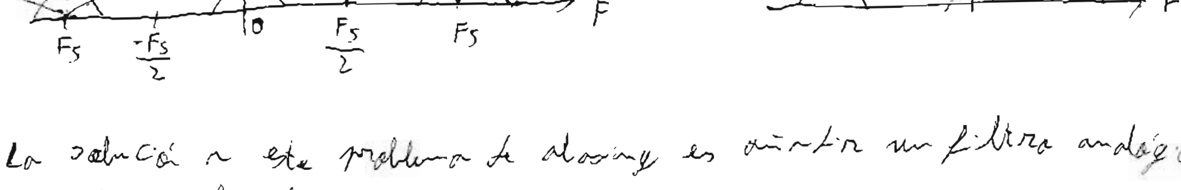
$$G_{SH}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{SH}(t)\, e^{-j2\pi F t}\, dt$$

$$= \int_0^T 1 \cdot e^{-j2\pi F t}\, dt$$

$$= T \cdot \frac{\operatorname{sen} \pi F t}{\pi F t}\, e^{-j2\pi F T}$$

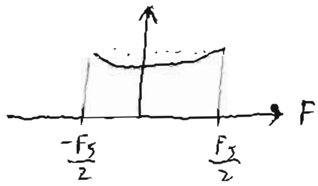


La reconstrucción SH actúa como filtro paso bajo pero NO ideal.
La rsp. en frecuencia es de tipo sinc e introduce aliasing.



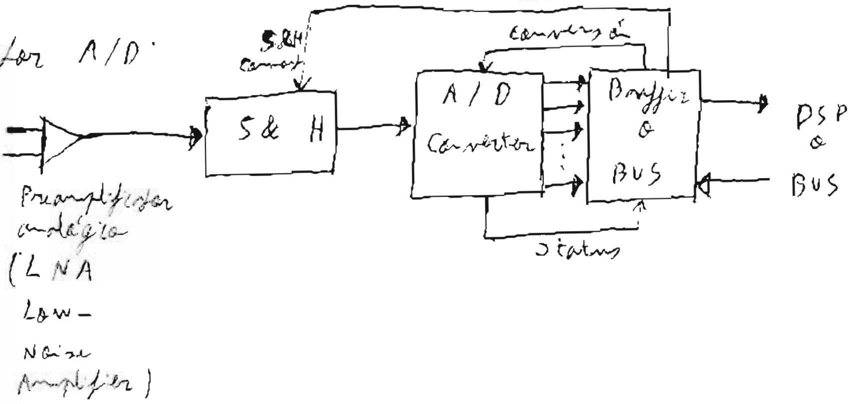
La solución a este problema de aliasing es añadir un filtro analógico que atenúe las frecuencias $> \frac{F_s}{2}$.
Este filtro puede aprovecharse para compensar la distorsión en la banda de paso.

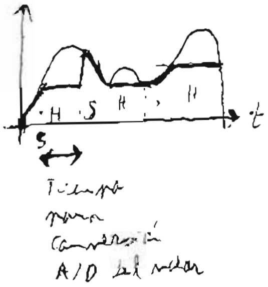
$$H_a(F) = \begin{cases} \dfrac{1}{G_{SH}(F)} & , |F| \le \dfrac{F_s}{2} \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$



Aspectos prácticos de los convertidores de datos

Convertidor A/D:





En sample se toma valor de muestra siguiendo la señal y en hold mantiene el último valor leído por sample.
Durante el hold el ADC convierte ese valor a binario.

Es importante que el modo "hold" permite al conversor A/D obtener la representación digital frecuentemente a una velocidad menor, el tiempo necesario para adquirir una muestra.

El circuito SH es clave en la conversión digital de alta resolución (≥ 12 bits/muestra) de señales de banda ancha (variación rápidamente).

El tiempo necesario para que el convertidor AD realice la conversión tiene que ser menor que la duración del modo "hold".

El periodo de muestreo tiene que ser mayor que la suma de las duraciones del modo "hold" y el modo "sample"

En la práctica los conversores SH introducen tres tipos de distorsión:

1) La periodicidad del muestreo no es constante, T varía con el tiempo ("jitter").
2) Variaciones no lineales duración del modo "sample".
3) Variaciones de la tensión durante el modo "hold" ("droop").