Resumen: Diagonalización de matrices

Definición. Sean A, $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Las matrices A y B son *semejantes* si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(K)$ no singular de modo que $B = P^{-1}AP$.

Nótese que dos matrices cuadradas semejantes son equivalentes, pero no es cierto el resultado recíproco. Nuestro objetivo, será ahora, estudiar bajo que condiciones una matriz cuadrada es semejante a una matriz diagonal. Es decir, en lenguaje de aplicaciones lineales, trataremos de encontrar una condición necesaria y suficiente que permita determinar si dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ existe una base en V respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

Valores y vectores propios

En este tema, V es un K-espacio vectorial de dimensión finita n.

Definición. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V.

1. Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un *valor propio (ó autovalor) de f* si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$.

2. Se dice que un vector $v \in V$ es un *vector propio* (*ó autovector*) si existe $\lambda \in K$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Lema. Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo de V y $\lambda \in K$, entonces $V_\lambda = \{v \in V / f(v) = \lambda v\}$ es un subespacio de V. Cuando $\lambda \in K$ es un valor propio de f este subespacio se llamará *subespacio propio asociado al valor propio λ*.

Además, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es la matriz asociada a f respecto de una base $\mathcal{B}$, entonces $\dim V_\lambda = n - r(A - \lambda I_n)$.

Proposición. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ la matriz asociada a f respecto de una base $\mathcal{B}$ y $\lambda \in K$.

$$\lambda \text{ es un valor propio de } f \text{ si, y sólo si, } |A - \lambda I_n| = 0.$$

Ejemplo. Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

f tiene la siguiente matriz asociada en la base canónica

$$(f)_{\mathcal{C}} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que: λ es un valor propio de $f \Longleftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$

$$|A - xI_n| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -(1 + x)^2(x - 2)$$

Es decir, los valores propios de f son -1 y 2.

Para calcular $V_2 = Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$ debemos de resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando Gauss se tiene que $y = z = x$ y $V_2 = \langle (1,1,1) \rangle$.

También $V_{-1} = Ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$ y para calcularlo resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto, $V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$.

Definición. Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo de V y $A \in \mathcal{M}_n(K)$ la matriz asociada a f respecto de una base $\mathcal{B}$.

$$|A - xI_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

es un polinomio de grado n y con coeficientes en K que se llama *polinomio caraterístico de A*.

Sabemos que si A es la matriz asociada a f respecto de una base $\mathcal{B}$, A' es la matriz asociada a f respecto de otra base $\mathcal{B}'$ y $P = (id_V)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ se tiene que $A = P^{-1}A'P$. Entonces, $|A - xI_n| = |A' - xI_n|$ y por tanto el polinomio característico de A se llamará tambien *polinomio caraterístico de f*.

Los valores propios de A (ó f) son pues los ceros del polinomio caraterístico.

Definición. Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ es *diagonalizable* si existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada a f sea una matriz diagonal.

Está claro que si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V,

$$(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow f(v_i) = \lambda_i v_i \text{ para } i = 1, ..., n \Longleftrightarrow$$

$\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V formada por vectores propios no nulos.

Diremos también que una matriz es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal.

Hay que tener presente que si f es diagonalizable el polinomio característico de f es de la forma,

$$(-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} ... (x - \lambda_s)^{m_s}$$

en donde m_i es la multiplicidad de la raiz λ_i y el número de veces que aparece repetido el autovalor λ_i en la diagonal.

Es evidente pues que para que podamos diagonalizar un endomorfismo debemos de encontrar n vectores propios linealmente independientes.

Proposición. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V y $\lambda_1,...,\lambda_s \in K$ valores propios de f distintos dos a dos.
1. Si $i \neq j$ entonces $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$.
2. Si $\mathcal{B}_{\lambda_i} = \{v_{1i}, ..., v_{n_i i}\}$ es una base de V_{λ_i} para cada $i = 1, ..., s$, entonces la unión disjunta $\mathcal{B}_{\lambda_1} \cup ... \cup \mathcal{B}_{\lambda_s}$ es una base de $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_s}$ y

$$\dim(V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_s}) = \dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_s}.$$

Teorema. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V y $\lambda_1,...,\lambda_s \in K$ valores propios de f distintos dos a dos.

$$f \text{ es diagonalizable} \Longleftrightarrow \dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_s} = n.$$

Ejercicio. Probar que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es diagonalizable.

Prueba. En primer lugar calculamos el polinomio característico de A.

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} -x & 2 & -2 \\ -2 & 4-x & -2 \\ -2 & 2 & -x \end{vmatrix} = -(x-2)^2 x$$

Tenemos pues el autovalor 0 de multiplicidad uno y el autovalor 2 de multiplicidad dos. Los subespacios propios son:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\} = \langle (1,1,1) \rangle$, y

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -2x + 2y - 2z = 0\} = \{(y-z, y, z)/y, z \in \mathbb{R}\} =$

$\langle (1,1,0), (-1,0,1) \rangle$.

Así,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$