

SOLUCIÓNS DO EXAME DE MATEMÁTICA DISCRETA
24/1/2012

1. (a) Existe o inverso de 19 módulo 141? En caso afirmativo, calculalo.
(b) Ten solucións a congruencia $19x \equiv 3 \pmod{141}$? En caso afirmativo, calcular as solucións que hai entre -200 e 200 .

Solución:

(a) $\text{mcd}(19, 141) = 1$. O inverso é 52, aplicando o algoritmo de Euclides.

(b) $19x \equiv 3 \pmod{141} \iff x \equiv \frac{1}{19} \cdot 3 \pmod{141} \iff x \equiv 52 \cdot 3 \pmod{141} \iff x \equiv 156 \pmod{141} \iff x \equiv 15 \pmod{141}$.

As solucións que hai entre -200 e 200 son:

$$-141 + 15 = -126, \quad 15, \quad 141 + 15 = 156.$$

2. Xustificar a igualdade $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Solución: Polo teorema do binomio: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

En particular, $(1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

Pero, $1 + (-1) = 0$, e así $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

3. (a) Determinar as solucións da relación de recorrencia

$$a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n.$$

- (b) Determinar a solución do apartado anterior coas condicións iniciais $a_1 = 56$ e $a_2 = 278$.

Solución:

(a) Ecuación característica: $r^2 + 5r + 6 = 0$. $(r + 2)(r + 3) = 0$. raíces: $-3, -2$.

Solución xeral da homoxénea: $a_n = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2(-2)^n$.

Solución particular da ecuación no homoxénea: $a_n^p = C \cdot 4^n$.

$$C \cdot 4^n = -5C \cdot 4^{n-1} - 6C \cdot 4^{n-2} + 42 \cdot 4^n.$$

Dividindo por 4^{n-2} ,

$$C \cdot 4^2 = -5C \cdot 4 - 6C + 42 \cdot 4^2 \iff 42 \cdot C = 42 \cdot 4^2 \iff C = 4^2 = 16.$$

A solución da ecuación de recorrencia é:

$$a_n = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2(-2)^n + 16 \cdot 4^n.$$

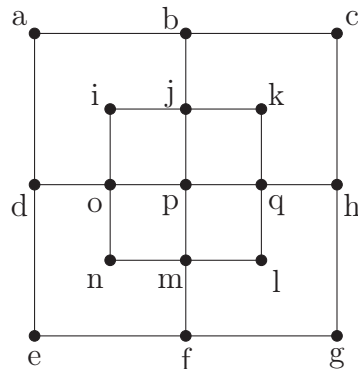
$$(b) \begin{cases} 56 = \alpha_1(-3) + \alpha_2(-2) + 16 \cdot 4 \\ 278 = \alpha_1(-3)^2 + \alpha_2(-2)^2 + 16 \cdot 4^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$.

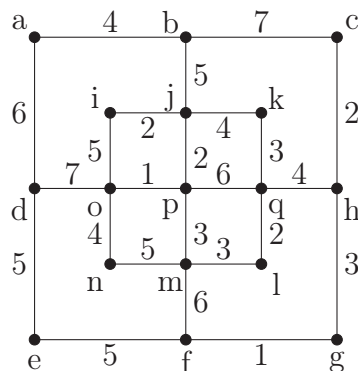
Así, a solución é:

$$a_n = 2(-3)^n + (-2)^n + 16 \cdot 4^n.$$

4. Dado o seguinte grafo G



- Comprobar o teorema de apertón de mans. Calcular a sucesión de graos do grafo G .
- É bipartito? Cal é o número crómico do grafo G ?
- É conexo? Describir un camiño simple de lonxitude 6. É isomorfo ao grafo K_5 ?
- É euleriano? É hamiltoniano?
- É plano? Comprobar a fórmula de Euler para o grafo G .
- Calcular unha árbore xeradora minimal de G usando o algoritmo de Kruskal, sendo os pesos do grafo os que se indican a continuación



Solución:

- $e =$ número de eixos: 24
Teorema de apertón de mans:

$$2e = \text{grao}(a) + \text{grao}(b) + \text{grao}(c) + \text{grao}(d) + \text{grao}(e) + \text{grao}(f) + \text{grao}(g) + \text{grao}(h) + \text{grao}(i) + \text{grao}(j) + \text{grao}(k) + \text{grao}(l) + \text{grao}(m) + \text{grao}(n) + \text{grao}(o) + \text{grao}(p) + \text{grao}(q)$$

$$2 \cdot 24 = 48 = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 4 + 4 + 4.$$

A sucesión de graos é: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$.

(b) É bipartito, xa que se pode colorear con dúas cores. O número crómico é 2.

Unha partición é: $\{a, c, e, g, j, m, o, q\}$ é $\{b, d, f, h, i, k, l, n, p\}$.

(c) G é conexo xa que para cada par de vértices existe un camiño que os une.

Hai moitos, por exemplo: i, j, k, q, l, m, n .

Non é isomorfo a K_5 xa que K_5 ten 5 vértices e G ten 17 vértices.

(d) G non é euleriano xa que ten vértices de grao impar.

G non é hamiltoniano pois $G - \{b, d, f, h\}$ ten 5 compoñentes conexas.

(e) Si, G é plano xa que no debuxo non se cortan ningún par de arestas.

Fórmula de Euler: $r = e - v + 2$. $e = \text{eixos} = 24$ $v = \text{vértices} = 17$.

$r = \text{rexións} = 24 - 17 + 2 = 9$.

(f) Eliximos os eixos:

$fg, op, ij, ql, ch, jp, gh, lm, pm, qk, ab, no, qh, bj, de, ef$.

