Exemplo de demostración en matemáticas

Sendo A e B conxuntos, probar que se $A \subset B$, entón $A \cap B = A$.

demostración:
Por definición, $A \subset B$ quere dicir (é equivalente a) $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$, isto é, que se collemos un elemento x calquera, se x é un elemento de A, entón x tamén é un elemento de B. Isto é a nosa hipótese.
En canto a pretendida conclusión, $A \cap B = A$, podémola considerar formada por duas afirmacións:

a) $A \cap B \subset A$

e

b) $A \subset A \cap B$

polo que en realidade, o que temos que demostrar son dous resultados:

1) Se $A \subset B$, entón $A \cap B \subset A$.

2) Se $A \subset B$, entón $A \subset A \cap B$.

Imos coa demostración de 1).
Partimos de que $A \subset B$ e queremos ver que $A \cap B \subset A$, isto é, que se tomamos $x \in A \cap B$, entón $x \in A$.

Pero $x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ e \\ x \in B \end{cases}$

polo que $x \in A$, como queriamos.
(notar que nesta demostración non fixo falta usar a hipótese, xa que a conclusión é certa para calquera par de conxuntos A e B).

Imos agora coa demostración de 2)
De novo partimos de que $A \subset B$, e queremos ver que $A \subset A \cap B$.
Para que se cumpla a conclusión, dado un x arbitrario que sexa elemento de A debería ser certo que este x é un elemento de $A \cap B$, é dicir, x está en A e en B.
Polo tanto xa temos demostrados os dous resultados que conforman o resultado inicial.