TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

Boletín de Problemas 3
Transformada Discreta de Fourier de Secuencias (DFT)

1. Recordando que $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ demuestre

   a) $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn}$
   b) $W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$
   c) $W_N^l = W_{N/l}$ siendo N un múltiplo de l.

2. Calcule la N-DFT (es decir, DFT de N puntos) de cada una de las siguientes secuencias:

   a) $x(n) = \delta(n)$.
   b) $x(n) = \delta(n - n_0)$.
   c)

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

3. Considere la siguiente secuencia compleja:

$$x(n) = \begin{cases} e^{jw_0 n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \qquad (1)$$

   a) Encuentre la TF, $X(e^{jw})$, de $x(n)$.
   b) Encuentre la N-DFT, $X(k)$, de la secuencia de longitud finita $x(n)$.
   c) Encuentre la DFT de $x(n)$ para el caso $w_0 = 2\pi k_0/N$, donde k_0 es un entero.

4. Considere que $X(e^{jw})$ es la TF de la secuencia $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ y que $y(n)$ es una secuencia de longitud 10, es decir, $y(n) = 0$ para $n < 0$ y $y(n) = 0$ para $n \geq 10$. Además, la DFT de 10 puntos de $y(n)$, $Y(k)$, corresponde con 10 muestras equiespaciadas de $X(e^{jw})$, es decir $Y(k) = X(e^{j2\pi k/10})$. Determine $y(n)$.

5. Considere una secuencia, $x(n)$, y su TF, $X(e^{jw})$.

   a) Se desea evaluar $X(e^{jw})$ en $w = 5\pi/3$ con una DFT de N puntos. Determine el valor mínimo de N y el índice k de la DFT para obtener la TF en esa frecuencia.

6. Las dos secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$ mostradas en la figura 1 tienen como DFT las secuencias $X_1(k)$ y $X_2(k)$, respectivamente. Determine la relación entre $X_1(k)$ y $X_2(k)$.

7. La figura 2 muestra dos secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$. Muestre la secuencia de 6 puntos, $y(n)$, resultado de convolucionar ambas.

8. Considere la secuencia de la figura 3. La DFT de 5 puntos de $x(n)$ es $X(k)$. Represente la secuencia $y(n)$ cuya DFT de 5 puntos sea $Y(k) = W_5^{-2k} X(k)$.

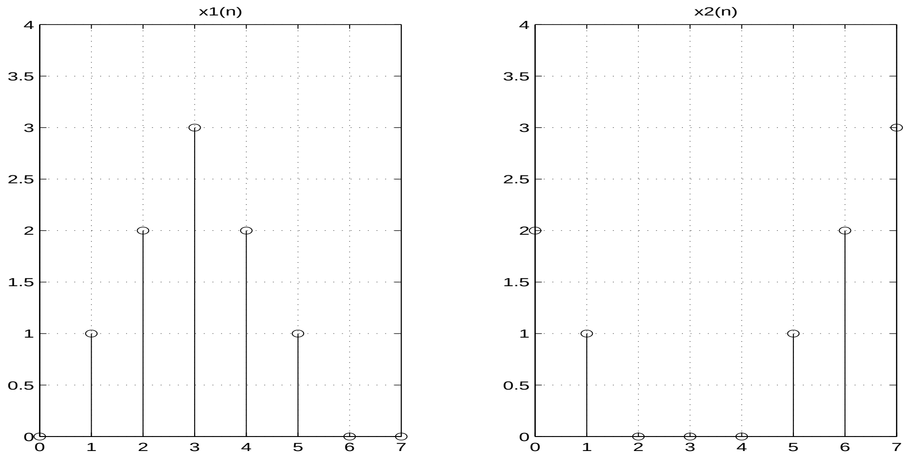

Figura 1:

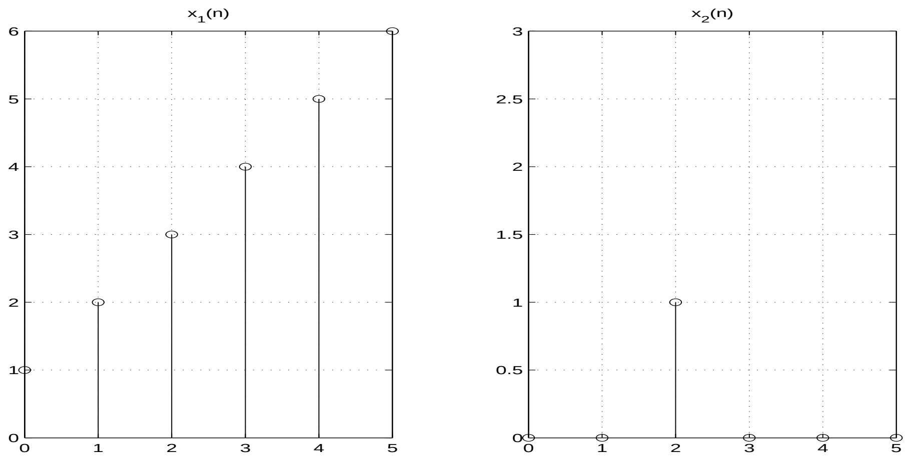

Figura 2:

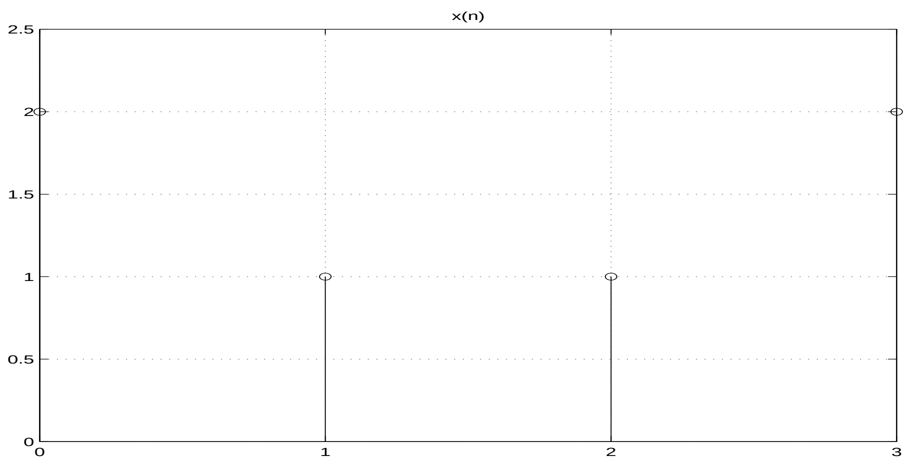

Figura 3:

9. Considere una secuencia de longitud L, es decir, $x(n) = 0$ para $n < 0$ y $n \geq L$. Si $X(e^{jw})$ es la TF de $x(n)$, $X(k)$ es una secuencia de 64 muestras equiespaciadas de $X(e^{jw})$, es decir

$$X(k) = X(e^{jw})\big|_{w=\frac{2\pi}{64}k} \qquad k = 0, \cdots, 63 \tag{2}$$

Se sabe que $X(k) = 64$ para $k = 32$ y $X(k) = 0$ para $k \neq 32$.

   a) Si la longitud de la secuencia, $x(n)$, es $L = 64$, determine una secuencia consistente con la información disponible. ¿Es la respuesta única? Si lo es, explícalo. Si no, representa al menos dos secuencias $x(n)$.

   b) Si la longitud de la secuencia, $x(n)$, es $L = 128$, determine una secuencia consistente con la información disponible. ¿Es la respuesta única? Si lo es, explícalo. Si no, representa al menos dos secuencias $x(n)$.

10. Suponga que tenemos un programa de ordenador que calcula la N-DFT de una secuencia $x(n)$ que introducimos como parámetro de entrada. ¿Cómo se podría usar este programa para calcular la N-IDFT de una secuencia $X(k)$ en frecuencia?

    Recomendaciones: Analice las similitudes entre la ecuación de la N-DFT y de la N-IDFT y piense que no puede modificar el programa pero si la secuencia de entrada. Además, considere alguna de las propiedades de W_N vistas en un problema anterior.

11. Sea $x(n)$ una secuencia periódica con período fundamental N. Considere que la DFT de N puntos de esta secuencia es $X_1(k)$ y que la DFT de $3N$ puntos es $X_3(k)$.

    a) ¿Cuál es la relación entre $X_1(k)$ y $X_3(k)$?
    NOTA: La secuencia usada para el cálculo de la DFT, es una versión enventanada de $x(n)$ por una ventana rectangular de tamaño igual al número de puntos de la DFT a calcular.

    b) Verifique el resultado del anterior apartado con una secuencia de período fundamental igual a 2 y definida en el primer período de la siguiente forma

$$x(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) \tag{3}$$

12. Un diseñador dispone de varios chips para realizar una FFT de 8 puntos. Demuestre explícitamente como deben interconectarse tres de estos chips para calcular una DFT de 24 puntos.

Soluciones

1.

2. a) $X(k) = 1$

   b) SOL: $X(k) = W_N^{kn_0}$

   c) $\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$

3. a) $X(e^{jw}) = \frac{1-e^{j(w_0-w)N}}{1-e^{j(w_0-w)}}$.

   b) $X(e^{jw}) = \frac{1-e^{jw_0N}}{1-e^{jw_0}W_N^k}$.

   c)

$$X(k) = \begin{cases} N & k = k_0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

4.

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1024}{1023}(\frac{1}{2})^n & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

5. a) $N = 6$ y $k = 5$.

6. $X_2(k) = (-1)^k X_1(k)$

7. Ver figura 4

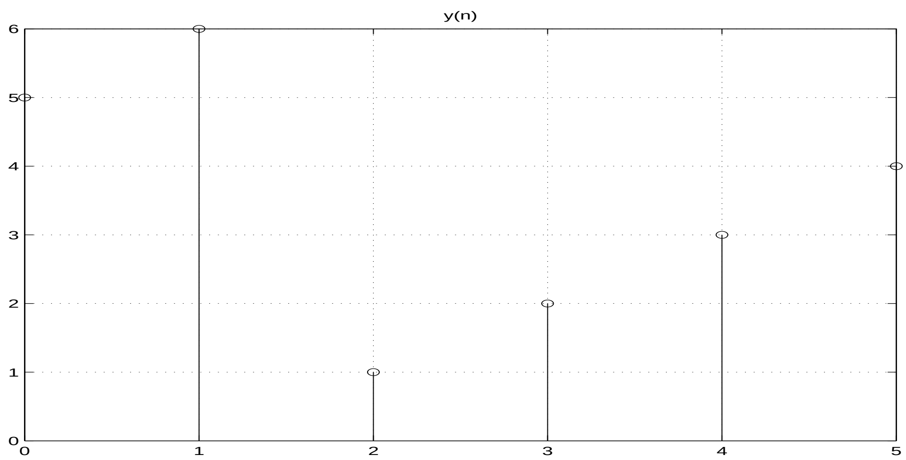

Figura 4:

8. Ver figura 5.

9. a) $x(n) = (-1)^n$

   b)

$$x(n) = \begin{cases} (-1)^n & 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & 64 \leq n \leq 127 \end{cases} \tag{4}$$

$$x(n) = 0{,}5(-1)^n \qquad 0 \leq n \leq 127 \tag{5}$$

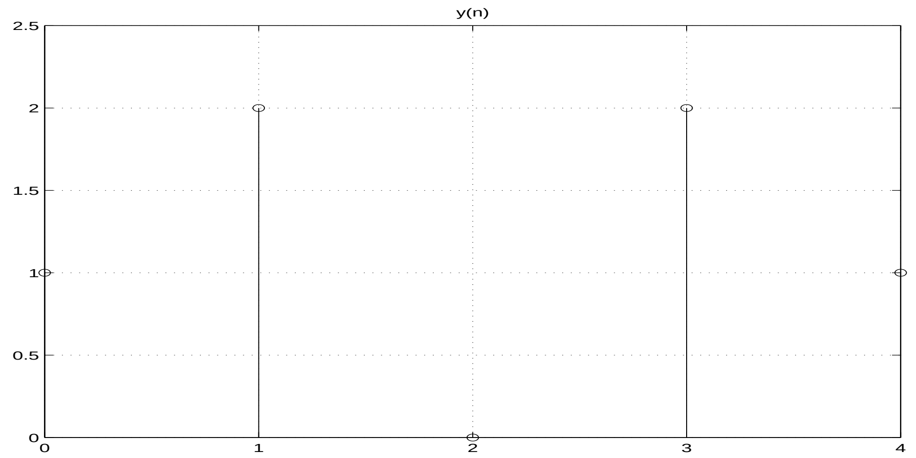

Figura 5:

10. Intoduciendo como parámetro de entrada al programa la secuencia $X^*(k)$. La salida la conjugamos y la dividimos por N.

11. *a*) $X_3(k) = (1 + W_3^k + W_3^{2k})X_1(\frac{k}{3})$ donde $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

    b) $X_1(k) = 2 + W_2^k$ y $X_3(k) = (1 + W_3^k + W_3^{2k})(2 + W_2^{\frac{k}{3}})$

12. $X(k) = X_1(k) + W_{24}^k X_2(k) + W_{24}^{2k} X_3(k)$ donde $X_1(k)$, $X_2(k)$ y $X_3(k)$ son las DFT de 8 puntos de $x(3n)$, $x(3n+1)$ y $x(3n+2)$, respectivamente.