TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

Boletín de Problemas 1
Señales y Sistemas Discretos

1. La siguiente igualdad se conoce con el nombre de relación de Euler

$$e^{j\phi} = cos\phi \ + \ j \ sen\phi$$

Utilice esta relación para demostrar las siguientes igualdades

a) $cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)$

b) $sen\phi = \frac{1}{2j}\left(e^{j\phi} - e^{-j\phi}\right)$

c) $cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + cos2\phi)$

d) $(sen\theta)(sen\phi) = \frac{1}{2}cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}cos(\theta + \phi)$

e) $(cos\theta)(cos\phi) = \frac{1}{2}cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2}cos(\theta + \phi)$

2. Sea z un número complejo con coordenadas polares r, ϕ (módulo y fase) y coordenadas cartesianas x, y (parte real y parte imaginaria). Obtenga las expresiones de las coordenadas cartesianas de los siguientes números complejos en términos de x, y.

a) $z_1 = re^{-j\phi}$

b) $z_2 = r$

c) $z_3 = re^{j(\phi+\pi)}$

d) $z_4 = re^{j(-\phi+\pi)}$

e) $z_5 = re^{j(\phi+2\pi)}$

3. Sea z una variable compleja

$$z = x + jy = re^{j\phi}$$

El conjugado de z se denota por z^* y se define como

$$z^* = x - jy = re^{-j\phi}$$

Demuestre que se cumplen las siguientes relaciones, donde z, z_1 y z_2 son números complejos arbitrarios.

a) $zz^* = r^2$

b) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\phi}$

c) $|z| = |z^*|$

d) $z + z^* = 2\Re\{z\} = 2x$

e) $z - z^* = 2\Im\{z\} = 2y$

f) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

g) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$, donde a es un número real cualquiera.

h) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

i) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

4. Dibuje cada una de las siguientes señales discretas

   a) $x(n) = u(n) - 2u(n-4)$ y $y(n) = x(n) - x(n-1)$.

   b) $x(n) = 2u(n+1) + u(n) - 3u(n-2)$.

   c) $x(n) = (1-n)[u(n+2) - u(n-3)]$.

   d) $x(n) = \delta(n+2) - 2\delta(n-1)$ y $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

   e) $x(n) = n^2[\delta(n+2) - \delta(n-2)]$ y $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

   f) $x(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$

   g) $x(n) = cos\dfrac{\pi n}{N}\left[\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)\right]u(n)$

5. Dada la señal discreta, $x(n) = \{-1, \underbrace{1/3}_{n=0}, 0, 1, -3/2, -1\}$ que se muestra en la figura, dibujar las siguientes señales:

   a) $x(2-n)$

   b) $x(3n-4)$

   c) $x_{(3)}(2n+3)$

   d) $x_{(4)}(-n-8)$

   e) $x(n^3)$

   f) $x_{par}(n)$

   g) $x_{impar}(n)$

   h) $x(2-n) + x(3n+4)$

6. Dibuje cada una de las siguientes señales discretas

   a) $x(n) = u(n) - 2u(n-4)$ y $y(n) = x(n) - x(n-1)$

   b) $x(n) = 2u(n+1) + u(n) - 3u(n-2)$

   c) $x(n) = (1-n)[u(n+2) - u(n-3)]$

   d) $x(n) = \delta(n+2) - 2\delta(n-1)$ y $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

   e) $x(n) = n^2[\delta(n+2) - \delta(n-2)]$ y $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

   f) $x(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$

7. Sea $x(n)$ la señal de la figura 1. Dibuje las siguientes señales:

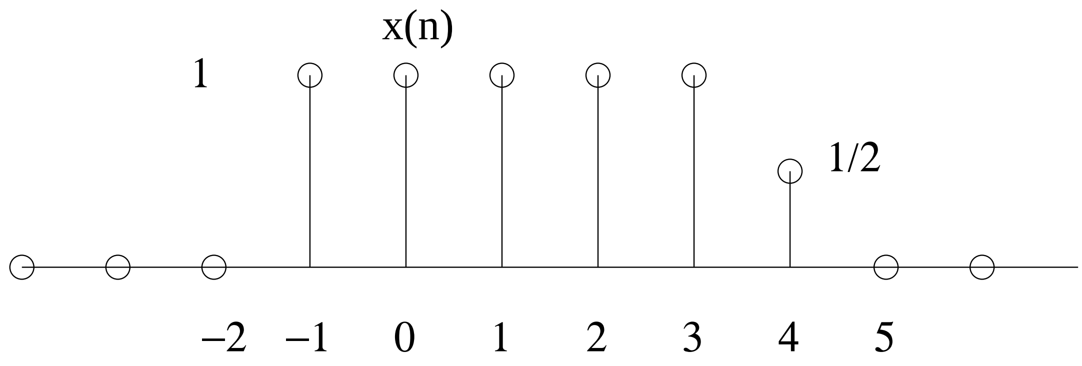


Figura 1:

a) $x(n-2)$
b) $x(4-n)$
c) $x(2n)$
d) $x(2n+1)$
e) $x(n)u(2-n)$
f) $x(n-1)\delta(n-3)]$.

8. Considere la señal discreta $x(n)$ de la figura 2. Dibuje las siguientes señales:

a) $x(n-2)$
b) $x(4-n)$
c) $x(2n)$
d) $x(2n+1)$
e) $x(n)u(2-n)$
f) $x(n-1)\delta(n-3)$

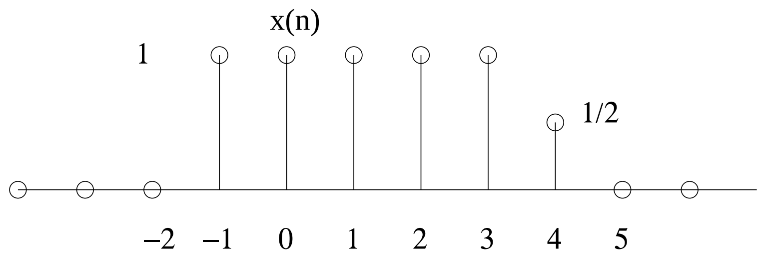


Figura 2:

9. Determinar si las siguientes señales son periódicas y, para las que lo sean, encontrar su período fundamental.

a) $x(n) = sen(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8})$
b) $x(n) = sen(\frac{3\pi n}{4}) + sen(\frac{\pi}{3}n)$
c) $x(n) = sen(\frac{3\pi n}{4})sen(\frac{\pi}{3}n)$
d) $x(n) = e^{\frac{6\pi}{5}n}$
e) $x(n) = e^{j\frac{6\pi}{5}n}$

f) $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n-2m) + 2\delta(n-3m)]$

g) $x(n) = sen(\frac{3\pi n}{4}) + cos(\frac{\pi}{3}n)$

10. La señal $x(t) = 5cos(120t - \pi/3)$ se muestrea con un período de T_s segundos. ¿Qué valores de T_s hacen que la secuencia en tiempo discreto resultante sea periódica?

11. Suponiendo que $x(n)$ es la entrada de un sistema discreto e $y(n)$ su salida, determinar si los siguientes sistemas con (i) lineales, (ii) invariantes son el tiempo , (iii) sin memoria y/o (iv) causales:

a) $y(n) = log[x(n)]$

b) $y(n) = x(n)x(n-2)$

c) $y(n) = 3nx(n)$

d) $y(n) = nx(n) + 3$

e) $y(n) = x(n-1)$

f) $y(n) = x(n) + 2x(n-1)$

g) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)$

h) $y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)$

i) $y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$

j) $y(n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x(n-k)$

k) $y(n) = \begin{cases} x(n) & n \geq 0 \\ -x(n) & n < 0 \end{cases}$

l) $y(n) = \begin{cases} x(n) & x(n) \geq 0 \\ -x(n) & x(n) < 0 \end{cases}$

12. Calcule, dibuje y compruebe el resultado, mediante Matlab, la convolución $y(n) = x(n) * h(n)$ de las siguientes señales:

a) $x(n) = \{\underbrace{1}_{n=0}, 1\} \qquad h(n) = \{\underbrace{1}_{n=0}, 1, 1\}$

b) $x(n) = \begin{cases} -1 & -5 \leq n \leq -1 \\ 1 & 0 \leq n \leq 4 \end{cases} \qquad h(n) = 2u(n)$

c) $x(n) = u(n) \qquad h(n) = 1 \quad 0 \leq n \leq 5$

d) $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \qquad h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

e) $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \qquad h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

f) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad h(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

g) $x(n) = \{-1, 1/2, \underbrace{3/4}_{n=0}, -1/5, 1\} \qquad h(n) = 1, 1, 1, 1, 1$

h) $x(n) = \{1, -1/2, \underbrace{1/4}_{n=0}, -1/8, 1/16\} \qquad h(n) = 1, -1, 1, -1$

13. Calcular la respuesta al impulso del sistema de la figura 3 cuando

a)

$$h_1(n) = u(n) \quad ; \quad h_2(n) = \delta(n+2) \quad ; \quad h_3(n) = u(n-7) \quad ; \quad h_4(n) = \delta(n+2)$$

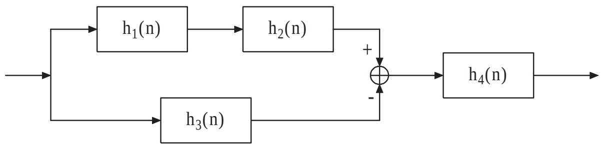


Figura 3:

b)

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad ; \quad h_2(n) = \delta(n) \quad ; \quad h_3(n) = h_4(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

14. Sean $x_1(n)$ y $x_2(n)$ dos secuencias periódicas de período N. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k) \quad = \quad \sum_{k=n_0}^{N+n_0-1} x_1(k)x_2(n-k)$$

Soluciones

1.

2. $a)$ $\Re(z_1) = x$, $\Im(z_1) = -y$

   $b)$ $\Re(z_2) = \sqrt{x^2+y^2} = r$, $\Im(z_2) = 0$

   $c)$ $\Re(z_3) = -x$, $\Im(z_3) = -y$

   $d)$ $\Re(z_4) = -x$, $\Im(z_4) = y$

   $e)$ $\Re(z_5) = x$, $\Im(z_5) = y$

3.

4.

5. $a)$ $\{-1, -3/2, \underbrace{1}_{n=0}, 0, 1/3, -1\}$

   $b)$ $\{\underbrace{0}_{n=0}, -1, 1\}$

   $c)$ $\{-1, 0, 0, \underbrace{0}_{n=0}, 0, 0, -3/2\}$

   $d)$ $\{-1, 0, 0, 0, -3/2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, \underbrace{0}_{n=0}\}$

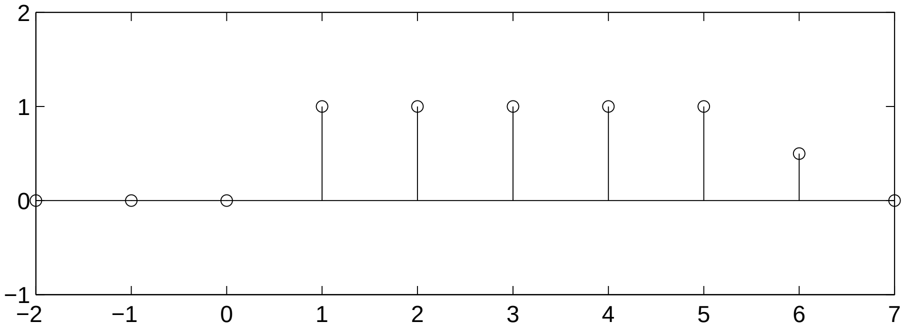
   $e)$ $\{-1, \underbrace{1/3}_{n=0}, 0\}$

   $f)$ $\{-1/2, -3/4, 1/2, -1/2, \underbrace{1/3}_{n=0}, -1/2, 1/2, -3/4, -1/2\}$

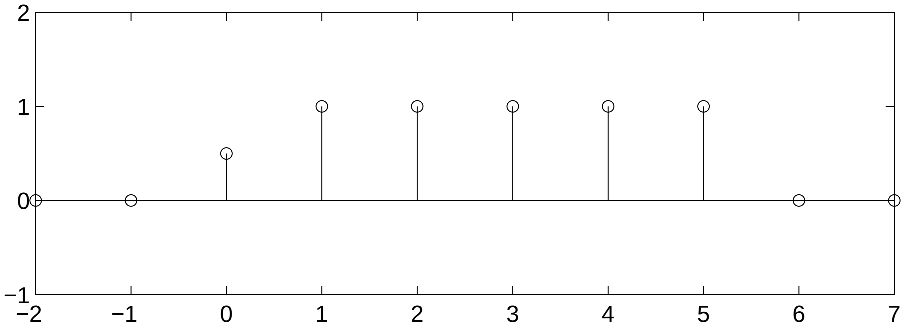
   $g)$ $\{1/2, 3/4, -1/2, -1/2, \underbrace{0}_{n=0}, 1/2, 1/2, -3/4, -1/2\}$

   $h)$

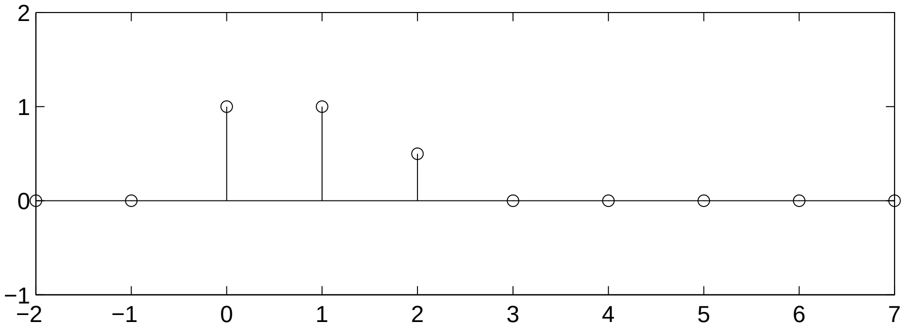
6. -

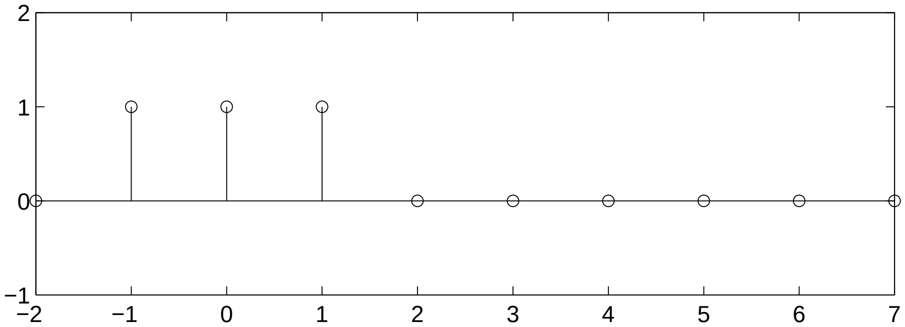


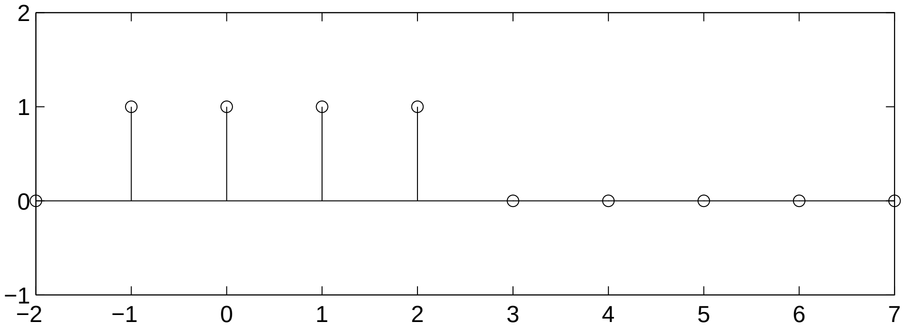
a)

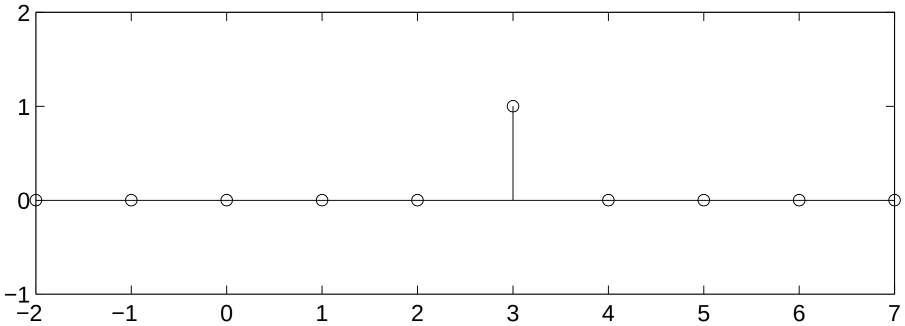


b)

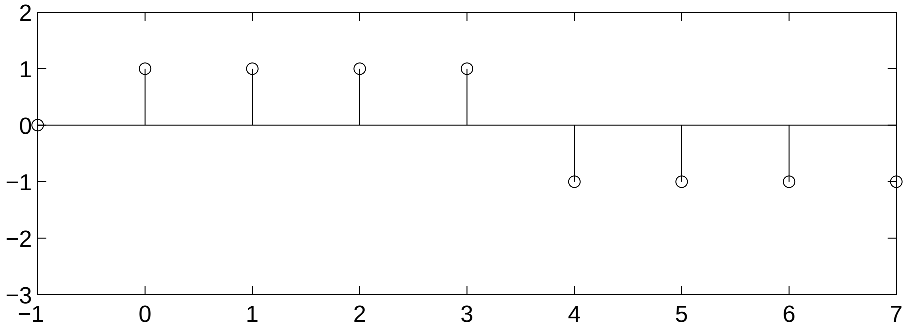

2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
c)


2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
d)

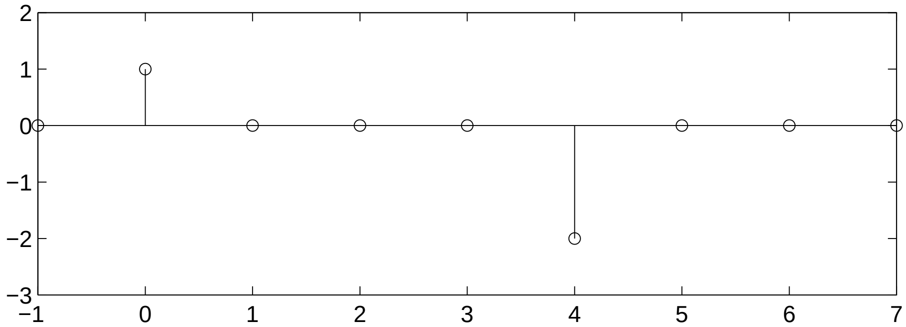

2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
e)


2
1
0
−1
−2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
f)

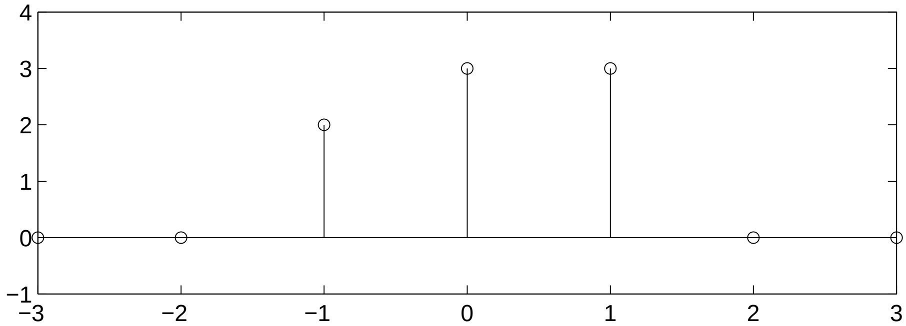
7. -


2 1 0 −1 −2 −3
−1 0 1 2 3 4 5 6 7

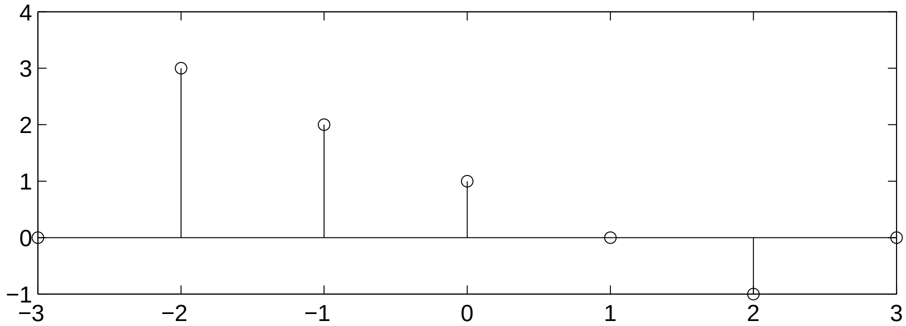
a) x(n)


2 1 0 −1 −2 −3
−1 0 1 2 3 4 5 6 7

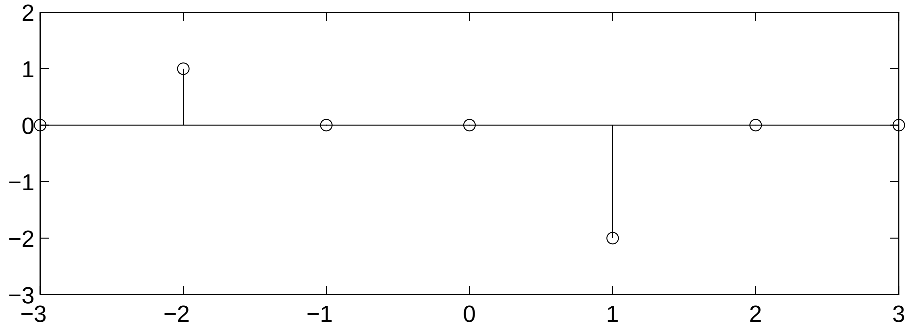
a) y(n)


4 3 2 1 0 −1
−3 −2 −1 0 1 2 3

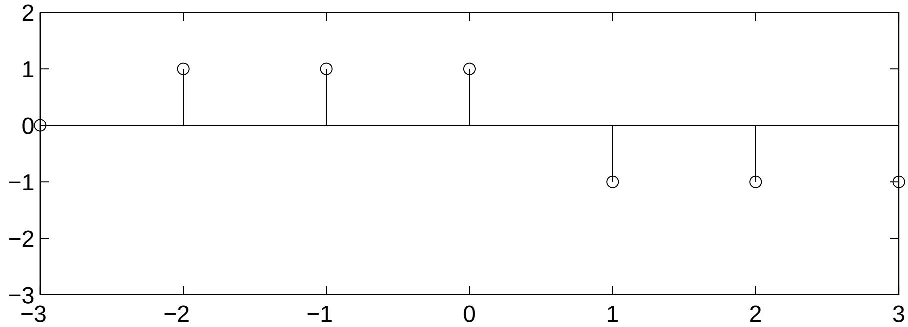
b)


4 3 2 1 0 −1
−3 −2 −1 0 1 2 3

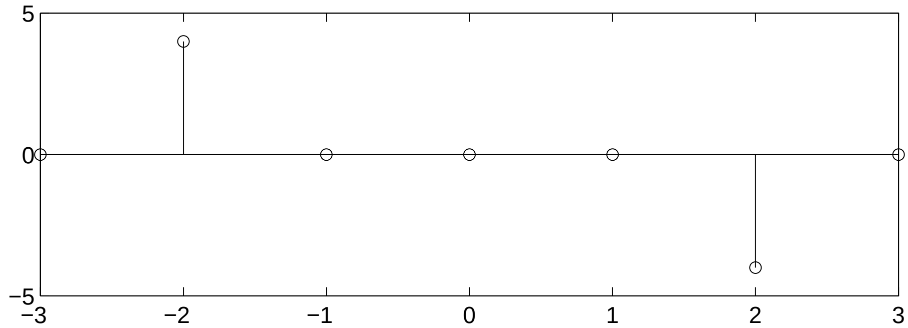
c)



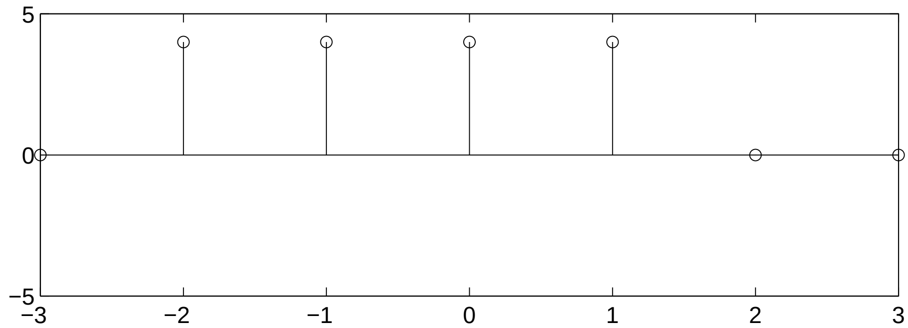
d) x(n)



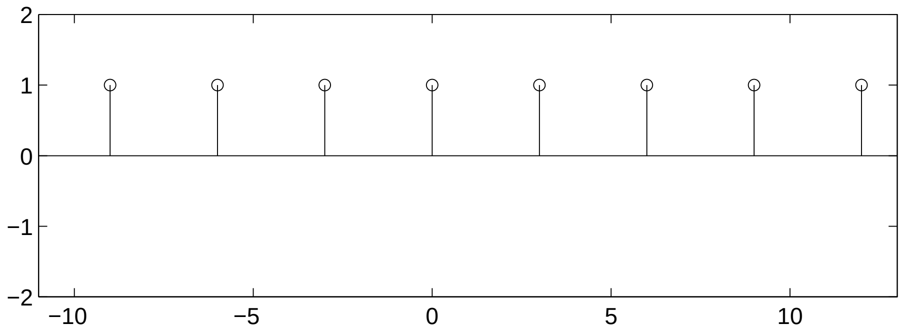
d) y(n)



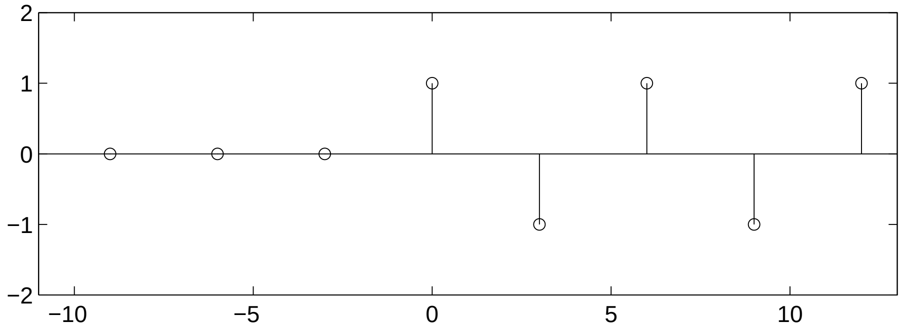
e) x(n)



e) y(n)

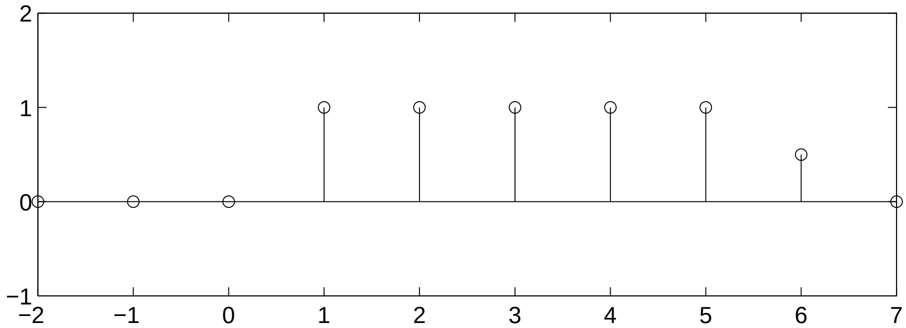


f) x(t) [en este dibujo, N=3]

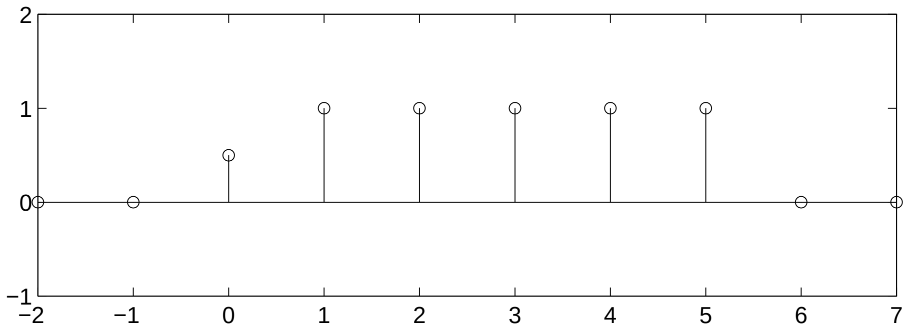


g) x(t) [en este dibujo, N=3]

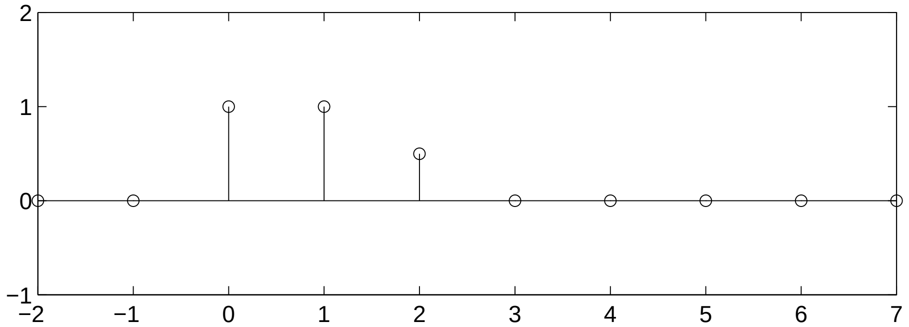
8. -



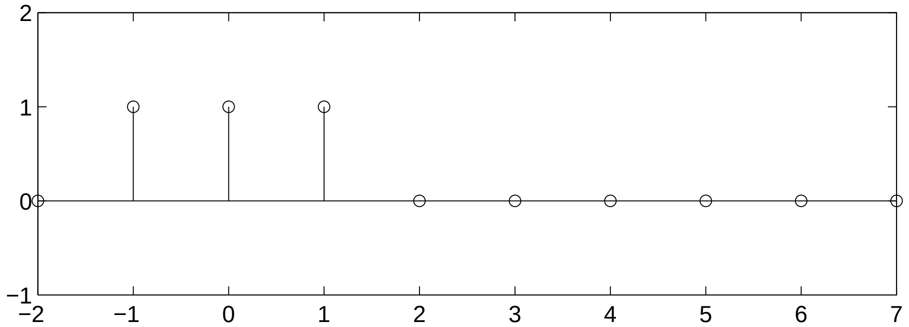
a)



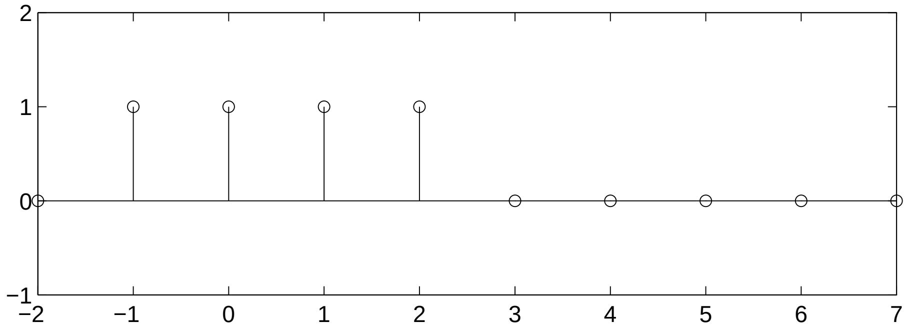
b)



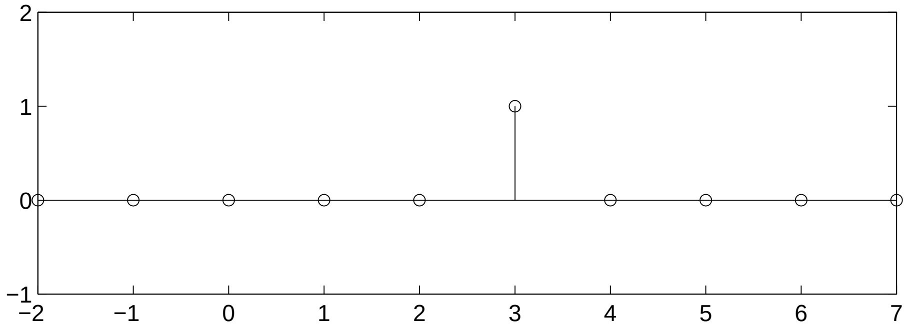
c)



d)



e)



f)

9. $a)$ Si. $N = 8$
   $b)$ Si. $N = 24$
   $c)$ Si. $N = 24$
   $d)$ No.
   $e)$ Si. $N = 12$
   $f)$ Si. $N = 6$
   $g)$ Si. $N = 24$

10. $T_s = \frac{\pi}{60}\frac{l}{N}$, donde l y N son números enteros, siendo N el período de la señal resultante.

11. *a*) Invariante, sin memoria y causal.
    b) Invariante y causal.
    c) Lineal, sin memoria y causal.
    d) Sin memoria y causal.
    e) Lineal, invariante y causal.
    f) Lineal, invariante y causal.
    g) Lineal.
    h) Lineal y causal.
    i) Lineal, invariante y causal.
    j) Lineal e invariante.
    k) Lineal, sin memoria y causal.
    l) Lineal, invariante, sin memoria y causal.

12. *a*) $y(n) = \{\underbrace{1}_{n=0}, 2, 2, 1\}$
    b) $y(n) = \{-2, -4, -6, -8, -10, \underbrace{8}_{n=0}, 6, 4, 2\}$
    c) $y(n) = \underbrace{1}_{n=0}, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, \cdots$
    d) $y(n) = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$
    e) $y(n) = \left(\left(\frac{3}{2^n}\right) - \left(\frac{2}{3^n}\right)\right) u(n)$
    f) $y(n) = \left(\left(\frac{4}{2^n}\right) - \left(\frac{2}{3^n}\right)\right) u(n)$
    g) $y(n) = \{-1, -1/2, \underbrace{1/4}_{n=0}, 1/20, 21/20\}$
    h) $y(n) = \{1, -3/2, \underbrace{7/4}_{n=0}, -15/8, 15/16\}$

13. *a*) $h(n) = u(n+4) - u(n-5)$
    b) $h(n) = \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n} - \frac{n}{3^n}\right) u(n)$