TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL
Transformada Discreta de Fourier de Secuencias II

Práctica 3

Fecha: 19 de abril de 2010

1. Introducción

Esta práctica analiza ciertas características de las secuencias resultantes de un tratamiento de señal por medio de la DFT (Transformada Discreta de Fourier). Para ello, se persiguen dos objetivos:

1. Estudio y comprensión de las operaciones de desplazamiento, reflexión y convolución temporal de secuencias usando la DFT y la IDFT (DFT inversa).
2. Análisis del efecto de enventanado de secuencias de gran longitud.

1.1. Resultados Útiles de Prácticas Anteriores

Para el desarrollo de la práctica es necesario utilizar el algoritmo de la DFT con matrices, desarrollado en la práctica anterior, y su algoritmo inverso: IDFT[1]. Para implementar la IDFT vamos a considerar que la matriz $\mathbf{F}$ de la práctica anterior es cuadrada, es decir, de tamaño $N \times N$ (donde N es el número de puntos de la DFT). Para ello, las secuencias de longitud L se extenderán a tamaño N, rellenando con $N - L$ ceros.

Por otro lado, y debido a errores de redondeo en el cálculo numérico de la DFT, las secuencias obtenidas de los algoritmos DFT e IDFT han de ser **redondeadas hasta las milésimas**, tal y como se indicó en la práctica anterior.

1.2. Secuencias de Prueba

A lo largo de la práctica se usarán las siguientes secuencias de longitud limitada:

- Una secuencia triangular de longitud $2L - 1$, obtenida de la siguiente forma:

$$x(n) = x_1(n) * x_1(n) \tag{1}$$

  donde

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & resto \end{cases} \tag{2}$$

- Una secuencia rampa de longitud L:

$$x(n) = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & resto \end{cases} \tag{3}$$

- Una secuencia pulso rectangular de longitud L:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & resto \end{cases} \tag{4}$$

Además, el número de muestras para el cálculo de la DFT será de N.

[1]Tenga en cuenta que si $\mathbf{F}$ es una matriz de tamaño $N \times N$, usada para el cálculo de N muestras de la DFT, $\mathbf{F}^{-1} = \frac{\mathbf{F}^*}{N}$ (donde * representa el conjugado de un complejo) es la matriz usada para recuperar la secuencia original en el tiempo, $x(n)$, a partir de la secuencia en frecuencia, $X(k)$.

2. Desplazamientos en Tiempo

En este apartado se compararán los desplazamientos lineales de secuencias, frente a los circulares. Para ello, recuerde que un desplazamiento temporal de una secuencia $x(n)$ se traduce en frecuencia en el producto de la secuencia obtenida de la DFT, $X(k)$, por la exponencial $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$, donde n_0 es el número de puntos de desplazamiento temporal. Este desplazamiento debe realizarse siempre de forma circular y por lo tanto esta operación se convierte en

$$x((n - n_0) \text{ módulo } N) = x((n - n_0)_N) \tag{5}$$

2.1. Desplazamientos Lineales vs. Circulares

Realice un programa, `desplaza.m`, que haga los siguientes pasos (para valores de L, n_0 y N predeterminados):

1. Defina una secuencia, $x(n)$, en forma de rampa (3) con longitud L.
2. Realice el desplazamiento circular de dos formas distintas:
   a) **Mediante operación módulo:** Obteniendo la secuencia desplazada, $x_{d1}(n)$, mediante la operación (5).
   b) **Mediante DFT e IDFT.**
      1) Calcule la DFT, $X(k)$, de N muestras de la secuencia $x(n)$.
      2) Obtenga la secuencia en frecuencia $X_{d2}(k) = X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$.
      3) Obtenga la secuencia en el tiempo $x_{d2}(n) = IDFT[X_{d2}(k)]$.
3. Represente en una misma figura (usando la instrucción de matlab `subplot()`) la secuencia original $x(n)$ y las desplazadas, mediante los dos métodos anteriores, $x_{d1}(n)$ y $x_{d2}(n)$.

Ejecute el programa para los valores $L = 10$, $N = 20$ con los desplazamientos $n_0 = 5$, $n_0 = 10$, $n_0 = 15$, $n_0 = -1$ y $n_0 = -5$. ¿Para qué valores de n_0 el desplazamiento circular es igual al lineal?

2.2. Importancia de la Fase de la DFT

En esta sección se analiza que tipo de información contiene la fase de la DFT de una secuencia discreta.

Se pide:

1. Defina la secuencia, $x(n)$, en forma triangular (1) para $L = 10$.
2. Calcule la DFT , $X(k)$, de $N = 32$ muestras.
3. Obtenga la secuencia en tiempo a partir del módulo de $X(k)$, es decir: $x_m(n) = IDFT[|X(k)|]$.
4. Represente en una misma gráfica, mediante `stem`, las secuencias $x(n)$ y $x_m(n)$.

¿Qué relación hay entre $x(n)$ y $x_m(n)$? ¿Por qué? ¿Qué tipo de información cree que contiene la fase de la transformada de Fourier[2]?

3. Desplazamientos Frecuenciales

Una propiedad dual a la de desplazamiento temporal es la de desplazamiento frecuencial. Recuerde que el producto de una secuencia, $x(n)$ (cuya DFT es $X(k)$), con la exponencial $e^{j\frac{2\pi}{N}k_0n}$, produce un desplazamiento circular en frecuencia de k_0, $X((k - k_0)_N)$.

[2]Para ello, recuerde las consecuencias de las propiedades de la transformada de Fourier de conjugación e inversión en tiempo. ¿Cómo es la transformada de Fourier de una señal real y par?

3.1. Secuencias de prueba

Para probar este tipo de desplazamientos, vamos a usar la secuencia de longitud L, obtenida de muestrear la función *sinc*. Para generar ésta, se puede usar la función de matlab `sinc`, de la siguiente forma:

```
x = sinc((n-round(L/2))/10);
```

donde, recuerde, $n = 0, \cdots, L-1$. Haga un programa, `convfrec.m`, que muestre las gráficas[3] de los módulos de las DFT de la secuencia original y de la secuencia multiplicada por la exponencial antes indicada (use la instrucción `plot` para obtener una mejor representación), para los valores $N = L = 100$ y k_0 igual a un valor del desplazamiento frecuencial correspondiente a $w_0 = \pi/2$ rad/seg. ¿Qué valor de k_0 es el que tiene que considerar para esa frecuencia?

3.2. Señales de Audio (OPCIONAL)

Probaremos ahora el efecto físico que produce un desplazamiento circular en frecuencia. Para ello, se usarán ficheros de audio.

Los desplazamientos frecuenciales son muy usados para codificar señales de audio. Como un desplazamiento lleva implícito el producto de una secuencia real por una secuencia exponencial compleja, esto nos daría como resultado una secuencia compleja que carece de significado físico. Para evitar esta situación, se suelen considerar dos desplazamientos (uno a la derecha y otro a la izquierda) mediante la secuencia:

$$d(n) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}\right) = cos(\frac{2\pi}{N}k_0 n) \tag{6}$$

que como se observa es una secuencia real. Observe que la amplitud de las exponenciales se ha dividido por 2 para conservar la energía original de la señal.

Se pide realizar un programa, `codifica.m`, que, para un fichero de audio y una frecuencia f_0 determinada, realice lo siguiente (para un fichero de audio determinado):

1. Mediante la instrucción `wavread` [1] introduzca las muestras del fichero de audio en un vector, $x(n)$. ¿Qué frecuencia de muestreo, F_s, se ha usado para muestrear las señales?

2. Realice un desplazamiento en frecuencia de f_0 de la siguiente forma:

   a) Teniendo en cuenta que la frecuencia F_s de la transformada de Fourier (TF) de la señal continua equivale a 2π en la TF de la secuencia discreta, ¿cuál es el valor de k_0 para la frecuencia f_0 en una DFT de $N = 2^{13} = 8192$ puntos?

   b) Multiplique $x(n)$ por la secuencia, $d(n)$ definida en (6), para obtener la secuencia $x_d(n)$.

3. Represente, usando la instrucción `plot`, el módulo de la DFT de $x(n)$ y de $x_d(n)$, indicando el eje horizontal en frecuencias naturales en Hertzios, en el intervalo $[0, F_s)$Hz. Debido al gran número de puntos de la DFT, use el algoritmo `fft` de matlab.

4. Reproduzca la secuencia original y la resultante (codificada)[4]

[3] Al hacer una representación en frecuencia, salvo que se especifique lo contrario, indique el eje de frecuencias en rad/seg.

[4] Una secuencia puede ser reproducida directamente mediante la instrucción `sound` [1], o generando ficheros `.wav` (`wavwrite` [1]) o `.au` (`auwrite` [1]) que puedan ser escuchados con el reproductor de audio del sistema.

Pruebe el programa para los ficheros de audio: uno con un tono `tono.wav` y otro con voz `vista.wav` (disponibles en la página web de la asignatura), y considere los desplazamientos producidos por las frecuencias $f_0 = 2000$Hz y $f_0 = F_s/2$. ¿Qué aprecia en la audición[5] de las señales con los desplazamientos indicados?

La operación de decodificación se realizará mediante otro desplazamiento en frecuencia similar al realizado en la codificación. Lo que ocurre es que esta operación requiere un filtrado paso bajo final de la señal resultante. Sin embargo, este filtrado se puede evitar en el caso de haber realizado la codificación con una frecuencia de desplazamiento $f_0 = F_s/2$. Así pues, para recuperar la señal $x(n)$ a partir de la $x_d(n)$, sólo habrá que multiplicar ésta última por $d(n)$. Explique el motivo[6].

Se pide:

1. Obtenga, para la señal de voz codificada con $f_0 = F_s/2$, la señal $\hat{x}(n) = x_d(n)d(n)$. Represente en una misma gráfica las señales, $x(n)$ y $\hat{x}(n)$ y el módulo de sus transformadas. ¿Qué observa? Reproduzca la señal $\hat{x}(n)$ y compárela con $x(n)$.

2. Haga lo mismo que en el caso anterior pero para $f_0 = 2000$Hz. ¿Se obtienen los mismos resultados que antes?

3. La señal `codificada.wav` (disponible en la página web de la asignatura) está codificada con una frecuencia $f_0 = F_s/2$. Al reproducirla, ¿entiende lo qué se oye? Decodifíquela y reprodúzcala. ¿Qué se oye ahora?

4. Reflexiones Circulares (OPCIONAL)

Cuando se trabaja con secuencias de longitud limitada y la DFT, una reflexión de una secuencia $x(n)$, cuya DFT es $X(k)$, se interpreta de forma circular, es decir:

$$x(-n \text{ módulo } N) = x((-n)_N) \tag{7}$$

y su DFT es $X(-k \text{ modulo } N) = X((-k)_N)$.

Realice un programa, `refleja.m`, que realice los siguientes pasos (para valores de L y N predeterminados):

1. Defina una secuencia, $x(n)$, en forma de rampa (3) con longitud L.

2. Realice la reflexión circular (7) de la secuencia $x(n)$, obteniendo una nueva secuencia, $x_r(n)$. **No se permite el uso de bucles** para generar la secuencia reflejada[7].

3. Calcule las DFTs con N muestras de las secuencias $x(n)$ y $x_r(n)$, es decir $X(k)$ y $X_r(k)$, respectivamente.

4. Represente en una misma figura (usando la instrucción de matlab `subplot()`) la secuencia original $x(n)$, $x_r(n)$ y los módulos y ángulos de sus DFT, $X(k)$ y $X_r(k)$.

Ejecute el programa para los valores $L = 10, N = 10$ y $L = 10, N = 20$. ¿Se cumple la propiedad de reflexión de la DFT?

[5] Recuerde que todas las instrucciones de audio de matlab: `sound`, `wavwrite`, `auwrite`, requieren la especificación de la frecuencia de muestreo.

[6] Recuerde que $cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(cos(2\alpha) + 1)$

[7] Matlab tiene una instrucción para invertir vectores fila (columna) que es `fliplr` (`flipup`). Tenga presente que esta instrucción no implementa directamente (7), pero puede ser de utilidad.

5. Convoluciones Lineales vs. Circulares

Esta sección comparará los desplazamientos lineales frente a los circulares.

Escriba un programa, `convol.m`, que realice los siguientes pasos (para unos valores de L_1, L_2 y N predeterminados):

1. Defina dos secuencias, $x_1(n)$ y $x_2(n)$, en forma de pulsos (4) con longitudes L_1 y L_2 respectivamente.

2. Calcule la convolución lineal $x_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$ por medio de la instrucción de matlab `conv`.

3. Calcule la convolución circular de N puntos, $x_c(n)$, de la siguiente forma:

   a) Calcule la DFT de N puntos, $X_1(k)$ y $X_2(k)$, de las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$, respectivamente.

   b) Calcule la secuencia en frecuencia $X_c(k) = X_1(k)X_2(k)$.

   c) Calcule la secuencia en el tiempo $x_c(n) = IDFT[X_c(k)]$.

4. Represente en una misma figura (usando la instrucción de matlab `subplot()`) $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_l(n)$ y $x_c(n)$.

Ejecute el programa para los siguientes conjuntos de valores:

- $L_1 = L_2 = 15, N = 20$.
- $L_1 = 10, L_2 = 2, N = 10$.

Para cada uno de los casos anteriores, ¿Cuál es la longitud de las secuencias $x_l(n)$ y $x_c(n)$? ¿Son iguales? Para $L_1 = 10$ y $L_2 = 2$, ¿cuál es el mínimo valor de N que logra que la convolución circular sea idéntica a la lineal? Ejecute el programa `convol.m` para este valor.

5.1. Convoluciones Mediante el Producto de Matrices (OPCIONAL)

Tengamos en cuenta la expresión de la convolución circular de N puntos:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h((n-k)_N)x(k) \tag{8}$$

donde $x(n)$ y $h(n)$ son dos secuencias de longitudes L_1 y L_2, respectivamente, que se rellenan con ceros hasta tener una longitud N. Si fijamos un valor de n entre 0 y $N-1$ podemos expresar el sumatorio de (8) por medio de un producto escalar de dos vectores de la forma $y(n_0) = \mathbf{h}_{n_0}^T\mathbf{x}$, donde $\mathbf{h}_{n_0} = [h((n_0)_N), h((n_0-1)_N), \cdots, h((n_0-(N-1))_N)]^T$ y $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \cdots, x(N-1)]^T$.

Considerando los N posibles valores de n podemos obtener un vector conteniendo la secuencia resultante de convolucionar las secuencias $x(n)$ y $h(n)$ de la forma $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$, donde $\mathbf{H}$ es una matriz de convolución de de tamaño $N \times N$ de la siguiente forma

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_0^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{N-1}^T \end{pmatrix} \tag{9}$$

Haga un programa, `matrizconv.m`, que obtenga la matriz de convolución para un valor N y una secuencia h determinados. Pruebe este programa para calcular las convoluciones circulares pedidas en la sección anterior.

5.2. Cuestión Práctica (OPCIONAL)

Nueve amigos están un día tomando un café en una mesa redonda. Uno de ellos (estudiante de TDS en informática) les hace una apuesta al resto. Esta apuesta consiste en adivinar la edad de sus amigos mediante un ïnocente"juego. Para ello, este estudiante sale de la habitación y le dice al resto que mientras está fuera, cada uno de los ocho que quedan le pregunte a los dos amigos que tiene a los lados cuales son sus edades. A continuación, cada uno suma estas dos edades con la suya y guarda el número resultante. Cuando el estudiante de informática regresa, recoge los ocho resultados de las sumas.

Este es un problema que guarda mucha relación con las convoluciones circulares y se puede interpretar como el proceso inverso a una convolución (deconvolución). ¿Cómo calcularía usted las ocho edades sin invertir ninguna matriz ni resolver ningún sistema de ecuaciones? En este problema se podría utilizar lo aprendido en la sección 5. Piense en valores de $L_1 = N = 8$ y un cierto L_2. ¿Qué valor tendrá L_2? ¿Cómo sería la secuencia $x_2(n)$?

Realice un programa, `deconvol.m`, que calcule las edades para el siguiente vector de resultados de las sumas: $[57, 63, 66, 69, 64, 67, 63, 64]$.

6. Enventanado

Veamos ahora los efectos del enventanado en la DFT de N puntos de una secuencia de larga duración. Para ello, consideraremos una secuencia, de longitud infinita, correspondiente a la suma de dos tonos:

$$x(n) \quad = \quad A_0 cos(w_0 n) + A_1 cos(w_1 n) \tag{10}$$

a la que le aplicaremos una ventana de duración L.

Realice un programa, `ventanas.m`, que permita enventanar la secuencia (10) (para diferentes valores) por medio de una ventana rectangular y otra de hamming. Este programa ha de representar el módulo de la DFT de N puntos de la secuencia enventanada $v(n) = x(n)w(n)$ con ambos tipos de ventana. Para obtener una representación más clara, haga ésta en escala logarítmica (es decir, use en lugar de la instrucción `plot`, la instrucción `semilogy`).

Para realizar este apartado, necesitará crear una función que genere una ventana de Hamming que recuerde tiene la siguiente expresión[8]:

$$w(n) \quad = \quad 0{,}54 - 0{,}46 cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) \tag{11}$$

1. Analice los efectos de las ventanas en tonos con diferencias de amplitud considerables, utilizando el programa `ventanas.m` para: $N = 256, L = 100, A_0 = 3, A_1 = 0{,}4, w_0 = \frac{2\pi}{15}, w_1 = \frac{\pi}{5}$ ¿Qué observa? ¿Cuál de las dos ventanas da mejor visión de las frecuencias de los dos tonos?

2. Analice los efectos de las ventanas en tonos con frecuencias más o menos cercanas, utilizando el programa `ventanas.m` para: $N = 256, L = 50, A_0 = 1, A_1 = 0{,}75, w_0 = \frac{2\pi}{15}, w_1 = \frac{\pi}{5}$ ¿Qué observa? ¿Cuál de las dos ventanas da mejor visión de las frecuencias de los dos tonos?

7. Documentación y Fecha de entrega

La fecha de depósito de la práctica será el día **29 de abril**. Se deberán depositar los ficheros `*.m` de los programas de matlab utilizando el mecanismo de recogida de prácticas del CECAFI.

[8]Aunque existe una función equivalente en el *toolbox* de *signal proccessing* de matlab, no lo usaremos.

Los programas respetarán el nombre indicado en cada apartado y han de estar debidamente comentados. Cada alumno ha de efectuar este depósito en su directorio correspondiente y conservar una copia de todos los programas para su evaluación el día del examen de prácticas.

Nota: Las preguntas planteadas deben ser contestadas en un fichero de texto llamado `respuestas.txt`.

Referencias

[1] Manual *online* de `matlab`. Instrucción `help`.