Tema 3: Espacios vectoriales

K denotará un cuerpo.

Definición. Se dice que un conjunto no vacio V es un *espacio vectorial sobre K* o que es un *K-espacio vectorial* si:

1. En V está definida una operación interna que denotaremos por $+$ de modo que $(V, +)$ es un grupo abeliano.

2. Existe una operación externa, llamada producto por escalares:

$$\begin{aligned} K \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightsquigarrow \alpha v \end{aligned}$$

tal que para todo v, $w \in V$ y α, $\beta \in K$ se tiene:
a) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
b) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
c) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
d) $1_K v = v$

Los elementos de V los llamaremos *vectores* y los de K *escalares*. El elemento neutro para la operación $+$ se denota por 0 y se llama *vector cero.* Dado un vector $v \in V$ su simétrico para $+$ se llama *opuesto de* v y se denota por $-v$.

Ejemplos.

1. $V = K$ es un K-espacio vectorial.

2. $V = \mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

3. $V = \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es un K-espacio vectorial.

4. $V = \mathcal{P}_n(K)$ =Polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en K.

5. $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ es aplicación$\}$.

6. $V = K[x]$ polinomios con coeficientes en K.

Proposición. Si V un K-espacio vectorial se verifica:

1. Dados $\alpha \in K$ y $v \in V$ se tiene que, $\alpha v = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$ ó $v = 0$.

2. Dados α, $\beta \in K$ y $v \in V$, $v \neq 0$, si $\alpha v = \beta v$ entonces $\alpha = \beta$

3. Dados $\alpha \in K$ y $v \in V$ se tiene, $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$.

Demostración.

1. " $\Leftarrow$ " $0v = (0+0)v = 0v + 0v$ y entonces $0v = 0$. Análogo si $v = 0$.

" $\Rightarrow$ " Sea $\alpha v = 0$, si $\alpha \neq 0$ se tiene que $v = 1_K v = (\alpha^{-1}\alpha)v = \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0 = 0$.

3. Si $\alpha \in K$ y $v \in V$ se tiene que, $(-\alpha)v + \alpha v = (-\alpha + \alpha)v = 0v = 0$.

Subespacios vectoriales

Definición. Un subconjunto no vacio U de un $K-$espacio vectorial V es un *subespacio de* V si:

1. $u + u' \in U$ para todo u, $u' \in U$.

2. $\alpha u \in U$ para todo $u \in U$ y todo $\alpha \in K$.

Equivalentemente, $\alpha u + \beta u' \in U$ para todo $u, u' \in U$ y todo $\alpha, \beta \in K$.

Nótese que el vector cero de V está en U ya que como $U \neq \varnothing$ existe $u \in U$ y $0u = 0 \in U$. Además, U es un espacio vectorial con las mismas operaciones que V y también con el mismo neutro para la operación $+$.

Ejemplos.

1. $\{0\}$ y V son subespacios de V y se llaman *subespacios triviales.*
2. $U = \{(x, 0, y)/x,\ y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
3. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + y = 1\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
4. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + y = 0,\ x + 2y + z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
5. $U = \{A \in \mathcal{M}_n(K)/A \text{ es diagonal}\}$ es un subespacio de $\mathcal{M}_n(K)$.
6. El conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incognitas con coeficientes en K es un subespacio de K^n.

Proposición. Si U y W son subespacios vectoriales de V, entonces $U \cap W$ es un subespacio de V pero $U \cup W$ no lo es en general.

Demostración. $U \cap W \neq \varnothing$ ya que $0 \in U \cap W$. También:

1. $u,\, w \in U \cap W \iff u,\, w \in U$ y $u,\, w \in W \Rightarrow u + w \in U$ y $u + w \in W \Leftrightarrow u + w \in U \cap W$.

2. $u \in U \cap W$ y $\alpha \in K \iff u \in U$ y $u \in W$ y $\alpha \in K \Rightarrow \alpha u \in U$ y $\alpha u \in W \iff \alpha u \in U \cap W$.

Por otra parte si $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, 0)/\ x{\in}\mathbb{R}\}$ y $W = \{(0, y)/\ y{\in}\mathbb{R}\}$ entonces $U{\cup}W$ no es un subespacio de V ya que por ejemplo el par $(1, 0) \in U$, $(0, 1) \in W$ y $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W$.

Sistema de generadores. Independencia lineal

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto no vacio de V. Una *combinación lineal* de elementos de S es un vector de V de la forma $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ con $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ y $v_1, ..., v_n \in S$.

Ejemplos.

1. Si $V = \mathbb{R}^2$ el vector $(3, 7)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 1), (1, 0)$ y $(0, 5)$ ya que $(3, 7) = 2(1, 1) + 1(1, 0) + 1(0, 5) = 7(1, 1) - 4(1, 0)$.

En este ejemplo se observa que la forma de expresar un vector como combinación lineal de un conjunto de generadores no es única.

2. El vector $(1, 1, 1)$ es combinación lineal de los vectores $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 1)$. En efecto:

$$(1, 1, 1) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} \alpha & & +\gamma & = 1 \\ \alpha & +\beta & & = 1 \\ & \beta & +\gamma & = 1 \end{array} \right.$$

Aplicando el método de Gauss se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

de donde $(1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1)$.

Definición. Sea S un subconjunto no vacio de V. Se dice que S es un *conjunto de generadores* de V si todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de elementos de S.

Proposición. Si S es un subconjunto no vacio de V, el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de S, $\{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \ / \ \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ y $v_1, ..., v_n \in S\}$, es un subespacio de V llamado *subespacio generado por* S, y se denota por $\langle S \rangle$. Además $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

Si $V = \langle S \rangle$ entonces S es un conjunto de generadores de V.

Notación. Si $S = \{v_1, ..., v_n\}$, se escribe $\langle v_1, ..., v_n \rangle$ en lugar de $\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle$.

Ejemplo.
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = y\} = \{x(1,1,0) + z(0,0,1) / \ x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0), \ (0,0,1) \rangle$.

Observación.
Si S y S' son subconjuntos de V

$$\langle S \rangle = \langle S' \rangle \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \\ \text{y} \\ \langle S' \rangle \subset \langle S \rangle \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} S \subset \langle S' \rangle \\ \text{y} \\ S' \subset \langle S \rangle \end{array} \right.$$

En particular, si $S \subset V$ y $v \in V$ se tiene:

$$\langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle \Leftrightarrow v \in \langle S \rangle$$

Como consecuencia se tiene que en un conjunto de generadores S se puede eliminar un vector v si, y sólo si, v es combinación lineal de los demás elementos de S. Es decir, si $v \in S$

$$\langle S \rangle = \langle S \backslash \{v\} \rangle \Leftrightarrow v \in \langle S \backslash \{v\} \rangle$$

Lema. Si $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ se tiene:

i) $\langle v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n \rangle = \langle v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n \rangle$.

ii) $\langle v_1, ..., v_i, ..., v_n \rangle = \langle v_1, ..., \alpha v_i, ..., v_n \rangle$ con $\alpha \in K$ y $\alpha \neq 0$.

iii) $\langle v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n \rangle = \langle v_1, ..., v_i + \beta v_j, ..., v_j, ..., v_n \rangle$ con $\beta \in K$ e $i \neq j$.

Definición. Si U y W son subespacios de V, se define el *subespacio suma* de U y W como $U + W := \langle U \cup W \rangle$.

Nótese que:
a) $U + W = \{u + w \ / \ u \in U \text{ y } w \in W\}$.
b) Si $U = \langle S \rangle$ y $W = \langle S' \rangle$ entonces $U + W = \langle S \cup S' \rangle$.

Definición. Un subconjunto no vacio S de V se dice que es *linealmante independiente* si:

$$[\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0, \ \alpha_i \in K \text{ y } v_i \in S] \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ para todo } i = 1, ..., n,$$

es decir, la única combinación lineal de vectores de S que es igual a cero es la trivial.

En otro caso se dice que S es *linealmente dependiente,* es decir existe una combinación lineal de vectores de S igualada a cero con algún coeficiente distinto de cero.

Ejemplos.

1. Veamos que el subconjunto de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ siguiente:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente. En efecto:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & & & & & = 0 \\ & & 2\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

2. $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,7)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ linealmente independiente.

Observaciones.

1. Si $S = \{u\} \subset V$,

$$S \text{ es linealmente independiente} \Leftrightarrow u \neq 0$$

ya que $\alpha u = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ó $u = 0$.

2. El conjunto $S = \{u, v\}$ es linealmente dependiente, si, y sólo si, existe $\alpha \in K$ tal que $u = \alpha v$.

3. Si S_1 y S_2 son subconjuntos no vacios de V tales que $S_1 \subset S_2$.

S_1 linealmente dependiente $\Rightarrow S_2$ linealmente dependiente.

S_2 linealmente independiente $\Rightarrow S_1$ linealmente independiente.

4. Todo conjunto que contenga el vector 0 es linealmente dependiente.

Veamos ahora en que condiciones un conjunto linealmente independiente puede ser ampliado a otro que también sea linealmente independiente.

Proposición. Sea S un subconjunto de V linealmente independiente y $v \in V$, $v \notin S$.

$$v \notin \langle S \rangle \Longleftrightarrow S \cup \{v\} \text{ es linealmente independiente.}$$

Demostración.

" $\Rightarrow$ " Sea $\alpha v + \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0$ con $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ y $u_1, ..., u_n \in S$. Como $v \notin \langle S \rangle$ se tiene que $\alpha = 0$ y como además S es linealmente independiente $\alpha_i = 0$ para $i = 1, ..., n$.

" $\Leftarrow$ " Trivial ya que si v perteneciese a $\langle S \rangle$, $S \cup \{v\}$ sería linealmente dependiente.

Bases y dimensión

Introducimos a continuación el concepto de base que es esencial en el estudio de los espacios vectoriales. Trataremos, únicamente, el caso de espacios vectoriales finitamente generados, aunque los resultados son válidos para espacios vectoriales generales.

Sea V un K-espacio vectorial.

Definición. Un subconjunto $\mathcal{B}$ de V es una *base* de V si:

a) $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de V.

b) $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Ejemplos.

1. En K^n como K-espacio vectorial, el conjunto $\mathcal{C} = \{e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)\}$ es una base de K^n y se llama *base canónica.*

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es una matriz triangular sin ceros en la diagonal tanto el subconjunto de K^n formado por las filas de A como el formado por las columnas de A son bases de K^n ya que cualquier sistema de la forma $AX = B$ ó $A^tX = B$ tiene una única solución.

3. En $\mathbb{R}^3$ el conjunto $\{(1, 0, 3), (0, 1, 7), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y, sin embargo, $\{(1, 0, 3), (0, 1, 7), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ no lo es porque es un conjunto linealmente dependiente.

4. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base.

Definición. Se dice que V es *finitamente generado* si existe un subconjunto finito S de V tal que $\langle S\rangle = V$.

Teorema. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ un subconjunto de V. Son equivalentes:

i) $\mathcal{B}$ es una base de V.

ii) Cualquier vector de V se escribe de modo único como combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$.

Demostración.

ii) $\Longrightarrow$ *i)* Por hipótesis $\langle\mathcal{B}\rangle = V$. Además $\mathcal{B}$ es linealmente independiente ya que si $\alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n = 0 = 0v_1 + ... + 0v_n$ de la hipótesis de unicidad se sigue que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, ..., n$.

i) $\Longrightarrow$ *ii)* Si $\alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n = \beta_1v_1 + ... + \beta_nv_n$ entonces, $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$ y teniendo en cuenta que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, se tiene que $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, ..., n$.

Definición. Si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V y $v = \alpha_1v_1 + ... + \alpha_nv_n$ se llaman *coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$* a:

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n.$$

Ejemplo. Determinar las coordenadas de $(2,3,5) \in \mathbb{R}^3$ y de $(1,3,6) \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{(0,1,3), (0,2,7), (2,3,5)\}$.

$(2,3,5) = 0(0,1,3) + 0(0,2,7) + 1(2,3,5) \Leftrightarrow$ Las coordenadas del vector $(2,3,5)$ en la base $\mathcal{B}$ son $(0,0,1)$.

Por otra parte,

$$(1,3,6) = \alpha(0,1,3) + \beta(0,2,7) + \gamma(2,3,5)$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 3 \\ 3\alpha + 7\beta + 5\gamma = 6 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rr} \alpha + 2\beta + 3\gamma = & 3 \\ \beta - 4\gamma = & -3 \\ \gamma = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \gamma = \tfrac{1}{2},\ \beta = -1,$$

$$\alpha = \tfrac{7}{2}$$

es decir, las coordenadas del vector $(1,3,6)$ en la base $\mathcal{B}$ son $(\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2})$.

Teorema de existencia de base. Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial con un conjunto finito de generadores S. Entonces, existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S que es una base de V.

Demostración.

Nótese que ya que $V \neq \{0\}$ todo conjunto de generadores de V tiene al menos un vector distinto de 0.

Si S es linealmente independiente ya es una base.

En caso contrario, existe $v \in S$ que es combinación lineal de los restantes y $\langle S \rangle = \langle S \backslash \{v\} \rangle$.

Si este nuevo conjunto de generadores es linealmente independiente ya es una base de V. En otro caso existe $v' \in S \backslash \{v\}$ tal que es combinación lineal de los vectores de $S \backslash \{v\}$ y $\langle S \backslash \{v\} \rangle = \langle S \backslash \{v, v'\} \rangle$.

Repitiendo el proceso, tantas veces como sea necesario, se llega a un sistema de generadores linealmente independiente ya que, en el peor de los casos, encontraríamos un conjunto generador con un único vector que al ser distinto de 0 ya es linealmente independiente.

Ejercicio.

Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $S = \{v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (0,1,0,0),\ v_3 = (-1,-1,0,0),\ v_4 = (1,2,0,0),\ v_5 = (0,2,3,3)\}$. Encontrar una base de V.

$\langle S \rangle \underset{v_3=-v_1}{=} \langle v_1,\ v_2,\ v_4,\ v_5 \rangle \underset{v_4=v_1+v_2}{=} \langle v_1,\ v_2,\ v_5 \rangle$.

El conjunto $S = \{v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (0,1,0,0),\ v_5 = (0,2,3,3)\}$ es linealmente independiente y por tanto base de V.

Acabamos de ver que un espacio vectorial finitamente generado y distinto de $\{0\}$ tiene una base finita. De hecho puede tener más de una base, por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,1),(2,3)\}$ son bases. Nuestro siguiente objetivo es demostrar que todas las bases de V tiene el mismo número de elementos.

Teorema. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Todo subconjunto de V con más de n elementos es linealmente dependiente.

Demostración.

Sea $S = \{u_1, ..., u_m\} \subset V$ con $m > n$ y $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m = 0$ con $\alpha_j \in K$ para $j = 1, ..., m$.

Como $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V cada u_j es combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$ es decir, para cada $j = 1, ..., m$ existen $c_{ij} \in K$ tales que $u_j = c_{1j} v_1 + ... + c_{nj} v_n$. Entonces,

$$0 = \alpha_1(c_{11}v_1 + ... + c_{n1}v_n) + ... + \alpha_m(c_{1m}v_1 + ... + c_{nm}v_n) =$$
$$(\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + ... + \alpha_m c_{1m})v_1 + ... + (\alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + ... + \alpha_m c_{nm})v_n$$
$$\text{y como } \mathcal{B} \text{ base se tiene} \begin{cases} \alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + ... + \alpha_m c_{1m} = 0 \\ \qquad ... \\ \alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + ... + \alpha_m c_{nm} = 0 \end{cases}$$

Este sistema es homogéneo, por tanto es compatible, y como el número de incógnitas, m, es mayor que el de ecuaciones, n, tiene solución no trivial y en consecuencia S es linealmente dependiente.

Teorema. Si V tiene una base con n elementos, toda base de V tiene también n elementos.

Demostración.

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}'$ otra base de V.

En primer lugar hacemos notar que $\mathcal{B}'$ es un conjunto finito ya que en caso contrario cualquier suconjunto de $\mathcal{B}'$ con más de n elementos sería linealmente dependiente en contradición con la definición de base.

Si $\mathcal{B}'= \{u_1, ..., u_m\}$, teniendo en cuenta que $\mathcal{B}$ es base y $\mathcal{B}'$ linealmente independiente se tiene que $m \leq n$ y también, considerando $\mathcal{B}'= \{u_1, ..., u_m\}$ como base y $\mathcal{B}$ como conjunto linealmente independiente se obtiene que $n \leq m$.

Definición. Si V es un espacio vectorial finitamente generado y $V \neq \{0\}$, al número de elementos de cualquiera de sus bases se le llama *dimesión* de V, y escribiremos $dim_K(V)$ o $dim(V)$. Por convenio se admite que $dim\{0\} = 0$.

Ejemplos.

1. $dim_K(K) = 1$ y $dim_K(K^n) = n$.

2. $dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$.

3. $W = \{(a, b, -b, a)/a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, -1, 0)/a, b \in \mathbb{R}\} =$

$\langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ con $dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.

4. $W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{rrrl} x+y & -z+ & t & =0 \\ y & + & 2t & =0 \end{array}\right\} =$

$\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{array}{rl} x = & z+t \\ y = & -2t \end{array}\right\} = \{(z + t, -2t, z, t)/z, t \in \mathbb{R}\} =$
$\{z(1, 0, 1, 0) + t(1, -2, 0, 1)/z, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1, 0), (1, -2, 0, 1)\rangle$.
es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ con $dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.

Teorema. Si V es un espacio vectorial y $dim(V) = n \neq 0$. Se verifica:

1. Si $S= \{v_1, ..., v_n\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente con n elementos, entonces S es una base de V.

2. Si $S= \{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto de generadores de V con n elementos, entonces S es una base de V.

Demostración.

1. Veamos que $V = \langle S\rangle$. En efecto:

Dado $v \in V$, si $v \notin \langle S\rangle$, sabemos que $S \cup \{v\}$ es un conjunto linealmente dependiente y tiene $n + 1$ elementos en contradicción con el teorema visto antes.

2. Si S es linealmente dependiente se probó en el teorema de existencia de base que existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S con m elementos que sería base y $m < n$ en contradicción con que $dim(V) = n$.

Teorema. Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Si $S = \{u_1, ..., u_s\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente entonces $s \leq n$ y existen $v_{i_1}, ..., v_{i_{n-s}} \in \mathcal{B}$ tales que el conjunto $\{u_1, ..., u_s, v_{i_1}, ..., v_{i_{n-s}}\}$ es una base de V. Es decir que todo subconjunto de V linealmente independiente se puede ampliar a una base.

Demostración.

Sabemos que todo conjunto con más de n elementos es linealmente dependiente y por tanto $s \leq n$.

Si $s < n$ entonces S no puede ser base y $\langle u_1, ..., u_s\rangle \subsetneqq \langle v_1, ..., v_n\rangle = V$. Así, existirá $v_{i_1} \in \{v_1, ..., v_n\}$ tal que $v_{i_1} \notin \langle u_1, ..., u_s\rangle$ y entonces $\{u_1, ..., u_s, v_{i_1}\}$ es un conjunto linealmente independiente con $s+1$ elementos. Repitiendo el proceso $n - s$ veces se tiene el resultado.

Ejemplo.

Si $S=\{(1,1,1,1),(1,2,3,4)\} \subset \mathbb{R}^4$ veamos como se puede ampliar a una base de $\mathbb{R}^4$.

Sabemos que $\langle u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,2,3,4)\rangle \underset{u_2-u_1}{=} \langle(1,1,1,1),(0,1,2,3)\rangle$. Además,

$$\mathbb{R}^4 = \langle(1,1,1,1),(0,1,2,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$$

porque son 4 vectores escalonados y entonces linealmente independientes. Como,

$$\langle(1,1,1,1),(0,1,2,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle =$$
$$\langle(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$$

se tiene que $\{(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

Proposición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y U un subespacio de V. Se verifica que:

1. $\dim U \leq \dim V$

2. $\dim U = \dim V \iff U = V$

Demostración.

1. Si $U = \{0\}$ es trivial. En otro caso, existe $u_1 \in U$ $u_1 \neq 0$ y el conjunto $\{u_1\}$ es linealmente independiente. Si este conjunto generase U ya estaría. En caso contrario, existirá algún $u_2 \in U$ $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$ y entonces el conjunto $\{u_1, u_2\} \subset U$ será de nuevo linealmente independiente. Repitiendo el proceso como en V no hay subconjuntos independientes de más de n elementos encontraremos una base de U con a lo sumo n elementos.

2. Si $\dim U = \dim V = n$, entonces U tiene una base de n elementos. Como sabemos que todo subconjunto de V linealmente independiente y con n elementos es base se tiene que $U = V$ ya que la base de U lo es también de V.

Proposición. Fórmula de Grassman. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n y U y W subespacios de V. Entonces,

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

Demostración.

Sea $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_s\}$ una base de U y $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_r\}$ una base de W.

Sabemos que si $\mathcal{B}'' = \{v_1, ..., v_t\}$ es una base de $U \cap W$ entonces $t \leq \min\{r, s\}$ y $\mathcal{B}''$ se puede completar hasta obtener una base de U y otra de W.

En efecto, existen $u_{i_1}, ..., u_{i_{s-t}}$ elementos de U y $w_{i_1}, ..., w_{i_{r-t}}$ elementos de W de modo que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_t, u_{i_1}, ..., u_{i_{s-t}}\}$ es una base de U y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, ..., v_t, w_{i_1}, ..., w_{i_{r-t}}\}$ es una base de W.

Para obtener el resultado es suficiente con comprobar que como

$$U + W = \left\langle v_1, ..., v_t, u_{i_1}, ..., u_{i_{s-t}}, w_{i_1}, ..., w_{i_{r-t}} \right\rangle,$$

el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_t, u_{i_1}, ..., u_{i_{s-t}}, w_{i_1}, ..., w_{i_{r-t}}\}$ es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de $U + W$.

Rango de una matriz

Vamos a demostrar que el espacio vectorial generado por las filas de una matriz tiene la misma dimensión que el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz y esto nos permitirá definir el rango de la matriz.

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se tiene que $\langle F_1(A), ..., F_m(A)\rangle$ es un subespacio de K^n y $\langle C_1(A), ..., C_n(A)\rangle$ es un subespacio de K^m.

Proposición. Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por filas entonces:

$$\langle F_1(A), ..., F_m(A)\rangle = \langle F_1(B), ..., F_m(B)\rangle$$

Demostración. Como consecuencia del Lema, cada operación elemental que se hace en las filas de una matriz deja invariante el espacio vectorial generado por sus filas.

Corolario. Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por filas y B es escalonada, el conjunto de las filas no nulas de B es una base del espacio vectorial generado por las filas de A.
Demostración. Basta tener en cuenta que las filas no nulas de una matriz escalonada forman un conjunto de vectores de K^n linealmente independiente.

Definición. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se define *rango por filas de* A, y se denota por $r_f(A)$, como $\dim(\langle F_1(A), ..., F_m(A)\rangle)$.

Corolario. Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por filas, entonces:

$$r_f(A) = r_f(B).$$

Definición. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se define *rango por columnas de* A, y se denota por $r_c(A)$, como $\dim(\langle C_1(A), ..., C_n(A)\rangle)$.

Proposición. Si $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es una matriz escalonada reducida, entonces:
$r_f(B) =$número de pivotes de $B = r_c(B)$.

Proposición. Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son matrices equivalentes por filas, entonces las columnas de A y de B verifican las mismas condiciones de dependencia lineal y como consecuencia

$$r_c(A) = r_c(B).$$

Demostración.
Puesto que los sistemas $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones, se tiene que:
$\alpha_1 C_1(A) + ... + \alpha_n C_n(A) = 0 \iff (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es solución de $AX = 0 \iff (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es solución de $BX = 0 \iff \alpha_1 C_1(B) + ... + \alpha_n C_n(B) = 0$.

Corolario. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces:

$$r_f(A) = r_c(A)$$

Demostración. Sabemos que A es equivalente por filas a una matriz B escalonada reducida y entonces,
$r_f(A) = r_f(B)$ =número de pivotes de $B = r_c(B) = r_c(A)$.

Definición. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se define *rango de* A como rango por filas de A o el rango por columnas de A y se denotará por $r(A)$.

Proposición. Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Rango de A es n si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

Demostración.
$\det(A) \neq 0 \iff A$ es no singular $\iff$ El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene solución única $\iff$ La única relación de dependencia lineal entre las columnas de A es la trivial $\iff \{C_1(A), ..., C_n(A)\}$ es un conjunto linealmente independiente $\iff r(A) = n$.

Otro método para el cálculo del rango

Vamos a dar un método para calcular el rango de una matriz en el que no se utilizan transformaciones elementales.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Llamaremos un *menor de orden* p de la matriz A al determinante de una submatriz de orden p de A (una matriz de orden p que se obtenga de A suprimiendo $m-p$ de sus filas y $n-p$ de sus columnas). Es decir, $\det(A_p)$,

en donde $A_p = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & ... & a_{i_1j_p} \\ ... & ... & ... \\ a_{i_pj_1} & ... & a_{i_pj_p} \end{pmatrix}$ siendo $i_1, ..., i_p$ (respect. $j_1, ..., j_p$) las filas (respect. las columnas) no suprimidas de A.

Algoritmo del cálculo del rango:

Se toma un menor de orden p no nulo, $\Delta_p = \det(A_p) \neq 0$, se forman todos los menores de orden $p+1$ que resultan de orlar A_p con una fila fija $F_i(A)$, con $i \notin \{i_1, ..., i_p\}$, y con cualquiera de las restantes columnas. Si todos estos menores son nulos se suprime la fila $F_i(A)$ y se procede con otra hasta que :

1. Se encuentre un menor de orden $p+1$ no nulo con el que repetiríamos el proceso, ó

2. Todos los menores de orden $p+1$ son nulos, con lo que el rango de A sería p.

Explicación:

A tiene un menor de orden p no nulo, $\Delta_p = \det(A_p) \neq 0$, si, y sólo si, las p columnas de A_p son linealmente independientes. En este caso la matriz formada por las filas $i_1, ..., i_p$ de A (respect. la matriz formada por las columnas $j_1, ..., j_p$ de A) tiene rango p ya que tiene p columnas (respect. p filas) linealmente independientes y su número de filas (respect. p columnas) es p. Por tanto $r(A) = r_f(A) \geq p$.

Si $r(A) > p$, como las filas $i_1, ..., i_p$ de A son linealmente independientes existirá un $k \notin \{i_1, ..., i_p\}$ de modo que $\{F_{i_1}(A), ..., F_{i_p}(A), F_k(A)\}$ es un conjunto linealmente independiente. Entonces

$$r\begin{pmatrix} F_{i_1}(A) \\ \dots \\ F_{i_p}(A) \\ F_k(A) \end{pmatrix} = p + 1$$

Como en la matriz anterior, que es de rango $p+1$, las columnas $j_1, ..., j_p$ son linealmente independientes existirá un $s \notin \{j_1, ..., j_p\}$ tal que las columnas $j_1, ..., j_p, s$ sean linealmente independientes. Así la matriz obtenida orlando A_p con la fila k y la columna s es de orden $p + 1$ y de determinante distinto de cero. Es decir, existe un menor de orden $p + 1$ no nulo obtenido orlando A_p.

Teorema de Rouche-Frobenius

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales. Se verifica que:

1. El sistema es compatible si, y sólo si, $r(A) = r(A|B)$.
2. Si el sistema es compatible y $r(A) = r(A|B) = r \leq n$, se tiene que es compatible determinado si, y sólo si, $r = n$.

Demostración.

1. Como, $AX = B \Longleftrightarrow C_1(A)x_1 + ... + C_n(A)x_n = B$, se tiene:

$AX = B$ es compatible $\Longleftrightarrow B \in \langle C_1(A), ..., C_n(A)\rangle \Longleftrightarrow$
$\langle C_1(A), ..., C_n(A)\rangle = \langle B, C_1(A), ..., C_n(A)\rangle \Longleftrightarrow$
$r(A) = \dim \langle C_1(A), ..., C_n(A)\rangle = \dim \langle B, C_1(A), ..., C_n(A)\rangle = r(A|B)$.

2. Si $r(A) = r(A|B) = r < n$ entonces el conjunto $\{C_1(A), ..., C_n(A)\}$ es linealmente dependiente, es decir existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no todos cero

tal que $\alpha_1 C_1(A) + ... + \alpha_n C_n(A) = (0)$ ($(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es solución no trivial del sistema homogéneo $AX = (0)$). Es inmediato comprobar que si $(\beta_1, ..., \beta_n)$ es una solución de $AX = B$ también lo es $(\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ y por tanto el sistema tiene más de una solución.

Recíprocamente, si $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $(\beta_1, ..., \beta_n)$ son dos soluciones distintas de $AX = B$, tenemos que $(\alpha_1 - \beta_1)\, C_1(A) + ... + (\alpha_n - \beta_n) C_n(A) = (0)$ y ya que existe algún i para el cual $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, se sigue que el conjunto $\{C_1(A), ..., C_n(A)\}$ es linealmente dependiente y $r(A) < n$.

Proposición. Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales compatible. Si α es una solución del sistema, entonces β es una solución del sistema si, y sólo si, $\alpha - \beta$ es solución del sistema homogéneo $AX = (0)$.

Ecuaciones de un subespacio

Sea U un subespacio de K^n y $\mathcal{B} = \{\, (a_{11}, ..., a_{1n})\, , ..., (a_{s1}, ..., a_{sn})\}$ una base de U.
Un vector $u = (x_1, ..., x_n) \in U \Longleftrightarrow \{\, (a_{11}, ..., a_{1n})\, , ..., (a_{s1}, ..., a_{sn})\, , (x_1, ..., x_n)\}$ es un conjunto linealmente dependiente $\Longleftrightarrow$ $rango \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{s1} & ... & a_{sn} \\ x_1 & ... & x_n \end{pmatrix} = s \Longleftrightarrow$
Escogido un menor no nulo de orden s de la matriz $A = (a_{ij})$, $\det(A_s) \neq 0$, los determinantes de las matrices de orden $s + 1$ obtenidas orlando A_s son todos cero.

Ejercicio.

Calcular las ecuaciones de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

1. $U = \langle (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle$

$$(x, y, z, t) \in U \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -3x - 2y + z + t = 0$$

2. $W = \langle (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle$

$$(x, y, z, t) \in W \Longleftrightarrow rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 3 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \text{ y}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -y + z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{array} \right.$$