Hoja de Problemas Tema 3

(Variables aleatorias multidimensionales)

1. Consideremos dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2, tales que $P[X_i = j] = \frac{1}{4}$ para $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$. Sea $X = \min\{X_1, X_2\}$ e $Y = |X_1 - X_2|$.
   (a) Determinar la función de probabilidad conjunta de la variable aleatoria vectorial (X, Y).
   (b) Determinar las funciones de probabilidad marginales de X y de Y. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

2. Una urna contiene una bola azul y dos bolas rojas. Se escogen tres bolas de la urna y se define la variable aleatoria
$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{si la bola } k\text{-ésima es azul} \\ 0 & \text{si la bola } k\text{-ésima es roja} \end{cases}$$
   Consideremos ahora las variables aleatorias
$$X = \sum_{i=1}^{3} I_i \qquad Y = \min\{I_1, I_2, I_3\} \qquad Z = \max\{I_1, I_2, I_3\}.$$
   Determinar la función de probabilidad de la variable aleatoria vectorial (X, Y, Z) si, tras cada elección, la bola vuelve a ponerse en la urna.

3. La variable aleatoria vectorial (X, Y) tiene función de densidad conjunta
$$f_{X,Y}(x, y) = k(x + y) \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$
   (a) Determinar el valor de k.
   (b) Determinar la función de distribución conjunta.
   (c) Determinar las funciones de densidad marginales de X y de Y.
   (d) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?
   (e) Calcular $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

4. Sean X e Y variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$. Calcular las siguientes probabilidades:
$$\text{a)} \quad P[X^2 < \tfrac{1}{2}, |Y - 1| < \tfrac{1}{2}] \qquad \text{b)} \quad P[XY < \tfrac{1}{2}] \qquad \text{c)} \quad P[\min\{X, Y\} > \tfrac{1}{3}]$$

5. Sean X e Y variables aleatorias dadas por la hora en que un tren y un autobús llegan a una estación, respectivamente. Supongamos que los dos paran en la estación 0.1 horas. Sabiendo que el tren llega antes que el autobús, determinar la probabilidad de que ambos coincidan en la estación en algún momento si:
   (a) (X, Y) sigue una distribución uniforme en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.
   (b) X e Y son variables independientes con función de densidad $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$.

6. La hora de salida de un tren de la estación es una variable aleatoria exponencial X de media 1. Un viajero llega a la estación a una hora Y que sigue una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1/2]$. Se sabe que X e Y son variables aleatorias independientes.

(a) Determinar la probabilidad de que el viajero coja el tren.
(b) Sabiendo que el viajero ha cogido el tren, determinar la probabilidad de que el viajero haya llegado más tarde de $t = 1/4$.

7. Al fabricar un lote de sustratos de cierto componente se introducen dos tipos de impurezas. La cantidad de cada una de ellas, medida en unidades adecuadas, viene dada por las variables aleatorias X e Y. Se sabe que X es una variable aleatoria exponencial de media $0'1$ y que Y tiene función de densidad $f_Y(y) = 100\,y\,e^{-10y}$, $y \geq 0$. También se sabe que X e Y son independientes. Si un componente funciona correctamente cuando $X + Y \leq 1$, determinar la probabilidad de que un componente escogido al azar funcione correctamente.

8. Sea X la entrada de un canal de comunicación. Se sabe que X toma los valores ± 1 con igual probabilidad. Supongamos que la salida del canal es la variable $Y = X + N$, donde N, el ruido del canal, es una variable aleatoria con función de densidad
$$f_N(x) = \frac{1}{2}\,\alpha\, e^{-\alpha|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{(v.a. laplaciana)}$$
(a) Calcular $P[X = k, Y \leq y]$, para $k = \pm 1$.
(b) Determinar la función de densidad de Y.
(c) Si observamos que $Y > 0$, ¿qué probabilidad es mayor, $P[X = 1]$ ó $P[X = -1]$?

9. En un canal de comunicación ternario, la señal que se recibe es $Y = X + N$, es decir, la señal que se emite, X, está distorsionada por un ruido N. Se sabe que X toma los tres posibles valores con igual probabilidad y que N sigue una distribución normal de media 0 y varianza 4.
(a) Supongamos que el transmisor codifica los mensajes con los valores -1, 0 y 1, y que el receptor del mensaje lo decodifica de acuerdo con el siguiente criterio:
- si $Y < -\frac{1}{2}$, se decodifica como -1;
- si $Y > \frac{1}{2}$, se decodifica como 1;
- si $|Y| < \frac{1}{2}$, se decodifica como 0.

Calcular la probabilidad de error del sistema.
(b) Para intentar reducir la probabilidad de error, se hace lo siguiente: el transmisor emite los valores -2, 0 y 2, y las reglas de decodificación son:
- si $Y < -1$, se decodifica como -2;
- si $Y > 1$, se decodifica como 2;
- si $|Y| < 1$, se decodifica como 0.

Repetir el apartado a) para este esquema modificado.

10. Consideremos dos variables aleatorias independientes X_1 y X_2, tales que $P[X_i = j] = \frac{1}{4}$ para $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$. Sea $X = |X_1 - X_2|$ e $Y = \max\{X_1, X_2\}$.
(a) Calcular la función de probabilidad conjunta del par (X, Y).
(b) Utilizando la función de probabilidad p_{XY}, determinar la función de probabilidad de Y, condicionada por $X = 1$, y la de X, condicionada por $Y = 3$.
(c) Utilizando la función de probabilidad p_{XY}, determinar la esperanza de X condicionada por $Y = 3$, y la de Y condicionada por $X = 1$.

11. Una fábrica tiene n máquinas de cierto tipo. Sea p la probabilidad de que una máquina dada esté funcionando un día determinado y sea N el número total de máquinas funcionando un día determinado. El tiempo T necesario para fabricar un objeto es una variable aleatoria exponencial, con parámetro $k\alpha$, siendo k el número de máquinas que funcionan. Calcular $P[T \leq t]$.

12. Sea $N \rightsquigarrow \Pi(\beta t)$ el número de clientes que llegan a una tienda durante un tiempo t. El tiempo que se tarda en atender a cada cliente es una variable aleatoria $T \rightsquigarrow E(\alpha)$. Determinar la función de probabilidad para el número de clientes que llegan mientras se está atendiendo a un cliente dado suponiendo que las variables N y T son independientes.

13. A un cierto sistema llegan dos tipos de peticiones, unas con alta prioridad y otras con baja prioridad. Si la petición tienen prioridad alta, el sistema la dirige a un servidor que la procesa en un tiempo X dado por una variable aleatoria con función de densidad $f_X(t) = 2e^{-2t}$, para $t > 0$, en tanto que si la petición tiene prioridad baja el tiempo de procesamiento es una variable aleatoria Y con función de distribución $F_Y(t) = 1 - e^{-t}(1+t)$, para $t > 0$. Sabiendo que el 80% de las peticiones tienen prioridad baja, se pide:

    (a) Determinar la función de distribución de la variable aleatoria

    $$Z \equiv \text{ tiempo que tarda en ser procesada una petición escogida al azar.}$$

    (b) Determinar el valor esperado de Z.

14. Un cliente es atendido en un banco por el empleado i con probabilidad p_i, $i = 1, \dots, n$. El tiempo que tarda cada uno de los empleados en atender a un cliente es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ_i.

    (a) Determinar la función de densidad de T, el tiempo empleado en atender a un cliente.

    (b) Determinar el valor medio y la varianza de T.

15. Supongamos que seleccionamos un punto X de manera aleatoria en el intervalo $(0,1)$, es decir, $X \rightsquigarrow U(0,1)$. Después, se selecciona un punto Y de manera aleatoria en el intervalo $(0,X)$. Determinar la función de densidad de Y.

16. Sea X el número de intentos hasta el primer éxito en un experimento de Bernouilli que se repite de forma independiente. Determinar la función de probabilidad de X si la probabilidad de éxito p es un número escogido con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.

17. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,a)$. Determinar la función de densidad de la variable aleatoria $Z = X + Y$.

18. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Demostrar, utilizando inducción, que si $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$ entonces

    $$f_Z(z) = \frac{\lambda^m}{(m-1)!}\, z^{m-1}\, e^{-\lambda z}, \qquad z \geq 0$$

    es decir, la suma de m variables aleatorias de tipo exponencial con parámetro λ es una variable aleatoria de tipo m-Erlang.

19. Los mensajes llegan a un cierto servidor a un promedio de un mensaje cada dos segundos. Sea X el tiempo de llegada de 5 mensajes. Si suponemos que el tiempo entre dos mensajes consecutivos es una variable aleatoria con distribución exponencial, calcular $P[X < 6]$ y $P[X > 8]$.

20. Supongamos que X e Y son variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal de media 0 y varianza 1. Determinar la función de densidad de la variable aleatoria $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ y su valor esperado.

21. Calcular $\mathrm{E}[|X - Y|]$ si X e Y son variables aleatorias independientes de tipo exponencial con parámetro $\alpha = 1$.

22. Dadas las variables aleatorias (X, Y) del Problema 2, determinar la convarianza y el coeficiente de correlación.

23. Demostrar que, si $Y = aX + b$, entonces $\rho_{X,Y} = \pm 1$.

24. Se tira un dado 1000 veces y consideremos la variable aleatoria X número de veces que se obtiene un 6.

    (a) Determinar $P[160 \leq X \leq 172]$.

    (b) Determinar el menor valor de k para el cual $P[|X - \mathrm{E}[X]| \leq k] > 0.5$.

    (c) Determinar el menor valor de k para el cual $P[|X - \mathrm{E}[X]| \leq k] > 0.95$.

25. Se tira un dado 1000 veces y consideremos la variable aleatoria X como la suma total de los puntos obtenidos.

    (a) Determinar $P[3400 \leq X \leq 3600]$.

    (b) Determinar el menor valor de k para el cual $P[|X - \mathrm{E}[X]| \leq k] > 0.5$.

    (c) Determinar el menor valor de k para el cual $P[|X - \mathrm{E}[X]| \leq k] > 0.95$.

26. El tiempo de vida medio de una bombilla es una variable aleatoria exponencial de media 36 horas. Se prueban un conjunto de 100 bombillas. Utilizar el Teorema Central del Límite para estimar la probabilidad de que la suma total de los tiempos de vida sea menor que 3300 horas.

27. La vida de cierto componente es una variable aleatoria de tipo exponencial de media μ desconocida. Para estimar dicha media, se realiza el experimento de medir la vida de n componentes y se considera la variable aleatoria

$$Y = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

donde X_i representa la vida del componente i-ésimo del experimento. Determinar el valor de n para que, con probabilidad de al menos el 80%, el valor de Y obtenido aproxime la media μ con un error menor del 10%.

Resultados de algunos problemas

(3) a) $k = 1$

c) $f_{X/Y}(x) = x + \frac{1}{2}$ si $0 < x < 1$, $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$ si $0 < y < 1$

d) No son independientes.

e) $f_X(x/y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{x+y}{y+\frac{1}{2}}$ si $0 < x < 1$.

(5) a) $P = 0.19$ b) $P \simeq 0.2867$ c) $P = 0.21$.

(6) a) $P(\text{viajero coge el tren}) = 2(1 - e^{-1/2}) \simeq 0.787$ b) $\simeq \dfrac{0.344}{0.787} \simeq 0.434$

(7) $P[X + Y \le 1] = 1 - 61e^{-10} \simeq 0'9972$.

(8) a) $P[X = k, Y \le y] = \frac{1}{2} F_N(y - k)$

b) $f_Y(y) = \frac{1}{2}(f_N(y-1) + f_N(y+1))$

c) $P[X = 1/Y > 0] - P[X = -1/Y > 0] = 1 - e^{-\alpha}$

(9) a) $P(E) = 0.535$ b) $P(E) = 0.4114$

(11) $P[T \le t] = 1 - \left(\dfrac{p}{e^{\alpha t}} + q\right)^n$

(12) $P[N = k] = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^k$

(13) $F_Z(t) = 1 - 0'2e^{-2t} - 0'8(1+t)e^{-t}$ $\mathrm{E}[Z] = 1'7$.

(15) $f_Y(y) = -\ln y \quad 0 \le y \le 1$

(16) $P[X = k] = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

(17) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{a^2} & \text{si } 0 < z \le a \\ \frac{2a-z}{a^2} & \text{si } a < z < 2a \end{cases}$

(19) $P[X < 6] \simeq 0.1847$ $P[X > 8] \simeq 0.6288$

(20) $f_R(r) = re^{-r^2/2}, \quad r > 0$ $\mathrm{E}[R] = \sqrt{\pi/2}$

(21) $\mathrm{E}[|X - Y|] = 1$

(22) $\mathrm{COV}(X,Y) = \dfrac{3}{4^4}$ $\rho_{XY} \simeq 0.217$

(24) a) $P[160 \le X \le 172] \simeq 0.386$ b) $k = 9$ c) $k = 24$

(25) a) $P[3400 \le X \le 3600] \simeq 0.9359$ b) $k = 37$ c) $k = 106$.