TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

Boletín de Problemas 2
Transformada de Fourier de Secuencias Discretas

1. Demostrar que la Transformada de Fourier (TF) es invertible. NOTA: considera la ecuación de síntesis de la TF y sustituye en ella el valor de $X(e^{jw})$ obtenido por la de análisis.

2. Demostrar la propiedad de desplazamiento temporal. Recomendación: Trate de usar la propiedad de convolución y la TF de $\delta(n - n_0)$.

3. Utilizando las propiedades de conjugación en tiempo y de inversión en tiempo y en frecuencia de la TF, razonar las consecuencias:

   (a) Si $x(n)$ es real y par entonces $X(e^{jw})$ es real y par.

   (b) Si $x(n)$ es real e impar entonces $X(e^{jw})$ es imaginaria pura e impar.

4. Si la respuesta impulsional de un filtro paso bajo es $h_{lp}(n)$ determina cual será la de un filtro paso alto a partir de esta última.

5. Calcula la secuencia que tiene la siguiente transformada de Fourier por medio de la ecuación de síntesis:

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & |w| < w_c \\ 0 & w_c < |w| \leq \pi \end{cases} \tag{1}$$

6. Calcula la transformada de Fourier de las siguientes secuencias usando la ecuación de análisis.

   (a) $(\frac{1}{3})^n u(n)$

   (b) $\delta(n - n_d)$

7. Calcula la transformada de Fourier de las siguientes secuencias sin usar la ecuación de análisis.

   (a) $a^{n-1}u(n-2)$

   (b) $(\frac{1}{2})^n[u(n+3) - u(n-2)]$

   (c) $2^n u(-n)$

   Recomendación: Trata de expresar las secuencias como versiones desplazadas de otras conocidas.

8. Utilizando la ecuación de síntesis, calcula la secuencia que tiene como transformada de Fourier:

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(w - w_0 + 2\pi k) \tag{2}$$

9. Calcula la transformada de Fourier inversa de los siguientes espectros:

   (a) Para el período $-\pi \leq w \leq \pi$

$$X(e^{jw}) = \begin{cases} 0 & 0 \leq |w| \leq W \\ 1 & W \leq |w| \leq \pi \end{cases} \tag{3}$$

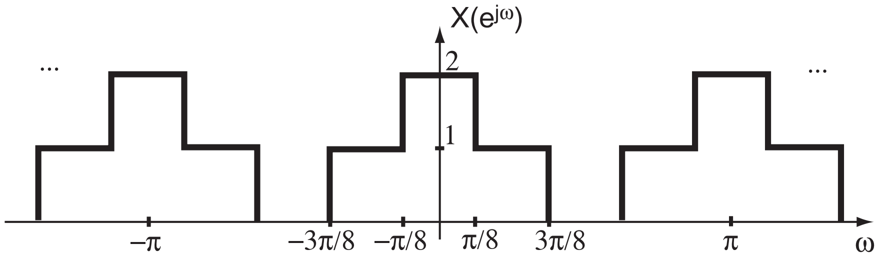


Figure 1:

(b) $X(e^{jw}) = 1 - 2e^{-j2w} + 4e^{j2w} + 3e^{-j6w}$
(c) $X(e^{jw}) = cos^2(w)$
(d) $X(e^{jw})$ como el de la figura 1

10. Sea $X(e^{jw})$ la transformada de Fourier (TF) de la secuencia $x(n)$ de la figura 2. Calcule lo siguiente:

(a) $X(e^{jw})|_{w=0}$.
(b) Fase $X(e^{jw})$. Recomendación: Use las propiedades de simetría de la TF.
(c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})dw$. Recomendación: Relacione esta expresión con la ecuación de síntesis de la TF.
(d) Determine y dibuje la se nal que tenga como TF: $\hat{X}(e^{jw}) = |[X(e^{jw})]|$.

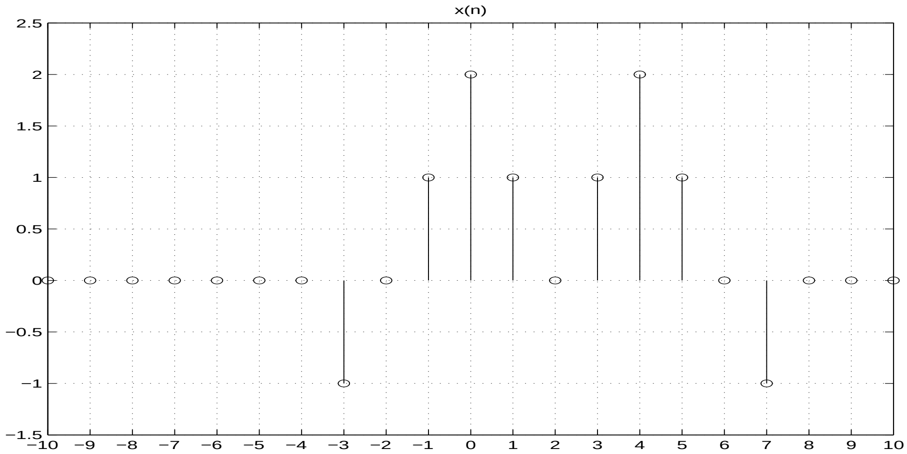


Figure 2:

11. Usando el resultado del ejercicio anterior, calcula la Transformada de Fourier de $x_1(n) = cos(w_0 n)$ y $x_1(n) = sen(w_0 n)$. **Recuerda:** $cos(\alpha) = (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})/2$.

12. Encuentra la respuesta en frecuencia $H(e^{jw})$ del sistema LTI cuya entrada y salida satisface la ecuación en diferencias:

$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) \tag{4}$$

13. Representa el diagrama de bloques de la ecuación en diferencias que caracteriza el sistema cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(e^{jw}) = \frac{2 - 1.5e^{-jw}}{1 - 1.5e^{-jw} + 0.5e^{-j2w}} \tag{5}$$

14. Un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(n) = \frac{sen(\frac{\pi}{5}n)}{\pi n} \tag{6}$$

Tiene como entrada al sistema:

$$x(n) = cos(\frac{\pi}{6}n) + sen(\frac{\pi}{4}n) \tag{7}$$

Determina la salida del sistema.

15. Determina la transformada de Fourier de

(a)

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{8}$$

NOTA: Usa el resultado de la transformada de un pulso rectangular y la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

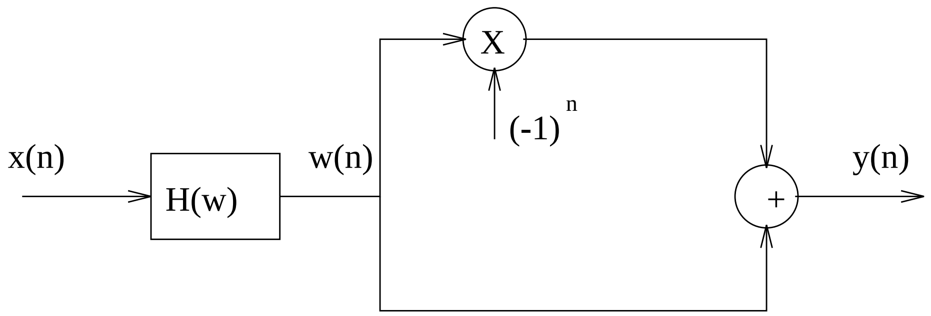
(b)

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + cos(\frac{2\pi n}{M})) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{9}$$

Recomendación: Expresa $y(n)$ en términos de $x(n)$ del anterior apartado y las exponenciales complejas $e^{j(2\pi n/M)}$ y $e^{-j(2\pi n/M)}$

16. Considerando el sistema de la figura 1, determina la respuesta impulsional. $H(e^{jw})$ es un filtro paso bajo ideal tal que:

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & |w| < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |w| \leq \pi \end{cases} \tag{10}$$



Recuerda que $H(e^{jw})$ es periódica con período 2π.

17. Calcula la respuesta impulsional de los siguientes sistemas:

(a) $y(n) = x(n) + y(n-2)$

(b) $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + y(n-2)$

(c) $y(n) - y(n-2) = 2x(n) - 3x(n-4)$

(d) $y(n) - \frac{\sqrt{3}}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) = x(n)$

(e) $y(n) - 1.8cos(\frac{\pi}{16})y(n-1) + 0.81y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$

Soluciones

1.

2.

3.

4. $h_{hp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$

5. $x(n) = \frac{sen(w_c n)}{\pi n}$

6. (a) $x(n) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}$
   (b) e^{-jwn_d}

7. (a) $\frac{ae^{-j2w}}{1-ae^{-jw}}$
   (b) $\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}[8e^{j3w} - \frac{1}{4}e^{-j2w}]$
   (c) $\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{jw}}$

8. $x(n) = e^{jw_0 n}$

9. (a) $x(n) = (-1)^n \frac{W}{\pi} sinc(\frac{W}{\pi}n)$
   (b) $x(n) = 4\delta(n+2) + \delta(n) - 2\delta(n-2) + 3\delta(n-6)$
   (c) $x(n) = -\frac{1}{2}\delta(n+2) + \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2)$
   (d) $\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}n}cos(\frac{\pi}{2}n)\left(sinc(\frac{n}{8}) + 3sinc(\frac{3}{8}n)\right)$

10. (a) $X(e^{j0}) = 6$
    (b) $\angle X(e^{jw}) = -2w$
    (c) 4π
    (d) $\hat{x}(n) = x(n+2)$.

11. (a) $X_1(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(w - w_0 + 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(w + w_0 + 2\pi k)$
    (b) $X_2(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{j}\delta(w - w_0 + 2\pi k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{j}\delta(w + w_0 + 2\pi k)$

12. (a) $H(e^{jw}) = -2e^{-jw} - 8 + \frac{9}{1-0.5e^{-jw}}$

13. $h(n) = [(\frac{1}{2})^n + 1]u(n)$

14. $y(n) = cos(\frac{\pi}{6}n)$

15. (a) $X(e^{jw}) = \frac{sen[(\frac{M}{2}+\frac{1}{2})w]}{sen(\frac{w}{2})}e^{-j\frac{wM}{2}}$
    (b) $\frac{X(e^{jw})}{2} + \frac{1}{4}[X(e^{j(w-\frac{2\pi}{M})}) + X(e^{j(w+\frac{2\pi}{M})})]$

16. $y(n) = \delta(n)$

17. (a) $h(n) = \frac{1}{2}(-1)^n u(n) + \frac{1}{2}(1)^n u(n)$
    (b) $h(n) = \frac{3}{2}(1)^n u(n) - \frac{1}{2}(-1)^n u(n)$
    (c) $h(n) = 3\delta(n-2) + 3\delta(n) - \frac{1}{2}(1)^n u(n) - \frac{1}{2}(-1)^n u(n)$
    (d) $h(n) = \frac{1-\sqrt{3}j}{2}(\frac{\sqrt{3}+j}{2})^n u(n) + \frac{1+\sqrt{3}j}{2}(\frac{\sqrt{3}-j}{2})^n u(n)$
    (e) $|A|0.9^n cos(\frac{\pi}{16}n + \angle A)$ donde $A = \frac{1+\frac{1}{1.8}e^{-j\pi/16}}{1-e^{-j\pi/8}}$