(10-09-2007)

1. Sea V un K-espacio vectorial.

a) Definir subespacio vectorial de V.

b) Si S es un subconjunto de V linealmente independiente, $v \in V$ y $v \notin \langle S \rangle$ probar que $S \cup \{v\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente.

2. Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$ siguientes

$$W_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{lll} x+ & y+ & 2z = 0 \\ x+ & ay+ & z = 0 \\ x+ & y+ & az = 0 \end{array} \} \text{ y } U = \langle (2,3,1), (3,2,1) \rangle$$

a) Calcular en función de los valores de a una base de W_a y su dimensión.

b) Para $a = 1$, calcular las ecuaciones y una base de $U \cap W_1$.

c) Completar una base de $U + W_1$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(0,0,1) = (0,0,1),\ f(1,-1,0) = (1,1,0),\ f(0,1,1) = (0,0,0).$$

a) Calcular $(f)_{\mathcal{CC}}$.

b) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = Ker\ f + Im\ f$.

c) Calcular una base del subespacio $f^{-1}\langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle$.

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, x-y+z).$$

a) Justificar que el subespacio propio de f asociado al valor propio $\lambda = -1$ tiene dimensión 1.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $(f)_{\mathcal{BB}}$ sea diagonal.

c) Calcular una matriz P tal que $P^{-1}(f)_{\mathcal{BB}}P = (f)_{\mathcal{CC}}$.

5. En cada una de las afirmaciones siguientes hacer una prueba si es verdadera o dar un contraejemplo si es falsa:

a) La aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $f(x,y) = (x+y, x-y)$ es biyectiva.

b) Si U y W son subespacios vectoriales de V y $\dim U \leq \dim W$ entonces $U \subset W$.

c) Las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$ no son diagonalizables.