(08-02-2007)

1. Sea V un K-espacio vectorial. Se pide:

a) Si $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal inyectiva, probar que $Ker\ f = \{0\}$.

b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V, probar que todo vector de V se expresa de modo único como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + z, y, x + 2y + z)$$

a) Determinar una base de $Ker\ f$.

b) Calcular para que valores de λ el vector $(2, -2, 1 + \lambda)$ está en $Im\ f$.

c) Calcular una base del subespacio $f^{-1}\langle(1, 1, 3)\rangle$.

3. Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$U_a = \langle(1, 2, 1), (2, 4, a + 3), (5, 10, 2a + 7)\rangle \text{ y}$$
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$$

a) Calcular la dimensión y unas ecuaciones de U_a según los valores de a.

b) Completar una base de W a una base de $\mathbb{R}^3$.

c) Para $a = 0$, calcular una base de $U_0 \cap W$ y otra de $U_0 + W$.

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z).$$

a) Justificar que f es diagonalizable.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ sea diagonal.

c) Calcular una matriz P tal que $P(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}P^{-1} = (f)_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$

5. En cada una de las afirmaciones siguientes hacer una prueba si es verdadera o dar un contraejemplo si es falsa:

a) La aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $f(x) = (x - 1, 1)$ es inyectiva.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal tal que $Ker\ f = Im\ f$, entonces n es un número par.

c) Existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1, 1) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2)$ y $f(2, 5, 2) = (5, 8)$.

d) Si A y $B \in \mathcal{M}_n(K)$ matrices equivalentes por filas y A es no singular B también lo es.