Resumen : Aplicaciones lineales y matrices

Definición. Sean V y W espacios vectoriales. Una aplicación $f : V \longrightarrow W$ se dice que es *una aplicación lineal* si verifica*:*

1. $f(v + v') = f(v) + f(v')$

2. $f(\alpha v) = \alpha f(v)$

para cualesquiera v, $v' \in V$ y $\alpha \in K$.

Proposición. Sean $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ aplicaciones lineales.

La composición $g \circ f : V \longrightarrow U$ es también lineal.

Proposición. Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, se verifica:

1. Si U es un subespacio de V, entonces $f(U)$ es un subespacio de W. En particular, $\operatorname{Im} f$ es un subespacio de W. Además, si $U = \langle u_1, ..., u_s \rangle$, entonces $f(U) = \langle f(u_1), ..., f(u_s) \rangle$.

2. Si L es un subespacio de W, entonces $f^{-1}(L)$ es un subespacio de V. En particular $f^{-1}(\{0\})$ es un subespacio de V que se denotará por *Núcleo de f* ó $Ker\ f$.

Ejercicio. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y, x - z, x - z).$$

a) Calcular el núcleo y la imagen.

b) Calcular $f^{-1} \langle (1, 1, 1),\ (0, 0, 1) \rangle$.

c) Calcular $f^{-1}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$.

Prueba:

a) $Ker\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0,\ x - z = 0\} =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y = z\} = \{(x, -x, x) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, 1) \rangle$.

$\operatorname{Im} f = \langle f(1, 0, 0),\ f(0, 1, 0),\ f(0, 0, 1) \rangle =$

$$\langle (1, 1, 1),\ (1, 0, 0),\ (0, -1, -1) \rangle \underset{(1,1,1)=(1,0,0)-(0,-1,-1)}{=} \langle (1, 0, 0),\ (0, -1, -1) \rangle .$$

b) $f^{-1} \langle (1, 1, 1),\ (0, 0, 1) \rangle =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x + y, x - z, x - z) \in \langle (1, 1, 1),\ (0, 0, 1) \rangle\} =$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{vmatrix} 1 & 0 & x + y \\ 1 & 0 & x - z \\ 1 & 1 & x - z \end{vmatrix} = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

c) $f^{-1}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\} =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - (x - z) + x - z = 0\} =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\} = \langle (1, -1, 0),\ (0, 0, 1) \rangle$.

Teorema. Sean V y W espacios vectoriales, $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $w_1, ..., w_n \in W$.

Existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que $f(v_i) = w_i$ para $i = 1, ..., n$.

Proposición. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita.

1. f es inyectiva si, y sólo si, $Ker\ f = \{0\}$ si, y sólo si, cualquier subconjunto de V linealmente independiente tiene como imagen un subconjunto de W linealmente independiente.

2. f es sobre si, y sólo si, cualquier conjunto de generadores de V tiene como imagen un conjunto de generadores de W.

3. f es biyectiva si, y sólo si, la imagen de una base de V es una base de W.

Corolario. Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, se tiene que: V y W son isomorfos si, y sólo si, $\dim V = \dim W$.

Teorema de la dimensión. Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sea $\dim V = n$. Se verifica que: $\dim Ker\ f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

Corolario. Si $f : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal y $\dim V = n$, entonces: f es inyectiva $\Longleftrightarrow$ f es sobre $\Longleftrightarrow$ f es un isomorfismo.

Matriz asociada a una aplicación lineal.

Sean V y W espacios vectoriales con bases $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}'=\{w_1, ..., w_m\}$, respectivamente.

Definición. Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal definida por $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ para cada v_j con $j = 1, ..., n$, se llama *matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$* a la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y se denota por $(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Nótese que el orden de la matriz A es $m \times n$ siendo m la dimensión de W y n la de V y que la matriz A tiene como columna j-ésima las coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ de la imagen del vector v_j de $\mathcal{B}$.

Notación. Si V es un espacio vectorial, $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V y $(x_1, ..., x_n)$ son las cordenadas de un vector $v \in V$ en la base $\mathcal{B}$, es decir $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, la matriz columna $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la denotaremos por $(v)_{\mathcal{B}}$.

Utilizando notación matricial para la aplicación lineal anterior f se tiene que:

$$(f(v))_{\mathcal{B}'} = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)_{\mathcal{B}}.$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (x - y, y + z, z, x - z)$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ vamos a calcular la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$ y de la canónica.

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además si $\mathcal{B}' = \{(0,2,1,0),(1,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$, se tiene que

$$(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos a continuación la relación entre el producto de matrices y la composición de aplicaciones lineales.

Proposición. Sean V, W y U espacios vectoriales con bases $\mathcal{B} = \{v_1,...,v_n\}$, $\mathcal{B}'=\{w_1,...,w_m\}$ y $\mathcal{B}''=\{u_1,...,u_s\}$.

Si $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ son aplicaciones lineales, entonces

$$(g \circ f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = (g)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_{s\times n}(K).$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las aplicaciones lineales definidas por $f(x,y) = x+y$ y $g(x) = (x,3x)$. La composición está definida por $(g\circ f)(x,y) = (x+y, 3x+3y)$. Las matrices asociadas a estas aplicaciones en las bases canónicas son:

$$(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ (g)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } (g\circ f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Corolario. Sean V y W espacios vectoriales con bases $\mathcal{B} = \{v_1,...,v_n\}$ y $\mathcal{B}'=\{w_1,...,w_n\}$ y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Se verifica:

$$f \text{ es un isomorfismo} \iff A = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \text{ es una matriz no singular}$$

Matriz de cambio de base

Hemos visto que un espacio vectorial puede tener más de una base y vamos a estudiar como varian las coordenadas de un vector al cambiar la base.

Consideraremos que V es un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de V.

Definición. Se llama *matriz de cambio de base de* $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ a la matriz asociada a la identidad de V considerando en el dominio la base $\mathcal{B}$ y en el codominio la base $\mathcal{B}'$, es decir la matriz $(id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Nótese que si $\mathcal{B} = \{v_1,...,v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1',...,v_n'\}$ y $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i'$ entonces $(id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Además, $(v)_{\mathcal{B}'} = (id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)_{\mathcal{B}}$, es decir, al multiplicar la matriz del cambio de base por la matriz columna de las coordenadas de un vector v en la base $\mathcal{B}$ nos da la matriz columna de las coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}'$.

Observaciones.

1. La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es no singular por estar asociada a un isomorfismo y su inversa es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

2. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ es una matriz no singular y $\mathcal{B}' = \{v'_1, ..., v'_n\}$ es una base de V y definimos $v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v'_k$ para $j = 1, ..., n$ entonces $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es otra base de V y la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es A.

Nos planteamos ahora la siguiente pregunta. ¿Cómo cambia la matriz de una aplicación lineal al cambiar las bases en el dominio y en el rango?

Proposición. Sean V y W espacios vectoriales, $\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ y $\mathcal{B}'_V = \{v'_1, ..., v'_n\}$ bases de V y $\mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$ y $\mathcal{B}'_W = \{w'_1, ..., w'_m\}$ bases de W.

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal se verifica que:

$$(f)_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} = (id_W)_{\mathcal{B}'_W, \mathcal{B}_W} (f)_{\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W} (id_V)_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}'_V}$$

Ejemplo. Consideramos en $\mathbb{R}^3$ las bases $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ y $\mathcal{C}$ la canónica.

La matrices de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}'$ son:

$$(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \qquad \text{y} \qquad (id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (A')^{-1}$$

Además, $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C},\mathcal{B}'} (id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Nótese que también se podría hallar directamente $(id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ sin más que expresar los vectores de la base $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los de la base $\mathcal{B}'$.

Definición. Sean A, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Se dice que A y B son *equivalentes* si existen matrices no singulares $P \in \mathcal{M}_m(K)$ y $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ tales que $A = PBQ$.

Teniendo en cuenta que toda matriz no singular puede ser pensada como matriz de un cambio de base podemos afirmar que dos matrices son equivalentes si, y sólo si, son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de diferentes bases.

Teorema. Sean V y W espacio vectoriales de dimensión n y m, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V y W, respectivamente.

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal tal que $A = (f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, entonces $r(A) = \dim(\operatorname{Im} f)$.

Teorema. Sean A, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$.

Las matrices A y B son equivalentes si, y sólo si, $r(A) = r(B)$.