Modelo electromagnético

1. Enfoques para el desarrollo de un tema científico

1.1. Enfoque inductivo

El enfoque inductivo se basa en la observación de experimentos y la posterior deducción de leyes y teorías a partir de ellos. Es un proceso de razonamiento que parte de fenómenos particulares para llegar a principios generales.

1.2. Enfoque deductivo

Se postulan algunas relaciones fundamentales para un modelo idealizado. Las relaciones postuladas son axiomas de los cuales se pueden deducir leyes y teorías específicas. La validez del modelo (y sus axiomas) se verifica a través de su capacidad para predecir consecuencias que pueden comprobarse con observaciones experimentales.

Las leyes describen, mediante lenguajes lógico-matemáticos, el entorno físico, hablándonos del cómo (no del porqué) de su realidad empírica.

Utilizaremos un enfoque deductivo o axiomático porque es más conciso y permite desarrollar el modelo electromagnético de forma ordenada. El enfoque inductivo tiende a parecer fragmentado y poco coherente por estar basado en resultados que fueron obtenidos por individuos no coordinados y en tiempos diferentes.

2. Interacciones fundamentales

Son aquellas fuerzas o interacciones del universo que no se pueden explicar en función de otras más básicas.

2.1 Fuerza gravitatoria

La fuerza gravitatoria es una fuerza de atracción que un trozo de materia ejerce sobre otro. Afecta a todos los cuerpos y es una fuerza muy débil y de un solo sentido, pero de alcance infinito.

2.2 Fuerza electromagnética

La fuerza electromagnética afecta a los cuerpos eléctricamente cargados y es la fuerza involucrada en las transformaciones física y química de átomos y moléculas. Es mucho más intensa que la fuerza gravitatoria, tiene dos sentidos (atracción-repulsión) y su alcance es infinito.

2.3 Fuerza o interacción nuclear fuerte

Es la fuerza que mantiene unidos los componentes de los núcleos atómicos y actúa indistintamente entre dos nucleones cualesquiera, protones o neutrones. Su alcance es del orden de las dimensiones nucleares pero es más intensa que la fuerza electromagnética.

2.4 Fuerza o interacción nuclear débil

Es la interacción responsable de la desintegración beta de los neutrones (un neutrón en el núcleo se transforma en un protón y un electrón, escapando este último a gran velocidad del núcleo) en la que se hace necesaria la aparición de un partícula sin carga, totalmente invisible e inmune a las fuerzas eléctricas y magnéticas (llamada **neutrino**) necesaria para que la energía se conserve en este proceso de desintegración. La interacción del neutrino con la materia constituye la cuarta fuerza de la naturaleza. Es decir los neutrinos son sensibles únicamente a este tipo de interacción. Su intensidad es menor que la de la fuerza electromagnética y su alcance es menor que el de la interacción fuerte.

Nosotros nos centraremos en los fenómenos de naturaleza **electromagnética**.

3. Distribuciones de carga y corriente

Usaremos el símbolo "***q***" para denotar la carga eléctrica. La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia y únicamente existe en múltiplos enteros, positivos o negativos, de la carga de un electrón, e^-, medida en culombios (C).

$$\boxed{e^- = -1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}$$

Considerando que los fenómenos electromagnéticos surgen de interacciones entre cargas, se debe aclarar qué se entiende, desde un punto de vista macroscópico, como distribuciones de carga y de corriente.

Definimos **densidad de carga volumétrica**, en un volumen suficientemente grande como para englobar un elevado número de partículas discretas cargadas, como el cociente entre la cantidad de carga que hay en él y dicho volumen, de modo que deje de manifestarse el carácter discreto y microscópico de las cargas en la materia y veamos efectos en promedio.

$$\boxed{\rho_v = \frac{\Delta q}{\Delta v}} \qquad \text{Unidad: C/m}^3$$

Función que en principio sería discreta, situación evitable si $\Delta v \to 0$, entendiendo que Δv sigue siendo suficientemente grande desde el punto de vista microscópico a pesar de que tiende a cero desde el punto de vista macroscópico.

$$\boxed{\rho_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}} \qquad \text{Unidad: C/m}^2$$

Análogamente, se definen las **densidades superficiales y lineales** de carga como:

$$\boxed{\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}} \qquad \text{Unidad: C/m}^2$$

$$\boxed{\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}} \qquad \text{Unidad: C/m}$$

En un volumen "*v*", para una densidad de carga ρ_v tendremos una **carga total**:

$$\rho_v = \frac{\Delta q}{\Delta v} \implies dq = \rho_v \cdot dv \implies \int dq = \int \rho_v \cdot dv \implies \boxed{q = \int_v \rho_v dv} \qquad \text{Unidad: C}$$

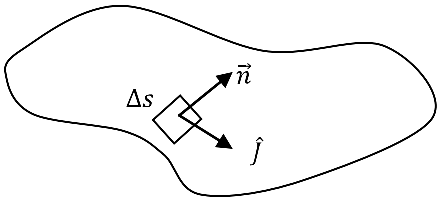
Y, análogamente, para distribuciones superficiales y lineales:

$$\boxed{q = \int_s \rho_s ds} \qquad \text{Unidad: C}$$

$$\boxed{q = \int_l \rho_l dl} \qquad \text{Unidad: C}$$

DENSIDAD DE CORRIENTE, $\vec{J}$

Si las cargas están en movimiento tendremos una **distribución de corrientes**, cuya densidad podemos caracterizar como cociente entre la cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa un elemento de área normal a la dirección en que se mueven y el valor de dicho elemento.



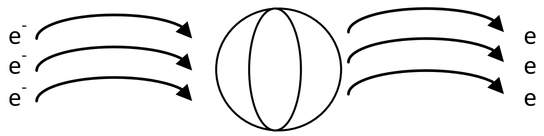
$$J = |\vec{J}| = \frac{\Delta q/\Delta t}{\Delta s} = \frac{\Delta I}{\Delta s}$$

Como en el caso de ρ_v, deseamos evitar el manejo de funciones discontinuas:

$$J = |\vec{J}| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} = \frac{dI}{ds} \qquad \text{Unidade: A/m}^2$$

donde Δs se mantiene siempre suficientemente grande desde el punto de vista microscópico.

Teniendo en cuenta el sentido de movimiento de las cargas (de las positivas, según conveniencia histórica) podemos poner: $\vec{J} = J\hat{J}$



Si en un cuerpo inicialmente neutro depositamos cargas negativas, este quedará cargado negativamente lo que es equivalente a la eliminación de cargas positivas del cuerpo neutro.

La corriente que fluye por una superficie arbitraria "*s*" se puede calcular como:

INTENSIDAD:

$$\boxed{I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}} \qquad d\vec{s} = ds\hat{n} \qquad \text{Unidad: A}$$

4. Ley de conservación de la carga: ecuación de continuidad

El **principio de conservación de la carga eléctrica** establece que la **carga eléctrica se conserva**: es decir, no se crea ni se destruye. Es una ley de la naturaleza y no puede deducirse de otros principios. Las cargas eléctricas pueden moverse de un lugar a otro y redistribuirse, pero la suma de cargas negativas y positivas en un sistema aislado no cambia.

Este principio lo podemos expresar matemáticamente según sigue: Sean $\vec{J}(\vec{r},t)$ y $\rho_v(\vec{r},t)$ las densidades de corriente y carga en el espacio y sea "*v*" un volumen encerrado por una superficie cerrada "*s*" ($\vec{r}$ es el vector de posición en donde se evalúan $\vec{J}$ y ρ_v). Entonces la disminución de la **carga almacenada en "*v*"** al transcurrir el tiempo, se calcula mediante la expresión:

$$-\frac{d}{dt}\int_v \rho_v dv$$

que coincidirá con el flujo de corriente a través de "s":

$$-\frac{d}{dt}\int \rho_v dv = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Es decir:

$$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \rho_v dv = -\frac{d}{dt}\int \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Admitiendo que “s” (y en consecuencia v) es independiente del tiempo.

Si aplicamos el teorema de la divergencia (teorema de Gauss):

$$\int \nabla\cdot\vec{J} dv = -\int \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

Es decir:

$$\int_v (\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t}) dv = 0$$

Que ha de verificarse para todo v, lo que exige que el integrando de la ecuación anterior se anule, es decir

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0}$$

Formulación matemática del **principio de conservación e la carga**

Esta ecuación se conoce como **ecuación de continuidad**, expresión en forma diferencial del postulado de la conservación de la carga.

5. Teorema de Helmholtz

El **teorema de Helmholtz** establece que **si se conocen la divergencia y el rotacional** de un campo vectorial en todos los puntos de una región finita, entonces este campo puede ser calculado de forma única (en otras palabras, **un campo vectorial está determinado** si su divergencia y su rotacional están especificados en todos los putos del espacio de una región finita).

Supónganse que $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ y que:

$\nabla\cdot\vec{F} = b(\vec{r})$ Divergencia de $\vec{F}$

$\nabla\times\vec{F} = \vec{c}(\vec{r})$ Rotacional de $\vec{F}$

son funciones conocidas para todos los puntos de un volumen finito v.

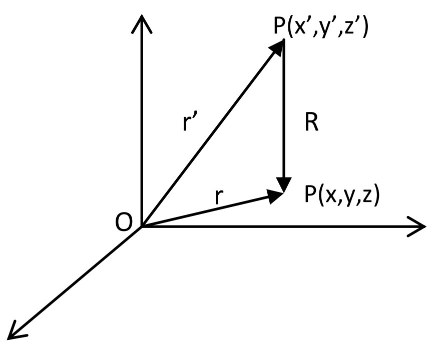
NOTA:
Las fuentes se indican primándolas: P’(x’,y’,z’)

Entonces se definen las siguientes funciones:

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{b(\vec{r})dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ **Potencia escalar**

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\vec{c}(\vec{r})dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ **Potencia vectorial**

dv': elemento volumen en la posición del punto fuente $\vec{r}'$.



$\vec{r}$: Punto campo (punto en el que se evalúa $\vec{F}$)

$\vec{r}'$: Punto fuente (punto en el que se evalúan las fuentes con el propósito de integración)

R = $\vec{r} - \vec{r}'$

$\vec{F}$ puede calcularse a partir de

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

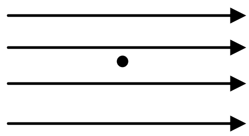
Como a partir de $b(\vec{r})$ y $\vec{c}\ (\vec{r})$ se puede calcular $\vec{F}$, éstas reciben el nombre de **fuente escalar y fuente vectorial de $\vec{F}$** respectivamente.

Nos apoyamos en este teorema como elemento básico del desarrollo axiomático del electromagnetismo. Para cada uno de los temas de estudio (campos eléctricos estáticos, campos magnéticos estáticos y campos electromagnéticos variables con el tiempo) enunciaremos los postulados fundamentales (especificaremos la divergencia y el rotacional) de los vectores de campo básicos necesarios para el modelo electromagnético.

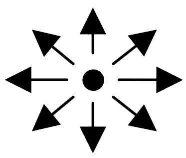
La divergencia de un campo vectorial $\vec{F}$ es diferente de cero solamente en los punto donde "nacen" o "mueren" las líneas de campo (se originan o desaparecen); y el rotacional es diferente de cero solamente en los puntos rodeados por líneas de campo cerradas o en espiral.

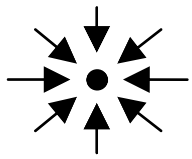
Casos posibles:

a) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$
(**campo solenoidal**: las líneas de campo no nacen ni mueren es decir, no hay fuentes ni sumideros)
$\nabla \times \vec{F} = 0$
(campo irrotacional: las líneas no tienen curvatura: son rectas)



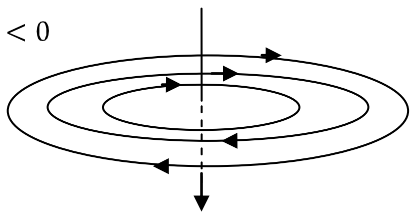
b) $\nabla \times \vec{F} = 0$ (No hay curvatura)
$\nabla \cdot \vec{F} > 0$ → existe una "**fuente**" y si $\nabla \cdot \vec{F} > 0$ → existe un "**sumidero**"



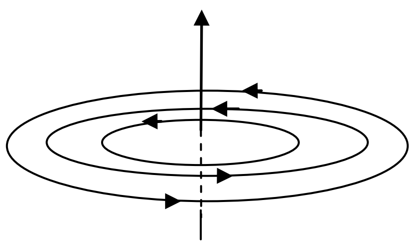


c) $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ (→No hay manantial ni sumidero)
$\nabla \times \vec{F} \neq 0$ (Dirección de $\nabla \times \vec{F}$ → eje de rotación)

$\nabla \times \vec{F} < 0$

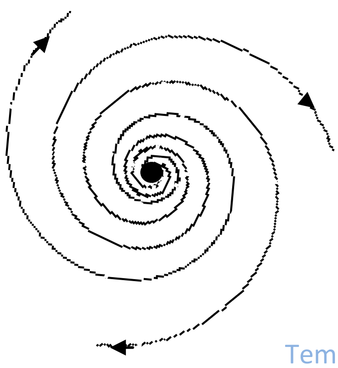


$\nabla \times \vec{F} > 0$



d) $\nabla \cdot \vec{F} =\neq 0$
$\nabla \times \vec{F} \neq 0$

Fuente ($\nabla \times \vec{F} > 0$)



6. Campos eléctricos estáticos o campos electrostáticos

La **intensidad de campo eléctrico** $\vec{E}(\vec{r})$ es igual a la fuerza por unidad de carga que experimenta una carga de prueba muy pequeña estacionaria al colocarla en una región donde existe un campo:

$\boxed{\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q}}$ Unidad: N/C o V/m

- E: intensidad de campo eléctrico
- F: fuerza
- q: carga

q es lo suficientemente pequeña como para no perturbar la distribución de carga de la fuente.

La **fuerza** sobre una carga estacionaria *q*, en un campo $\vec{E}$, vendrá dada por:

$\vec{F} = q\vec{E}$ Unidad: N

Los dos postulados básicos de la electrostática en el espacio libre son los siguientes:

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ (ε_0: **permitividad del espacio libre** = $8{,}854\cdot 10^{-12}$ F/m)

$\nabla \times \vec{E} = 0$ (Campo irrotacional)

Esto implica:
- El campo tiene fuentes y sumideros
- No varía con el tiempo
- No tiene curvatura, es decir, no tiene fuentes vectoriales

Todas las relaciones electrostáticas en el espacio libre (ley de Coulomb, ley de Gauss, …) pueden deducirse de las ecuaciones anteriores)

6.1 Ley de Gauss:

Integrando ambos miembros de la ecuación de la divergencia de $\vec{E}$ en un volumen arbitrario *v*:

$$\int_v \nabla \cdot \vec{E} dv = \int_v \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho_v dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer miembro (pasamos de volumen a superficie):

$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$ Q : carga total contenida en el volumen *v –carga encerrada-*

Distribución de carga en una superficie cerrada

- Evaluando el campo E en todos los puntos de la superficie (hacemos la integral de superficie), si fuese constante en todos estos puntos:

$\vec{E} = cte \implies \vec{E}\oint_s d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies \vec{E} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0 \cdot \vec{s}}$

Superficie gaussiana, donde el campo es constante en todos los puntos de la superficie.

Siendo una **esfera**: $E(r) = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (cos0=1); en forma vectorial: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$

De la ecuación $\nabla \times \vec{E} = 0$ (campo irrotacional) se deduce aplicando el teorema de Helmholtz:

$\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi}$ $\left\{ \phi = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{b(\vec{r'})dv}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho_v(\vec{r'})dv}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \right.$

De sustituir en el potencial escalar $b\left(\vec{r'}\right) = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$

Para una **distribución puntual**:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{|\vec{r}-\vec{r_k}|}$$

Como consecuencia de lo anterior $\nabla \times \vec{E} = 0$ y del teorema de Stokes

$$\int_s \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Circulación

La integral de línea de $\vec{E}$ a lo largo de un camino cerrado es nula.

La integral de línea del campo irrotacional $\vec{E}$ desde un punto P_1 a un punto P_2 no depende de la trayectoria que une a estos puntos (→ campo conservativo):

$$\vec{E} = -\nabla\phi \implies \oint_c -\nabla\phi \cdot d\vec{l} = (*) - \oint_c d\phi = 0$$

$$\phi(x,y,z) \Longrightarrow d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}\right)(dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z})$$

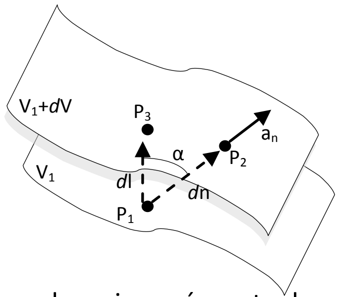
$d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{l}$; $(dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z})$ elemento de línea de coordenadas cartesianas

(*) $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (-\nabla\phi) \cdot d\vec{l} = \oint_C -\mathrm{d}\phi = \phi(\mathrm{P}_1) - \phi(\mathrm{P}_1) = 0$

$$\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} -\nabla\phi \cdot d\vec{l} = \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} -\mathrm{d}\phi = \int_{\mathrm{P}_2}^{\mathrm{P}_1} \mathrm{d}\phi = \phi_1 - \phi_2 = V_1 - V_2$$

Donde V_2 - V_1 es la diferencia de potencial entre P_2 y P_1 (en voltios).

$\frac{W}{q} = -\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Delta V$ es el trabajo (en J/C ó V) para mover la carga "q" de P_1 a P_2



$$(*)\,\frac{dv}{dl} = \frac{dv}{dn}\frac{dn}{dl} = \frac{dv}{dn}cos\alpha = \frac{dv}{dn}\hat{n}\cdot\hat{l} = \nabla V \cdot \hat{l} \implies$$

$$dv = \nabla V \cdot d\hat{l}$$

$cos\alpha = \hat{n} \cdot \hat{l}$ ya que $|n|=|l|=1$

El **gradiente** es el camino más corto, la normal. Es siempre perpendicular a las superficies equipotenciales.

Postulados de la electrostática en el espacio libre	
Forma diferencial	Forma integral
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$	$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Dichos postulados representan las leyes de la naturaleza. Se pasa de los primeros a los segundos mediante los teoremas de Stokes y la divergencia y la integración.

CONDUCTORES EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

Un conductor es una “región" donde las cargas son libres de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico.

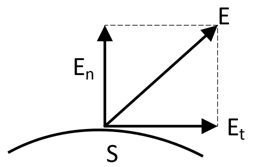
Como estamos considerando situaciones estáticas a nivel macroscópico, $\vec{E} = 0$ dentro del conductor (si existiese campo $\vec{E}$ dentro del conductor, las cargas se moverían). Por lo tanto, $\phi = V$ es constante dentro del **conductor** siendo por tanto el conductor un **volumen equipotencial**.

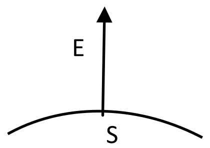
a) Campo en el interior del conductor

- El campo en cualquier punto interior es nulo E: $\vec{E}(\vec{r}) = 0$
- El potencial es constante: $\phi(\vec{r}) = V(\vec{r}) = cte$
- $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$; como $\vec{E} = 0 \implies Q_{enc} = 0$

  No puede haber carga encerrada dentro de un conductor en equilibrio electrostático, ya que si la hubiese, habría campo. Por lo tanto **no hay densidad volumétrica** en un conductor en equilibrio electroestático, pero si densidad superficial (la carga neta de un conductor debe localizarse en su superficie).

b) *Campo en la superficie del conductor*

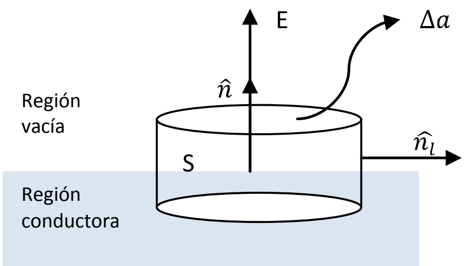




Si $\vec{E_t} \neq 0$ habría una fuerza tangencial sobre las cargas móviles que produciría un movimiento de cargas paralelamente a la superficie, por tanto en la superficie de un conductor, $\vec{E}$ debe ser normal a la superficie:

$\vec{E_n} \neq 0$
$\vec{E_t} = 0$
$\phi(\vec{r}) = V(\vec{r}) = cte$ (de lo contrario existiría una componente tangencial del campo)

◆Cálculo del campo en la superficie de un conductor:



- Cogemos una superficie gaussiana muy pequeña para que el campo en ella sea constante. De área Δa (base del cilindro)
- $\hat{n}_l$: vector normal a la superficie lateral

  Aplicando el teorema de Gauss a una superficie (gaussiana) arbitraria cerrada dentro del conductor:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{tapa} (E\hat{n}) \cdot (ds\hat{n}) + \int_{lateral} \vec{E} \cdot \hat{n}_c ds + \int_{fondo} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{tapa} Eds = E\int_{tapa} ds = E\Delta a$$

(1) $\vec{E} \cdot \hat{n}_c = 0\ (lateral)$
(2) $\vec{E} = 0\ (fondo)$

$$Q_{enc} = E\Delta a \cdot \varepsilon_0 = \rho_s \Delta a \implies E\Delta a = \frac{\rho_s \Delta a}{\varepsilon_0} \implies E_{sup} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

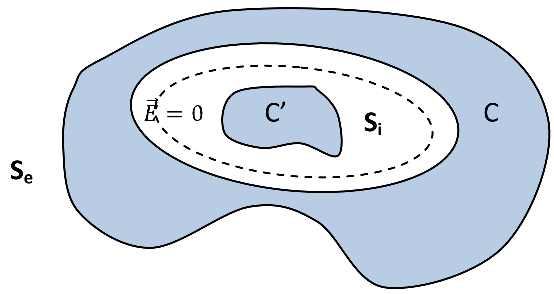
PREGUNTA:
¿Puede existir ρ_v en el interior de un conductor electrostático?
No, porque no hay carga. Solo puede haber ρ_s

CAJA DE FARADAY – Blindado o apantallado

Consideramos un **conductor con una cavidad** en su interior.

Sólo puede aparecer campo dentro de la cavidad **S_i** y en el exterior del conductor **S_e** (conductor envolvente).

Si tenemos un conductor interior en la cavidad, la situación es la siguiente:



$\boxed{Q_{c'}=0}$

$\boxed{\text{S: superficie gaussiana}}$

Todo es un volumen equipotencial:

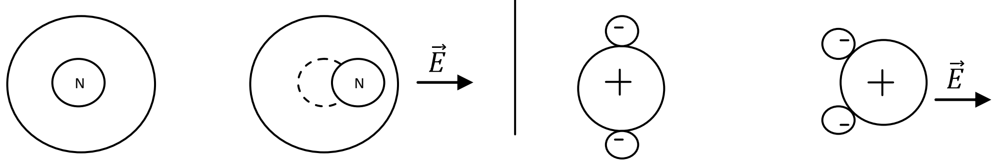
- Dentro del conductor C no hay campo
- En todo el hueco tampoco.

Si el conductor c' no posee carga, no existe campo E dentro de la cavidad, por lo que c' posee el mismo potencial que el conductor envolvente c, pudiendo colocar carga "sobre" o fuera" de *c* sin que origine ningún campo electrostático en *c'*. El conductor interno *c'* está **blindado o apantallado** (CAJA DE FARADAY)

6.2- Efectos de un medio dieléctrico:

Cuando sometemos un átomo (corteza negativa y núcleo positivo) a un campo eléctrico externo, hay un desplazamiento del núcleo y se forma un dipolo.

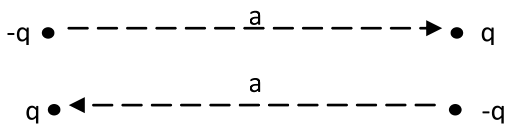
NIVEL ATÓMICO | NIVEL MOLECULAR

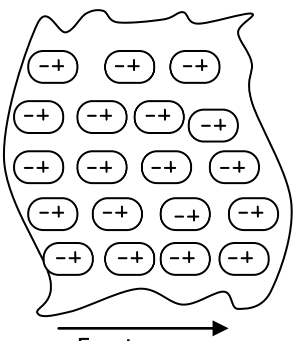


Dipolos inducidos (momentos dipolares de las moléculas, cargas negativas y positivas del mismo valor absoluto separados una cierta distancia). Un dipolo eléctrico tiene asociado un **momento dipolar**:

$$\vec{p} = q \cdot \vec{a} \qquad \begin{cases} \text{Unidad: C·m} \\ \vec{p}\text{: momento dipolar} \\ q\text{: carga (C)} \\ \vec{a}\text{: distancia (m)} \end{cases}$$

Va de la carga positiva –origen- a la carga negativa –extremo-.





E externo

◆ Cuando no hay campo externo $\vec{E}$, los dipolos individuales de un de un dieléctrico polar están orientados de forma aleatoria y no producen momento dipolar neto a nivel macroscópico.

◆ Al aplicar un $\vec{E}_{externo}$ los dipolos individuales de un dieléctrico polar tienden a alinear su momento dipolar con $\vec{E}_{externo}$, produciéndose lo que se conoce como **polarización del dieléctrico**.

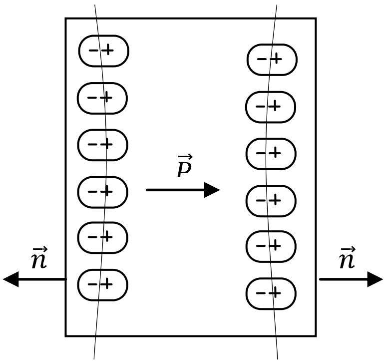
Definimos el **vector de polarización** $\vec{P}$, para analizar el efecto macroscópico de los dipolos inducidos, como:

$$\boxed{\vec{P} = \lim_{\Delta v \to o} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \overrightarrow{p_k}}{\Delta v}}$$

$\vec{P}$: vector polarización
Δv: volumen elemental del dieléctrico (a nivel macroscópico, es decir, varias dipolos)
n: número de moléculas por unidad de volumen
$\sum_{k=1}^{n\Delta v} \overrightarrow{p_k}$: suma vectorial de los momentos dipolares inducidos que están contenidos en un volumen Δv.
Unidad: C/m^2

$$\frac{q}{s} = P \implies q = P \cdot s$$

La **densidad superficial** es: $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$
Para una superficie *s* que limita un volumen *v* la carga neta que sale fuera de *v* como resultado de la polarización se obtiene integrando ρ_{ps}. La **carga neta** que permanece dentro de *v* (*Q*) es:



$$Q = -\oint_s \vec{P} \cdot \hat{n} ds =_{th.div} \int_v (-\nabla \cdot \vec{P}) dv = \int_v \rho_{pv} dv$$

donde hemos definido la **densidad volumétrica de carga de polarización equivalente** como:

$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$ Unidad: C/m^3

Que aparece al polarizar un dieléctrico.

Como comenzamos con un cuerpo dieléctrico eléctricamente neutro, la carga total tras la polarización debe seguir siendo cero:

$$Q_{int} + Q_{superficial} = 0$$

$$\oint_s \rho_{ps} ds + \int_v \rho_{pv} dv = \oint_s \vec{P} \cdot \hat{n} ds - \int_v \nabla \cdot \vec{P} dv = 0$$

Con lo cual tenemos que modificar la expresión de la divergencia postulada para $\vec{E}$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_v + \rho_{pv}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_v - \nabla \cdot \vec{P}\right) \implies$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_v \implies \nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_v$$

ρ_v: densidad de carga libre
ρ_{pv}: densidad de carga ligada. Aparece al polarizar un dieléctrico.

Definimos el **vector desplazamiento eléctrico** $\vec{D}$ como:

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ Unidad: C/m^2

Con lo cual, $\nabla \cdot \vec{D}$ sólo depende de las cargas libres ρ_v, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$
Integrando los dos términos de la ecuación anterior sobre un volumen *v*:

$$\int_v \nabla \cdot \vec{D} \cdot dv = \int_v \rho_v dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$\oint_s \vec{D} \cdot ds = Q$ Q: carga libre Unidad: C

Por lo tanto las dos **ecuaciones básicas de los campos electrostáticos**:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Pueden aplicarse para resolver cualquier problema electrostático.

Permitividad dieléctrica del medio:

a) Si el medio dieléctrico es **lineal**, la polarización es directamente proporcional a $\vec{E}$ y la **constante de proporcionalidad** depende de $\vec{E}$ y $\vec{r}$, es decir, $\chi_e(\vec{E},\vec{r})$.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Siendo χ_e la **susceptibilidad eléctrica**, adimensional.

b) Si el medio es **lineal** e **isótropo** → χ_e independiente de $\vec{E}$: $\chi_e(\vec{r})$

c) Si el medio es **lineal y homogéneo** → χ_e independiente de $\vec{r}$: $\chi_e(\vec{E})$

d) Si el medio es **líneas, isótropo y homogéneo** → χ_e independiente de $\vec{r}$ y de $\vec{E}$: $\chi_e = cte$
Estos últimos son los medios que siempre vamos a considerar.

Entonces de la relación $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}(1+\chi_e) \Rightarrow$

$$\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

Definimos:

$\left\{\begin{array}{l} \mu_r\text{: \textbf{permitividad relativa} o constante dieléctrica relativa: } \left(\varepsilon_r = 1+\chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\text{, adimensional y constante} \\ \mu\text{: \textbf{permitividad absoluta} del medio } (\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r)\text{, unidad: F/m} \end{array}\right.$

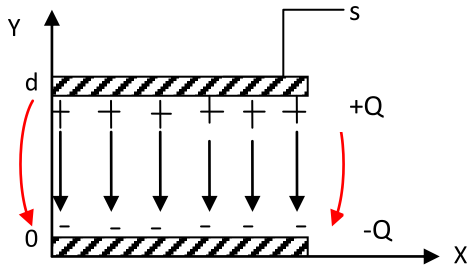
CONDENSADOR PLANO PARALELO

Un condensador plano paralelo está formado por dos placas con cargas opuestas separadas por un dieléctrico o por el espacio libre.

Las líneas de campo son perpendiculares a las superficies de los conductores (superficies equipotenciales).

Suposiciones:

- Despreciamos los efectos de borde (líneas rojas).
- Suponemos un campo uniforme: consideramos que la distancia que separa las placas es más pequeña que su grosor.
- Un medio dieléctrico lineal, homogéneo e isotrópico de permitividad ε



1. **El campo electrostático**:

$\rho_s = \frac{Q}{s}$ (solo hay ρ_s, por ser un conductor)

$\vec{E} = \frac{-\rho_s}{\varepsilon \cdot s}\hat{y}$ $\quad\Big\{\quad \vec{E} = -\frac{Q}{\varepsilon \cdot s}\hat{y}$

2. **Diferencia de potencial entre placas**:

$$V_{12} = V_2 - V_1 = -\int_{Y=0}^{Y=d}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^d\left(-\frac{Q}{\varepsilon \cdot s}\hat{y}\right)\cdot(dy\cdot\hat{y}) = \frac{Q}{\varepsilon \cdot s}d \Rightarrow \boxed{V_{12} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot s}d}$$

3. **Capacidad C**

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{12}} = \varepsilon\cdot\frac{s}{d}}$$

- Si el dieléctrico fuese el vacío $\varepsilon = \varepsilon_0$
- Con un dieléctrico aumentamos la capacidad del condensador

Unidad: C/V o F (faradio)

4. **Energía asociada a un condensador (en estática)**

- En un estado intermedio en el proceso de carga del condensador (la carga está variando).
- Calculamos el trabajo para que la cara +q pase a +q+dq y la cara –q pase a –q-dq:
- $dW = (V_1 - V_2)\cdot dq$

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C} \Rightarrow dW = \frac{1}{C}q\cdot dq \Rightarrow \int dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\cdot dq \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{C}\cdot\frac{Q^2}{2}}$$

En función de la capacidad:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\cdot C(V_1 - V_2)^2}$$

7. Campos magnéticos estáticos

Se ha demostrados experimentalmente que cuando la carga de prueba está en movimiento en un campo magnético $\overrightarrow{B}$ (densidad de flujo magnético, inducción magnética), la carga q experimenta una fuerza magnética $\overrightarrow{F}_m$, dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{\overrightarrow{F_m} = q\vec{v} \times \overrightarrow{B}}$$

Unidad: newtons

$\vec{v}$: velocidad de la carga en movimiento $\vec{B}$: campo en webers/m^2 (Wb/m^2) o Teslas (T)

La fuerza electromagnética total sobre una carga q, viene dada por la **ley de Lorentz:**

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_m} = (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Fuerza que se ejerce sobre una carga cuando en el espacio tenemos un campo $\vec{E}$ y un campo $\vec{B}$. $\overrightarrow{F_m}$: fuerza magnética, fuerza de Lorentz

Los dos postulados para la magnetostática en el espacio libre son los siguientes:

$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$ ($\Longrightarrow$ campo solenoidal, no hay fuentes escalares. Líneas $\vec{B}$ cerradas.)

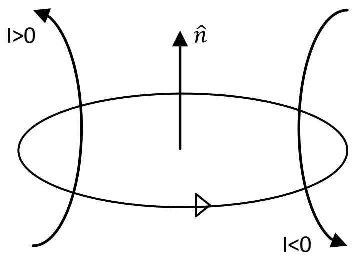
$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \vec{J}$ (($\Longrightarrow$ hay fuentes vectoriales: fuentes de circulación –la rueda de paletas giratoria- "es como si las líneas de fuerza girasen con el eje que es la densidad de corriente):

μ_0 (permeabilidad en el espacio libre) = $4\pi \ x \ 10^{-7}$

Todas las relaciones de la magnetostática en el espacio libre (ley circuital de Ampere, ley de Biot-Savart,…) pueden ser deducidas de las ecuaciones anteriores ($\nabla \times \vec{B}$ y $\nabla \cdot \vec{B}$).

7.1 Ley circuital de Ampere:

Integrando ambos miembros de la ecuación $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ sobre una superficie abierta s y luego aplicado el teorema de Stokes:



Sentido antihorario (normal hacia arriba) → corriente positiva

Por el teorema de Stokes (superficies abiertas):

$$\int_s (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Teniendo en cuenta que $\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = I$

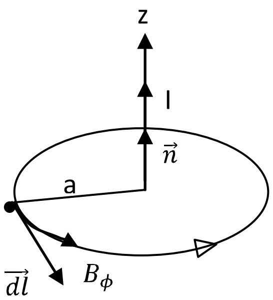
Se obtiene

$$\boxed{\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$

c: contorno que limita la superficie "s"
I: corriente total a través de "s".

Esta es la ley circuital de Ampere y sirve para calcular el campo $\vec{B}$ siempre que tengamos una simetría.

Ejemplo. Cálculo de $\vec{B}$ producido por una línea de corriente constante y de longitud infinita en la dirección z.

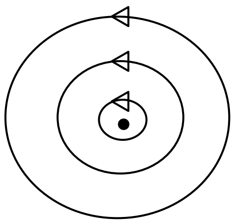


Por simetría la magnitud $\vec{B}$ es constante alrededor de una circunferencia de radio a, centrada en la línea.
Por la ley de Ampere:

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_\phi \oint_c dl = B_\phi 2\pi a = \mu_0 I \implies$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ ;\ \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\phi}$$

Líneas de campo:



- Corriente saliendo del plano
- Son líneas cerradas, de acuerdo con la divergencia nula.
- La dirección de rotación (eje de rotación) viene dado por $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Integrando $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ sobre un volumen *v* se obtiene:

$$\int_v \nabla\cdot\vec{B}\cdot dv = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\boxed{\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0}\qquad \begin{cases}\text{s: superficie que limita el volumen } v\\ \text{Campo en la superficie cerrada que limita al volumen}\end{cases}$$

Por lo tanto no hay fuentes de flujo magnético, las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas (**ley de conservación del flujo magnético**).

Cualquier superficie cerrada no encierra ninguna carga, ya que no hay cargas ni fuentes.

De la ecuación $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ (campo solenoidal) se deduce aplicando el teorema de Helmholtz:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\nabla\vec{B}dv}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|} = 0\ \ (Porque\ la\ divergencia\ es\ 0)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\nabla\times\vec{B}dv\prime}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}dv\prime}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ \ (Potencial\ vectorial, en\ Wb/m)$$

$$\vec{B} = -\nabla\cdot\phi + \nabla\times\vec{A} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{B} = \nabla\times\vec{A}\\ &\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}dv'}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\end{aligned}}$$

$$\vec{J}dv' = J\cdot s\cdot d\vec{l} = I\cdot d\vec{l} \implies \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_v \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ \ (Wb/m)$$

El flujo del campo B a través de una superficie cerrada es siempre 0 (por la divergencia), pero no así en una superficie abierta.

Se puede calcular el flujo del campo $\vec{B}$ a través de un área *s* limitada por un contorno *c*:

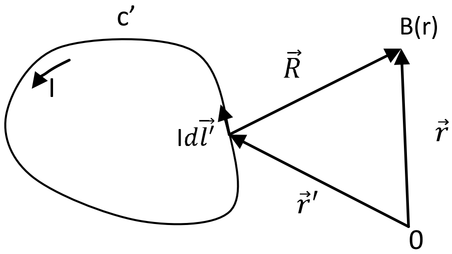
$$\Phi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_s (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

7.2 Ley de Biot - Savart:

Como $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ y $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_v \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \nabla\times\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_v \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{c'} \frac{d\vec{l}'\times\hat{R}}{R^2}\quad (Teslas)}$$

R=$|\vec{r}-\vec{r}'|$



La ecuación anterior se conoce como ley de Biot-Savart y nos permite calcular el campo B (inducción magnética, densidad de flujo magnético, campo magnético) generado por una corriente I en una trayectoria cerrada *c'*.

Para el caso de una distribución volumétrica de corriente $\vec{J}$, la ley de Biot-Savart sería la siguiente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{\vec{J}\times\vec{R}}{R^2}\,dv'$$

teniendo en cuenta que $Id\vec{l}' = \vec{J}dv'$

Postulados de la magnetostática en medios no magnéticos	
Forma diferencial	**Forma integral**
$\nabla\cdot\vec{B} = 0$	$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$
$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$	$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

Fuerzas sobre conductores por los cuales circulan corrientes:

Teniendo en cuenta que la fuerza magnética sobre un elemento de carga *dq* que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en presencia de un campo $\vec{B}$ viene dada por la Ley de Lorentz (d$\overrightarrow{F_m} = dq(\vec{v}\times\vec{B})$), la fuerza magnética sobre un segmento de corriente vendrá dada por la siguiente expresión:

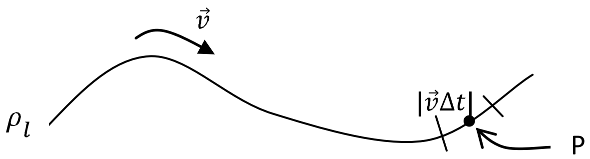
$\overrightarrow{F_m} = \int_l (\vec{v}\times\vec{B})dq$, sustituyendo dq por $\rho_l$dl se obtiene:

$\overrightarrow{F_m} = \int_l (\vec{v}\times\vec{B})\rho_l dl$; si $\vec{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_l\cdot\vec{v}$ ⇨ $\overrightarrow{F_m} = \int_l (\vec{I}\times\vec{B})dl$

Como $\vec{I}$ *y* $d\vec{l}$ tienen la misma dirección e *I* es constante:

$$\overrightarrow{F_m} = \int_l I(d\vec{l}\times\vec{B})$$

Para un circuito filamentado:



- Si I=constante:

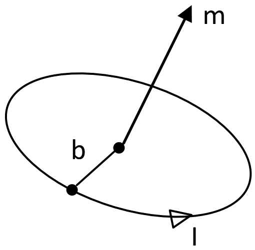
$$\overrightarrow{F_m} = I\int_l d\vec{l}\times\vec{B}$$

- Si el circuito es cerrado:

$$\overrightarrow{F_m} = I\oint_c d\vec{l}\times\vec{B}$$

Efectos de un medio magnético:

Un dipolo magnético viene caracterizado por su momento dipolar magnético $\vec{m}$ definido como:



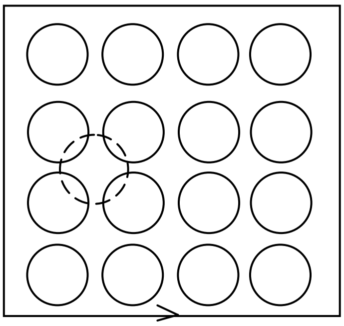
Dipolo magnético

$\vec{m} = \mathrm{I} \cdot \vec{s}$
$s = \pi b^2$
$(A \cdot m^2)$

Diferencias:
- El dipolo-eléctrico tiene las cargas separadas - El dipolo magnético gira

$\vec{m}$: momento dipolar magnético
$\vec{s}$: superficie de la espira

Es un **momento dipolar de spin**. Cuando un electrón gira en torno a su eje de simetría, produce un momento magnético.



Cada átomo tiene asociado un **momento dipolar magnético**. Cada átomo tiene su momento dipolar orientado de manera aleatoria. Normalmente la suma de todos los momentos es cero (excepto los imanes: de forma natural tienen los momentos dipolares orientados en cierta dirección).

Al aplicar un $\vec{B}_{\text{externo}}$ se produce una alineación de los momentos magnéticos de los electrones giratorios e induce una imanación del medio $\vec{M}$ debido al cambio orbital de los electrones.

Si someto un material a un campo externo sus dipolos intentarán orientarse en la dirección del campo externo → el material se va a **imantar** → vector magnetización ($\vec{M}$)

Definimos el **vector magnetización** $\vec{M}$, como:

$$\boxed{\vec{M} = \lim_{\Delta v \to o} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \overrightarrow{m_k}}{\Delta v}}$$

n: número de átomos por unidad de volumen
$\vec{M}$: vector magnetización
Unidad: A/M

Se puede definir una densidad volumétrica de corriente de magnetización a través de la expresión:

$$\vec{J}_{mv} = \nabla \times \vec{M} \qquad \text{Unidad: A/m}^2$$

De igual forma que para el caso de los dieléctricos tenemos que modificar el $\nabla \times \vec{B}$ postulado:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_{mv}) = \mu_0 (\vec{J} + \nabla \times \vec{M})$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) = \vec{J} + \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

Podemos definir la **intensidad de campo magnético** $\vec{H}$ como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad \text{Unidad: A/m}$$

Por lo tanto $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ (función únicamente de la densidad de corriente libre).

Integrando ambos miembros sobre una superficie abierta "s"

$$\int_s \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Aplicando el Teorema de Stokes

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \qquad \begin{cases} \text{Unidad: A} \\ \text{c: contorno que limita s} \\ \text{I: corriente libre a través de s} \end{cases}$$

◆ Si el **medio es lineal, homogéneo e isotrópico**, la magnetización es directamente proporcional a $\vec{H}$ mediante una constante χ_m:

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$; χ_m: susceptibilidad magnética (constante y adimensional)

Sustituyendo esta expresión en la expresión $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ para el campo:

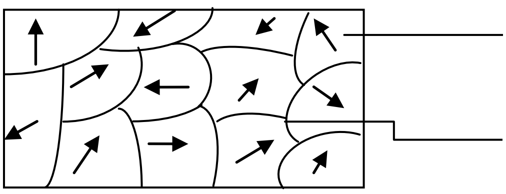
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \vec{H}(1 + \chi_m) \Longrightarrow \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

μ_r: permeabilidad relativa del medio ($\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}$), adimensional y constante (por ser medio l.h.i.)
μ: permeabilidad absoluta del medio ($\mu = \mu_0 \mu_r$), unidad: H/m

Los materiales magnéticos pueden clasificarse de forma general en tres grupos dependiendo de sus valores de μ_r:

- $\mu_r \leq 1 \Longrightarrow$ **Diamagnético** (χ_m nº negativo muy pequeño)
- $\mu_r \geq 1 \Longrightarrow$ **Paramagnético** (χ_m nº positivo muy pequeño)
- $\mu_r \gg 1 \Longrightarrow$ **Ferromagnético** (χ_m nº positivo muy grande)

Medios lineales:
- **Diamagnetismo**: asociado al movimiento orbital de los electrones en el átomo.
- **Paramagnetismo**: asociado a los momentos de "spin"
- **Ferromagnetismo**: se puede explicar en función de la existencia de **dominios magnetizados**



Estos **dominios** están **totalmente magnetizados** como resultado del movimiento de "spin" de los electrones, incluso en ausencia de un campo magnético aplicado. En un estado no magnetizado, los momentos magnéticos de los dominios tienen **direcciones aleatorias** y no se produce magnetización neta.

Cuando someto **a un campo electromagnético externo** $\vec{H}$, las paredes de aquellos dominios que tienen momentos magnéticos alineados con el campo se mueven de manera que los volúmenes de estos dominios crecen a expensas de otros dominios, aumentando $\vec{B}$, es decir, **magnetizándose finalmente el material** en la dirección del campo externo.

Si el campo $\vec{H}$ aplicado es débil los movimientos de los dominios son reversibles, pero en caso contrario ya no lo son y se produce una orientación del dominio en la dirección del campo aplicado.

8. Campos variables con el tiempo y ecuaciones de Maxwell

El postulado fundamental de la inducción electromagnética (**ley de inducción de Faraday**) es el siguiente:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\vec{E}$ no es conservativo

Integrando ambos miembros de la ecuación anterior sobre una superficie abierta *s* y aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_s \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot ds$$

La ecuación anterior es válida para cualquier superficie *s* delimitada por el contorno c, exista o no un circuito física alrededor de c.

Si tenemos un **circuito estacionario con un contorno c y superficie s**

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Definiendo:

$\varepsilon = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$ =**f.e.m. (fuerza electromotriz**) inducida en el circuito con contorno s

$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$ =**flujo magnético** que atraviesa la superficie *s*

Obtenemos:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Ley de inducción de Faraday

El signo negativo afirma que la f.e.m. inducida hará que fluya una corriente en el circuito cerrado, con sentido tal que se oponga al cambio de flujo magnético. Esto se conoce como **ley de Lenz**.

8.1. Ecuaciones de Maxwell:

La ecuación $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ no está de acuerdo con el principio de conservación de la carga (ecuación de continuidad):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} \implies \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

(La divergencia del rotacional es siempre cero)

Esta ecuación anterior no está de acuerdo con la ecuación de continuidad, por tanto, tenemos que modificar la ecuación de $\nabla \times \vec{H}$ añadiéndole el término $\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$ al miembro derecho de la ecuación anterior:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Fuerza a que se verifique la ecuación de continuidad

como $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$ se obtiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{D}}{\partial t} \implies \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$$ y esto implica

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Contribución de Maxwell $\left\{ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right.$: corriente de desplazamiento (A/m2)

En régimen estático $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

Por lo tanto las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

Ecuaciones de Maxwell		
Forma diferencial	Forma integral	
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Ley de Faraday
$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{I} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$	Ley circuital Ampere
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$	$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$	Ley Gauss
$\nabla \times \vec{B} = 0$	$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	$\nexists$ carga magnética aislada