# MATEMÁTICA DISCRETA 14-2-2005

1.

a) Probar por inducción que para todos los enteros $n \geq 2$ se tiene que

$$2n + 1 < n^3.$$ (10 **puntos**)

b) Sea $P(x, y)$ la sentencia $x + y = 1$. En el universo de los enteros ¿cuáles de las sentencias $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$, $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$, $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ y $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$ son verdaderas? (5 **puntos**)

2.

a) Representar en un diagrama de Karnaugh la siguiente expresión booleana (10 **puntos**)

$$xyz + x\overline{z}t\overline{y} + \overline{y}\overline{t}\overline{x} + \overline{x}yz$$

y encontrar una expresión minimal equivalente.

¿Cuál es su forma normal disyuntiva (SOP)? ¿Y su forma normal conjuntiva (POS)?

b) Para la función booleana $f(x, y, z) = xyz + \overline{y}z\overline{x} + yz$, ¿cuánto vale $f(0, 0, 1)$? (5 **puntos**)

3.

a) Una banda de 17 piratas, con escasos conocimientos aritméticos, se reúne para repartirse un cofre con más de 100 monedas de oro. Efectuado equitativamente el reparto sobra una moneda. En la pelea resultante para adjudicarla muere un pirata. Vuelven a realizar el reparto y sigue sobrando una moneda. ¿Cuál es el número mínimo de monedas que puede contener el cofre?

Supongamos que la solución anterior es el número real de monedas que contenía el cofre y que la historia continúa. Siempre que sobran monedas en el reparto hay pelea y muere un pirata. ¿Cuántos piratas quedarán vivos cuando en el reparto no sobre ninguna moneda?. (10 **puntos**)

b) ¿Cuál es el resto de dividir $6^{248}$ por 7? (5 **puntos**)

4.

a) Supongamos que se escogen 6 números entre el 1 y el 10. Demuestra que la suma de alguna pareja debe ser 11. ¿Se puede deducir lo mismo si se escogen 5 números en vez de 6? (10 **puntos**)

b) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabras ARITMETICA tales que la M y la E **no** queden juntas? (10 **puntos**)

5. Una cadena que contiene sólo 0, 1 y 2 se llama una *cadena ternaria*.

a) Determina una relación de recurrencia para el número de cadenas ternarias que no contienen dos 0 consecutivos.

b) ¿Cuáles son las condiciones iniciales?

c) ¿Cuántas cadenas ternarias de longitud 6 no contienen dos 0 consecutivos?. (15 **puntos**)

d) Encuentra la fórmula cerrada (explícita) de la ecuación recurrente

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$

con las condiciones iniciales $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$. (5 puntos)

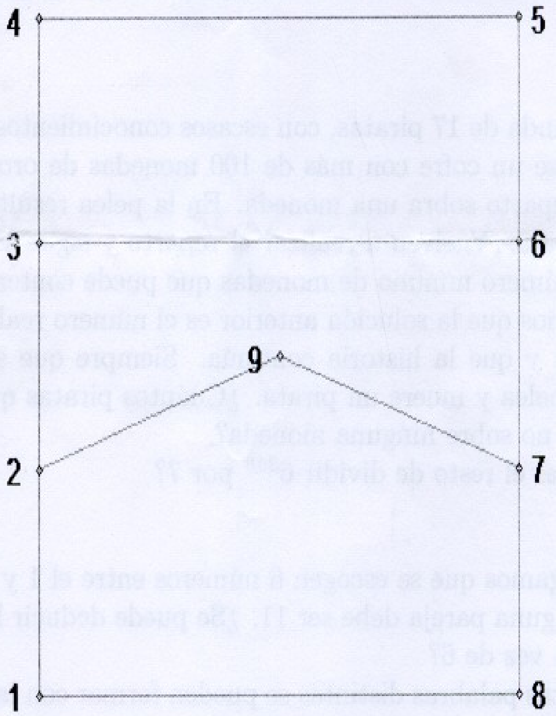
6.

a) Dada la matriz de adyacencia de un grafo $G$ de 5 vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la sucesión de los grados de los vértices y el número de aristas del grafo $G$. ¿Es $G$ euleriano? ¿Es $G$ semieuleriano? En caso afirmativo encontrar un circuito euleriano o un recorrido euleriano. ¿Es bipartito el grafo $G$? ¿Es plano el grafo $G$? (10 puntos)

b) ¿Es hamiltoniano el siguiente grafo?




$\sum_{v_i \in V} gr(v_i) = 2 \cdot |E|$

¿Es hamiltoniano el grafo completo $K_n$? (5 puntos)

[25] Publicación de las calificaciones: 25 de febrero de 2005

Revisión de exámenes: 28 de febrero de 17 a 19h y 1 de marzo de 11 a 13h.

# MATEMÁTICA DISCRETA 14-9-2005

1.

a) Dados los conjuntos $A = \{1, a, 2, b, 3, c, 4, 5\}$ y $B = \{a, b, f, g, 3, 6, 7\}$, hallar $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, diferencia simétrica de $A$ y $B$, $card(A \cup B)$, conjunto partes de $B$, ¿$b$ pertenece a $B - A$?

b) Dar la tabla de verdad de la proposición
$(((\neg p \longleftrightarrow q) \wedge (p \to r)) \to ((p \oplus \neg q) \wedge (q \longleftrightarrow r)))$
¿Qué tipo de proposición es? **10 p.**

c) Determinar si es correcto el siguiente razonamiento. En caso de que no lo sea explicar por qué.

Si Eva estudia entonces aprobará álgebra. Si Eva no juega a las cartas, entonces estudiará. Eva no aprobó álgebra. Por lo tanto Eva jugó a las cartas. **10 p.**

2. a) Dada la siguiente expresión booleana

$$xyt + \overline{x}yz\overline{t} + x\overline{yz} + x\overline{y}t + \overline{xyz}$$

encontrar una expresión minimal equivalente.

Ar ¿Cuál es su forma normal disyuntiva (SOP)? ¿Y su forma normal conjuntiva (POS)?

b) Dada la función booleana $f(x, y, z, t) = xyz + xt\overline{y} + yz + xy\overline{t}$, ¿Es $f$ equivalente a la expresión anterior? **10 p.**

3. a) Escribir en base 11 el número 1234512399032.

b) Resolver el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7) \\ 5x &\equiv 4 (\mathrm{mod}\, 9) \\ 7x &\equiv 8 (\mathrm{mod}\, 16) \end{aligned}$$

**10 p.**

4. a) Escribir todas las permutaciones distintas de los caracteres de la palabra CASA. ¿Cuántas hay? **5 p.**

b) En Navidad, 7 turrones se distribuyen entre 4 niños. ¿Cuántas maneras diferentes hay de repartirlos? ¿Cuántas maneras de repartir hay si cada niño recibe al menos un turrón? En este caso, escribir todas las maneras posibles de repartirlos. **15 p.**

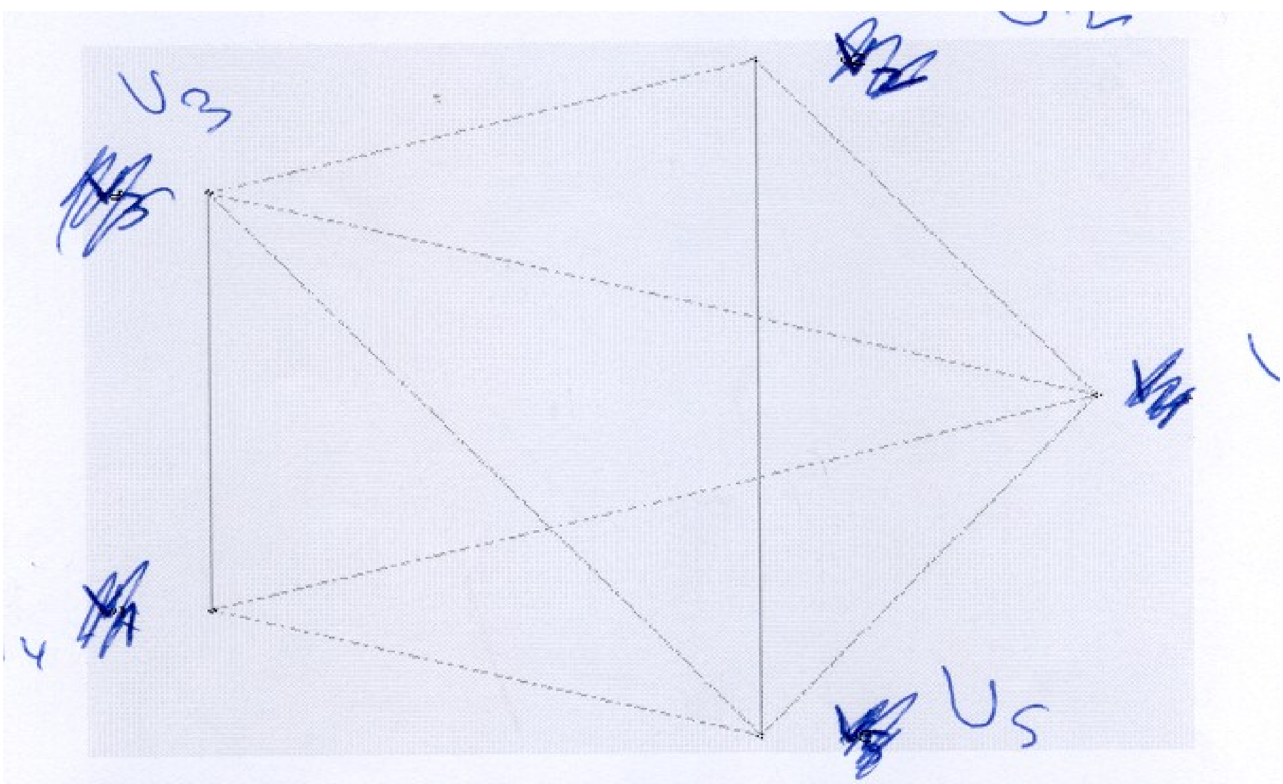
5.

a) La *inversa* de una cadena es la cadena compuesta por los símbolos de la cadena inicial dispuestos en orden inverso.

Dar un algoritmo recursivo que calcule la inversa de una cadena de bits.

b) Encontrar la fórmula cerrada (explícita) de la ecuación recurrente $u_n - 6u_{n-1} + 9u_{n-2} = 2^n$ con las condiciones iniciales $u_0 = 4$ y $u_1 = 9$. Dar los primeros 20 términos. **20 p.**

6. Representar el siguiente grafo:




Calcular la matriz de adyacencia. ¿Es un grafo euleriano? ¿Es plano? En caso afirmativo, dar una representación plana del grafo. Si los pesos de los ejes son:

$\{v1, v2\} = 6, \{v1, v3\} = 5, \{v1, v4\} = 5, \{v1, v5\} = 4,$

$\{v2, v3\} = 5, \{v2, v5\} = 3, \{v3, v4\} = 5, \{v3, v5\} = 4, \{v4, v5\} = 7$

Calcular los vértices adyacentes a $v1$. Calcular los ejes incidentes con $v4$.

Calcular dos árboles de recubrimiento minimales diferentes: uno que empiece en $v2$ y otro empezando en $v4$. ¿Cuál es su peso? **20 p.**

Turnos iguales