TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

Boletín de Problemas 4
Transformada Z

1. Calcule la transformada Z de $x(n) = \delta(n)$, $x(n) = \delta(n-1)$ y $x(n) = \delta(n+1)$.
2. Calcule la transformada Z de $x(n) = (\frac{1}{3})^n sen(\frac{\pi}{4}n)u(n)$.
   Recomendación: Haga uso de la relación de Euler ($e^{jw} = cos(w) + jsen(w)$) para expresar el $sen(\cdot)$ como suma de exponenciales complejas.
3. Calcule la transformada Z de $x(n) = b^{|n|} \quad b > 0$.
   Recomendación: Haga uso de la propiedad de linealidad.
4. Calcule la transformada inversa de $X(z) = 4z^2 + z + 3z^{-1}$.
5. Calcule la transformada inversa de
   a) Una secuencia definida desde 0 hasta ∞ (hacia la derecha) y con TZ:
   $$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \tag{1}$$
   b) Una secuencia definida para todo n (hacia ambos lados) y con TZ igual a la expresión (1).
   c) Una secuencia definida desde $-\infty$ hasta 0 (hacia la izquierda) y con TZ igual a la expresión (1).

   Recomendación: Tendrá que descomponer todo en fracciones simples.
6. Calcule, usando la transformada Z, $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ donde $x_1(n) = a^n u(n)$ y $x_2(n) = u(n)$.
7. Se quiere implementar el siguiente sistema descrito por ecuaciones en diferencia: $y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$ Determine:
   a) Si el sistema es estable. Razone la respuesta.
   b) La respuesta impulsional del sistema.
   c) ¿ Cuál es la respuesta del sistema cuando la entrada es el escalón unitario, $u(n)$?.
8. Se quiere diseñar un sistema LTI causal en tiempo discreto con la propiedad de que si la entrada es
   $$x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$
   entonces la salida es
   $$y(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$$
   Determine
   a) La función sistema, $H(z)$, y la respuesta impulsional, $h(n)$, de un sistema que satisfaga las condiciones precedentes.

b) La ecuación en diferencias que caracteriza el sistema.

c) ¿ Es el sistema estable? Razone la respuesta.

Recomendación: Trabaje siempre en el dominio Z y finalmente pase todo al dominio temporal.

9. Represente aproximadamente el módulo de la respuesta en frecuencia de los sistemas descritos por las siguientes ecuaciones en diferencias:

   a) $y(n) + 0{,}7y(n-1) = x(n)$

   b) $y(n) + 0{,}7y(n-1) = x(n) - x(n-1)$

   c) $y(n) + 0{,}81y(n-2) = x(n)$

   d) $y(n) - 0{,}7071y(n-1) + 0{,}25y(n-2) = x(n) - 0{,}5x(n-1)$

   Recomendación: Use la interpretación geométrica de la transformada Z.

Soluciones

1. $X(z) = 1$ con ROC todo z. $X(z) = z^{-1}$ con ROC todo z excepto $z = 0$. $X(z) = z$ con ROC todo z excepto $z = \infty$.

2. $X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt(2)}z}{(z-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}})(z-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}})}$ ROC: $|z| > \frac{1}{3}$

3. $$\begin{cases} b > 1 & \text{No existe la TZ (es decir, no hay ROC)} \\ b < 1 & X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} \quad ROC: b < |z| < \frac{1}{b} \end{cases}$$

4. $x(n) = 4\delta(n+2) + \delta(n+1) + 3\delta(n-1)$

5. *a*) $x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n) + 2(\frac{1}{3})^n u(n)$
   b) $x(n) = (\frac{1}{4})^n u(n) - 2(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$
   c) $x(n) = -(\frac{1}{4})^n u(-n-1) - 2(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$

6. $y(n) = \frac{1}{1-a}(u(n) - a^{n+1}u(n))$

7. *a*) Si.
   b) $h(n) = [2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n]u(n)$
   c) $y(n) = [\frac{8}{3} - 2(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n]u(n)$.

8. *a*)
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \\ h(n) &= [3(\frac{1}{4})^n u(n) - 2(\frac{1}{3})^n]u(n) \end{aligned}$$
   b) $y(n) - \frac{7}{12}y(n-1) + \frac{1}{12}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$
   c) Si.

9. Use la función de matlab `freqz` para probar el resultado obtenido. Esta función se usa de forma general para sistemas de segundo orden, de la siguiente forma:
$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$
   Código de matlab:
$$[\mathbf{H}, \mathbf{w}] = freqz([b_0 b_1 b_2], [a_0 a_1 a_2])$$
$$plot(\mathbf{w}, abs(\mathbf{H}))$$
   donde **w** y **H** son dos vectores, uno con las frecuencias y el otro con las respuestas del sistema para esas frecuencias. Tenga en cuenta que la representación de matlab se realiza en la mitad positiva de la frecuencia, es decir, en el intervalo $(0, \pi)$.