Tecnología de la Programación
Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas. Curso 2006/2007

Tema 2: Predicados

Ejercicio 1 *Evaluar las siguientes expresiones. El estado s en el que dichas expresiones deben ser evaluadas consiste en dos identificadores enteros x e y, un identificador booleano b, dos conjuntos de identificadores m y n, y un array de enteros* $c[1:3]$. *Los valores de estos identificadores son los siguientes:* $x = 7, y = 2, b = T, m = \{1,2,3,4\}, n = \{2,4,6\}, c = (2,4,6)$.

(a) $x \div y = 3$
$= (7 \div 2 = 3) = T$

(b) $(x-1) \div y = 3$
$= (6 \div 2 = 3) = T$

(c) $(x+1) \div y = 3$
$= (8 \div 2 = 3) = (4 = 3) = F$

(d) $ceil(x/y) = x \div y + 1$
$= (4 = 3 + 1) = T$

(e) $floor((x+1)/y) = (x+1) \div y$
$= (floor(4) = 8 \div 2) = T$

(f) $floor(-x/y) = -3$
$= (floor(-3{,}5) = -3) = (-4 = -3) = F$

(g) $ceil(x/y) = x \div y$
$= (4 = 3) = F$

(h) $min(floor(x/2), ceil(x/2)) < \text{ ceil}(x/2)$
$= (min(3,4) < 4) = T$

(i) $b \vee x < y$
$= T \vee F = T$

(j) $19 \text{ mod } 3$
$= 1$

Ejercicio 2 *Evaluar las siguientes expresiones en el estado dado en el ejercicio anterior.*

(a) $m \cup n$
$= \{1,2,3,4,6\}$

(b) $m \cap n$
$= \{2,4\}$

(c) $x \in m \wedge b$
$= F$

(d) $m \subset n \wedge b$
$= F$

(e) $\emptyset \subset m$
$= T$

(f) $\{i \mid i \in m \wedge even(i)\} \subset n$
$= T$

(l) $\{i \mid i \in m \wedge i \in n\}$
$= \{2,4\}$

Ejercicio 3 *Evaluar las siguientes expresiones en el estado dado en el ejercicio anterior. Utilizar U para representar el valor de la expresión indefinida.*

(a) $b \vee x/(y-2) = 0$
$= U$

(b) $b \text{ cor } x/(y-2) = 0$
$= T$

(c) $b \wedge x/(y-2) = 0$
$= U$

(d) $b \text{ cand } x/(y-2) = 0$
$= U$

(e) $x = 0 \wedge x/(y-2) = 0$
$= U$

(f) $x = 0 \text{ cand } x/(y-2) = 0$
$= F$

(g) $1 \leq y \leq 3 \text{ cand } c[y] \in m$
$= T$

(h) $1 \leq y \leq 3 \text{ cor } c[x] \in m$
$= T$

(i) $1 \leq y \leq 3 \text{ cand } c[y+1] \in m$
$= F$

(j) $1 \leq y \leq 3 \text{ cor } c[y] \in m$
$= T$

Ejercicio 4 *Siendo el array $b[0 : n-1]$ con $n > 0$, y $b[j : k]$ con $0 \leq j \leq k+1 \leq n$, convertir en predicados las siguientes expresiones:*

a. Todos los elementos de $b[j : k]$ son cero

$(\forall I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0)$
$\neg(\exists I : j \leq I < k+1 : b[I] <> 0)$
$(\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0) = k - j + 1$
$(\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] \neq 0) = 0$

b. Ningún valor de $b[j : k]$ es cero

$(\forall I : j \leq I < k+1 : b[I] <> 0)$
$(\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0) = 0$
$\neg(\exists I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0)$
$(\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] \neq 0) = k - j + 1$

c. Algunos valores de $b[j : k]$ son cero

$(\exists I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0)$
$\neg(\forall I : j \leq I < k+1 : b[I] <> 0)$
$(\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0) > 0$

d. Todos los ceros de $b[0 : n-1]$ están en $b[j : k]$

$((\mathbf{N} I : 0 \leq I < j : b[I] = 0) = 0) \wedge ((\mathbf{N} I : k < I < n : b[I] = 0) = 0)$
$(\forall I : 0 \leq I < j : b[I] <> 0) \wedge (\forall I : k+1 \leq I < n : b[I] <> 0)$
$(\forall I : 0 \leq I < n : b[I] = 0 \Rightarrow j \leq I < k+1)$
$(\mathbf{N} I : 0 \leq I < n : b[I] = 0) = (\mathbf{N} I : j \leq I \leq k : b[I] = 0)$
$(\forall I : 0 \leq I < n : b[I] = 0 \Rightarrow (\exists X : j \leq X \leq k : b[X] = 0 \wedge X = I))$

e. Algunos ceros de $b[0 : n-1]$ están en $b[j : k]$

$(\exists I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0)$
$(\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0) > 0$
$\neg(\forall I : j \leq I < k+1 : b[I] \neq 0)$

f. Si $b[0 : n-1]$ contiene un cero, entonces también $b[j : k]$

$((\mathbf{N} I : 0 \leq I < n : b[I] = 0) = 1) \Rightarrow ((\mathbf{N} H : j \leq H < k+1 : b[H] = 0) = 1)$
$((\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0) = 1) \wedge (\forall I : 0 \leq I < j : b[I] = 0) \wedge (\forall I : k+1 \leq I < n : b[I] \neq 0)$

g. Los valores de $b[j : k]$ están en orden ascendente

$(\forall I : j \leq I < k+1 : b[I] \leq b[I+1] \wedge (I+1 \leq k))$
$(\forall I : j \leq I < k : b[I] \leq b[I+1])$

h. Si x está en $b[j : k]$, entonces $x+1$ está en $b[k+1 : n+1]$

$(\exists I : j \leq I < k+1 : b[I] = x) \Rightarrow (\exists H : k+1 \leq H < n : b[H] = x+1)$

i. $b[j : k]$ contiene al menos dos ceros

$(\mathbf{N} I : j \leq I < k+1 : b[I] = 0) \geq 2)$

j. Si $b[1] = 3$ o $b[2] = 4$ y $b[3] = 5$ entonces $J = 3$

$(\forall j : 0 \leq j < n : ((\forall I : 1 \leq I < 2 : b[I] = 3) \vee (\forall I : 2 \leq I < 3 : b[I] = 4)) \wedge (\forall I : 3 \leq I < 4 : b[I] = 5) \Rightarrow (j = 3))$

k. El array $b[0 : n-1]$ tiene al menos dos elementos correlativos

$(\exists J : 0 \leq J < n : b[J] = b[J+1] + 1)$
$(\exists J : 0 \leq J < n : b[J] = b[J+1] - 1)$
$(\mathbf{N} I : 0 \leq I < n : b[I] = b[I+1] + 1) \geq 1$
$(\mathbf{N} I : 0 \leq I < n : b[I] = b[I+1] - 1) \geq 1$

l. En el array $b[0 : n-1]$ existe al menos un valor que es igual al siguiente

$(\exists J : 0 \leq J < n : b[J] = b[J+1])$
$(\mathbf{N} I : 0 \leq I < n : b[I] = b[I+1]) \geq 1$

Ejercicio 5 *Suponiendo los siguientes predicados auxiliares $par(x)$, $impar(x)$ y $primo(x)$, expresar como predicados las siguientes expresiones en lenguaje natural:*

a. Existe un entero par

$(\exists X \in \mathbf{Z} : par(X))$

b. Todo número entero o es par o es impar

$(\forall X \in \mathbf{Z} : par(X) \vee impar(X))$

c. Todos los números primos son no negativos

$(\forall X \in \mathbf{Z} : primo(X) \Rightarrow X \geq 0)$

d. El único número primo par es el dos

$(\exists X \in \mathbf{Z} : primo(X) \wedge par(X) \Rightarrow X = 2)$

e. No todos los enteros son pares

$\neg(\forall X \in \mathbf{Z} : par(X))$

f. No todos los primos son impares

$\neg(\forall X \in \mathbf{Z} : primo(X) \Rightarrow impar(X))$

g. Si un entero no es impar, entonces es par

$(\forall X \in \mathbf{Z} : \neg impar(X) \Rightarrow par(X))$

Ejercicio 6 *Expresar los predicados auxiliares $par(X)$, $impar(X)$ y $primo(X)$, utilizando para ello los cuantificadores necesarios.*

$par(X)$	$=$	$(\forall X \in \mathbf{Z} : par(X) \Leftrightarrow X \bmod 2 = 0)$
$impar(X)$	$=$	$(\forall X \in \mathbf{Z} : impar(X) \Leftrightarrow X \bmod 2 <> 0)$
$primo(X)$	$=$	$(\forall X \in \mathbf{Z} : primo(X) \Leftrightarrow (\forall Y \in \mathbf{Z} : Y <> X \wedge Y <> 1 \wedge X \bmod Y <> 0))$

Ejercicio 7 *En el conjunto de los números enteros, expresar en lenguaje natural los siguientes predicados:*

(a) $(\exists x \in \mathbf{Z} : x < x + 1)$
Existe al menos un entero que es menor que el siguiente

(b) $(\exists x \in \mathbf{Z} : x = 5)$
Existe al menos un entero que es igual a cinco

(c) $(\exists x \in \mathbf{Z} : x = x + 1)$
Existe al menos un entero que es igual al siguiente

(d) $(\forall x \in \mathbf{Z} : (\exists y \in \mathbf{Z} : x * y = 0))$
Dado cualquier número entero, existe otro tal que el producto de ambos es cero

(e) $(\exists x \in \mathbf{Z} : (\forall y \in \mathbf{Z} : x * y = 1))$
Puede encontrarse un número entero tal que su producto con cualquier otro número entero es uno

(f) $(\exists x \in \mathbf{Z} : (\forall y \in \mathbf{Z} : x * y = x))$
Existe al menos un número entero tal que al multiplicarlo por cualquier otro entero lo deja igual

Ejercicio 8 *Dado* $\alpha = (\forall I \in [0, n\rangle : b[I] < b[I + 1])$ *indicar cuales de las siguientes sustituciones textuales no son válidas y realizar aquellas que son válidas.*

1. $(\alpha^I_J) = \alpha$
2. $(\alpha^n_{n+1}) = (\forall I \in [0, n + 1\rangle : b[I] < b[I + 1])$
3. $(\alpha^b_c) = (\forall I \in [0, n\rangle : c[I] < c[I + 1])$
4. $(\alpha^n_{n+I}) = (\forall I \in [0, n + I\rangle : b[I] < b[I + 1]) \Rightarrow$ Sustitución no válida
5. $(\alpha^b_{b+1}) = (\forall I \in [0, n\rangle : b + 1[I] < b + 1[I + 1]) \Rightarrow$ Sustitución no válida
6. $(\alpha^{n,b}_{m,k}) = (\forall I \in [0, m\rangle : k[I] < k[I + 1])$

Ejercicio 9 *Dado* $\alpha = (n > i) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n\rangle : n/J = 0) > 1$ *indicar cuales de las siguientes sustituciones textuales no son válidas y realizar aquellas que son válidas.*

1. $(\alpha^i_J) = (n > J) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n\rangle : n/J = 0) > 1 \Rightarrow$ Sustitución no válida
2. $(\alpha^n_{m+i}) = (m + i > i) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, m + i\rangle : (m + i)/J = 0) > 1$
3. $(\alpha^J_{J+1}) = \alpha$
4. $(\alpha^i_k) = (n > k) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n\rangle : n/J = 0) > 1$
5. $(\alpha^n_{n+i})^i_t = (n + t > t) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n + t\rangle : (n + t)/J = 0) > 1$
6. $(\alpha^{n,i}_{n+i,t}) = (n + i > t) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n + i\rangle : (n + i)/J = 0) > 1$

Ejercicio 10 *(Marcar todas las respuestas correctas) Dada la expresión* $\alpha : i < 3 \vee (\forall i \in [j, m] : i > (\mathbf{N}k \in [0, m] : b[k] = j))$*:*

a) i aparece libre y ligada en α

b) $\alpha = \alpha^i_p$

c) es equivalente a $\alpha : i < 3 \vee (\forall h \in [j, m] : h > (\mathbf{N}k \in [0, m] : b[k] = j))$

d) $\alpha = \alpha^k_p$

Respuestas:

a) **Sí**. i aparece libre en $i < 3$ y ligada en el cuantificador.

b) **No**. Porque la i libre cambia por p y la expresión ya no es equivalente a α.

c) **Sí**. Siempre es posible cambiar el nombre a una variable cuantificada (en este caso la i ligada) por un nombre nuevo que no aparecía antes (en este caso la h).

d) **Sí**. Ya que al no aparecer k libre en α, la sustitución no hace nada.

Ejercicio 11 *(Marcar todas las respuestas correctas) El predicado* $0 \leq p < n \wedge (\forall i : 0 \leq i < n : b[p] \geq b[i])$*:*

a) indica que p es la posición del máximo valor de $b[0 : n - 1]$

b) contiene a la variable i libre

c) indica que el valor máximo de $b[0 : n - 1]$ es único

d) contiene a la variable p libre

Respuestas:

a) **Sí**.

b) **No**. Está ligada al cuantificador universal.

c) **No**. Sólo indica que en p hay un máximo. Podría haber más posiciones con ese mismo valor.

d) **Sí**.

Ejercicio 12 *(Marcar todas las respuestas correctas) Dados* $b[0 : n]$ *y* $c[0 : m]$*, la expresión* $(\forall k : 0 \leq k \leq n : (\exists j : 0 \leq j \leq m : c[j] = b[k]))$ *es equivalente a afirmar:*

a) todo elemento de c está en b

b) algún elemento de c está en b

c) todo elemento de b está en c

d) $\neg(\exists k : o \leq k \leq n : (\forall j : 0 \leq j \leq m : c[j] \neq b[k]))$

Respuestas:

a) **No**. k se usa para posiciones de b mientras que j para posiciones de c. Por tanto, lo que dice la fórmula es que todo valor $b[k]$ está en algún $c[j]$. Pero no lo contrario: puede haber valores en c que no están en b.

b) **No**. En efecto la fórmula original implica que b tiene al menos un elemento (como mucho $0 = k = n$) y, dado que todo elemento de b está en c, c tiene algún elemento de b. Sin embargo, el enunciado pregunta si esta afirmación es equivalente a la fórmula original y esto no es así: la respuesta propuesta tan sólo es una condición necesaria, pero no suficiente.

c) **Sí**. Ver primera respuesta.

d) **Sí**. Por definición del cuantificador universal en función del cuantificador existencial.

Ejercicio 13 *Señala el predicado que indica que todos los ceros del array* $b[0 : n]$ *están en el subarray* $b[h : k]$*:*

a) $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\exists i \in [h, k] : b[i] = 0)$

b) $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\forall i \in [h, k] : b[i] = 0)$

c) $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\forall i \in [0, h - 1] : b[i] \neq 0) \wedge (\forall i \in [k + 1, n] : b[i] \neq 0)$

d) $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\forall i \in [0, h-1] : b[i] \neq 0) \wedge (\forall i \in [k+1, n] : b[i] \neq 0) \wedge (\exists i \in [h, k] : b[i] = 0)$

Respuestas:

a) **No**. Indica que el subarray tiene un valor igual a cero, y no dice nada del resto del array.

b) **No**. Indica que el subarray tiene todos los valores a cero, y no dice nada del resto del array.

c) **Sí**. Indica que el resto del array no tiene ceros, con lo que, de haberlos, estarán en el subarray $b[h:k]$.

d) **No**. Porque en el enunciado no nos han dicho que exista al menos un cero. El array podría no contener ninguno.

Ejercicio 14 *(Marcar todas las respuestas correctas) Sea* $\alpha : (\forall i \in [j, m] : i > (\mathbf{N} j \in [0, m] : b[i] = j))$*, entonces es cierto que:*

a) j aparece libre en α

b) j no aparece ligada en α

c) es equivalente a $(\forall i \in [k, m] : i > (\mathbf{N} k \in [0, m] : b[i] = k))$

d) es equivalente a $(\forall h \in [j, m] : h > (\mathbf{N} k \in [0, m] : b[h] = k))$

Respuestas:

a) **Sí**. En el rango $[j, m]$.

b) **No**. Está ligada al cuantificador numérico.

c) **No**. Porque la j libre se ha perdido y en su lugar aparece una k libre que, en principio no guarda ninguna relación.

d) **Sí**. Hemos cambiado de nombre la i ligada por una nueva h y la j ligada (sólo la ligada) por una nueva k.