

## Tema 2: Predicados

**Ejercicio 1** *Evaluar las siguientes expresiones. El estado  $s$  en el que dichas expresiones deben ser evaluadas consiste en dos identificadores enteros  $x$  e  $y$ , un identificador booleano  $b$ , dos conjuntos de identificadores  $m$  y  $n$ , y un array de enteros  $c[1 : 3]$ . Los valores de estos identificadores son los siguientes:  $x = 7, y = 2, b = T, m = \{1, 2, 3, 4\}, n = \{2, 4, 6\}, c = (2, 4, 6)$ .*

- |  |  |
|--|--|
| (a) $x \div y = 3$<br>$= (7 \div 2 = 3) = T$   | (f) $\text{floor}(-x/y) = -3$<br>$= (\text{floor}(-3,5) = -3) = (-4 = -3) = F$                 |
| (b) $(x - 1) \div y = 3$<br>$= (6 \div 2 = 3) = T$                                     | (g) $\text{ceil}(x/y) = x \div y$<br>$= (4 = 3) = F$   |
| (c) $(x + 1) \div y = 3$<br>$= (8 \div 2 = 3) = (4 = 3) = F$                           | (h) $\min(\text{floor}(x/2), \text{ceil}(x/2)) < \text{ceil}(x/2)$<br>$= (\min(3, 4) < 4) = T$ |
| (d) $\text{ceil}(x/y) = x \div y + 1$<br>$= (4 = 3 + 1) = T$                           | (i) $b \vee x < y$<br>$= T \vee F = T$   |
| (e) $\text{floor}((x + 1)/y) = (x + 1) \div y$<br>$= (\text{floor}(4) = 8 \div 2) = T$ | (j) $19 \bmod 3$<br>$= 1$  |

**Ejercicio 2** *Evaluar las siguientes expresiones en el estado dado en el ejercicio anterior.*

- |   |   |
|---|---|
| (a) $m \cup n$<br>$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$                           | (l) $\{i \mid i \in m \wedge i \in n\}$<br>$= \{2, 4\}$ |
| (b) $m \cap n$<br>$= \{2, 4\}$                                    |   |
| (c) $x \in m \wedge b$<br>$= F$                                   |   |
| (d) $m \subset n \wedge b$<br>$= F$                               |   |
| (e) $\emptyset \subset m$<br>$= T$                                |   |
| (f) $\{i \mid i \in m \wedge \text{even}(i)\} \subset n$<br>$= T$ |   |

**Ejercicio 3** *Evaluar las siguientes expresiones en el estado dado en el ejercicio anterior. Utilizar  $U$  para representar el valor de la expresión indefinida.*

- |  |   |
|--|---|
| (a) $b \vee x/(y - 2) = 0$<br>$= U$          | (f) $x = 0 \text{ cand } x/(y - 2) = 0$<br>$= F$            |
| (b) $b \text{ cor } x/(y - 2) = 0$<br>$= T$  | (g) $1 \leq y \leq 3 \text{ cand } c[y] \in m$<br>$= T$     |
| (c) $b \wedge x/(y - 2) = 0$<br>$= U$        | (h) $1 \leq y \leq 3 \text{ cor } c[x] \in m$<br>$= T$      |
| (d) $b \text{ cand } x/(y - 2) = 0$<br>$= U$ | (i) $1 \leq y \leq 3 \text{ cand } c[y + 1] \in m$<br>$= F$ |
| (e) $x = 0 \wedge x/(y - 2) = 0$<br>$= U$    | (j) $1 \leq y \leq 3 \text{ cor } c[y] \in m$<br>$= T$      |

**Ejercicio 4** Siendo el array  $b[0 : n - 1]$  con  $n > 0$ , y  $b[j : k]$  con  $0 \leq j \leq k + 1 \leq n$ , convertir en predicados las siguientes expresiones:

a. Todos los elementos de  $b[j : k]$  son cero

$$\begin{aligned} & (\forall I : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) \\ & \neg(\exists I : j \leq I < k + 1 : b[I] \neq 0) \\ & (\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) = k - j + 1 \\ & (\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] \neq 0) = 0 \end{aligned}$$

b. Ningún valor de  $b[j : k]$  es cero

$$\begin{aligned} & (\forall I : j \leq I < k + 1 : b[I] \neq 0) \\ & (\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) = 0 \\ & \neg(\exists I : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) \\ & (\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] \neq 0) = k - j + 1 \end{aligned}$$

c. Algunos valores de  $b[j : k]$  son cero

$$\begin{aligned} & (\exists I : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) \\ & \neg(\forall I : j \leq I < k + 1 : b[I] \neq 0) \\ & (\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) > 0 \end{aligned}$$

d. Todos los ceros de  $b[0 : n - 1]$  están en  $b[j : k]$

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{NI} : 0 \leq I < j : b[I] = 0) = 0) \wedge ((\mathbf{NI} : k < I < n : b[I] = 0) = 0) \\ & (\forall I : 0 \leq I < j : b[I] \neq 0) \wedge (\forall I : k + 1 \leq I < n : b[I] \neq 0) \\ & (\forall I : 0 \leq I < n : b[I] = 0 \Rightarrow j \leq I < k + 1) \\ & (\mathbf{NI} : 0 \leq I < n : b[I] = 0) = (\mathbf{NI} : j \leq I \leq k : b[I] = 0) \\ & (\forall I : 0 \leq I < n : b[I] = 0 \Rightarrow (\exists X : j \leq X \leq k : b[X] = 0 \wedge X = I)) \end{aligned}$$

e. Algunos ceros de  $b[0 : n - 1]$  están en  $b[j : k]$

$$\begin{aligned} & (\exists I : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) \\ & (\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) > 0 \\ & \neg(\forall I : j \leq I < k + 1 : b[I] \neq 0) \end{aligned}$$

f. Si  $b[0 : n - 1]$  contiene un cero, entonces también  $b[j : k]$

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{NI} : 0 \leq I < n : b[I] = 0) = 1) \Rightarrow ((\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) = 1) \\ & ((\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) = 1) \wedge (\forall I : 0 \leq I < j : b[I] \neq 0) \wedge (\forall I : k + 1 \leq I < n : b[I] \neq 0) \end{aligned}$$

g. Los valores de  $b[j : k]$  están en orden ascendente

$$\begin{aligned} & (\forall I : j \leq I < k + 1 : b[I] \leq b[I + 1] \wedge (I + 1 \leq k)) \\ & (\forall I : j \leq I < k : b[I] \leq b[I + 1]) \end{aligned}$$

h. Si  $x$  está en  $b[j : k]$ , entonces  $x + 1$  está en  $b[k + 1 : n + 1]$

$$(\exists I : j \leq I < k + 1 : b[I] = x) \Rightarrow (\exists H : k + 1 \leq H \leq n + 1 : b[H] = x + 1)$$

i.  $b[j : k]$  contiene al menos dos ceros

$$(\mathbf{NI} : j \leq I < k + 1 : b[I] = 0) \geq 2$$

j. Si  $b[1] = 3$  o  $b[2] = 4$  y  $b[3] = 5$  entonces  $J = 3$

$$(\forall j : 0 \leq j < n : ((\forall I : 1 \leq I < 2 : b[I] = 3) \vee (\forall I : 2 \leq I < 3 : b[I] = 4)) \wedge (\forall I : 3 \leq I < 4 : b[I] = 5) \Rightarrow (j = 3))$$

k. El array  $b[0 : n - 1]$  tiene al menos dos elementos correlativos

$$\begin{aligned} &(\exists J : 0 \leq J < n : b[J] = b[J + 1] + 1) \\ &(\exists J : 0 \leq J < n : b[J] = b[J + 1] - 1) \\ &(\mathbf{NI} : 0 \leq I < n : b[I] = b[I + 1] + 1) \geq 1 \\ &(\mathbf{NI} : 0 \leq I < n : b[I] = b[I + 1] - 1) \geq 1 \end{aligned}$$

l. En el array  $b[0 : n - 1]$  existe al menos un valor que es igual al siguiente

$$\begin{aligned} &(\exists J : 0 \leq J < n : b[J] = b[J + 1]) \\ &(\mathbf{NI} : 0 \leq I < n : b[I] = b[I + 1]) \geq 1 \end{aligned}$$

**Ejercicio 5** Suponiendo los siguientes predicados auxiliares  $par(x)$ ,  $impar(x)$  y  $primo(x)$ , expresar como predicados las siguientes expresiones en lenguaje natural:

a. Existe un entero par

$$(\exists X \in \mathbf{Z} : par(X))$$

b. Todo número entero o es par o es impar

$$(\forall X \in \mathbf{Z} : par(X) \vee impar(X))$$

c. Todos los números primos son no negativos

$$(\forall X \in \mathbf{Z} : primo(X) \Rightarrow X \geq 0)$$

d. El único número primo par es el dos

$$(\exists X \in \mathbf{Z} : primo(X) \wedge par(X) \Rightarrow X = 2)$$

e. No todos los enteros son pares

$$\neg(\forall X \in \mathbf{Z} : par(X))$$

f. No todos los primos son impares

$$\neg(\forall X \in \mathbf{Z} : primo(X) \Rightarrow impar(X))$$

g. Si un entero no es impar, entonces es par

$$(\forall X \in \mathbf{Z} : \neg impar(X) \Rightarrow par(X))$$

**Ejercicio 6** Expresar los predicados auxiliares  $par(X)$ ,  $impar(X)$  y  $primo(X)$ , utilizando para ello los cuantificadores necesarios.

$$\begin{aligned}
\text{par}(X) &= (\forall X \in \mathbf{Z} : \text{par}(X) \Leftrightarrow X \bmod 2 = 0) \\
\text{impar}(X) &= (\forall X \in \mathbf{Z} : \text{impar}(X) \Leftrightarrow X \bmod 2 \neq 0) \\
\text{primo}(X) &= (\forall X \in \mathbf{Z} : \text{primo}(X) \Leftrightarrow (\forall Y \in \mathbf{Z} : Y \neq X \wedge Y \neq 1 \wedge X \bmod Y \neq 0))
\end{aligned}$$

**Ejercicio 7** En el conjunto de los números enteros, expresar en lenguaje natural los siguientes predicados:

- $(\exists x \in \mathbf{Z} : x < x + 1)$   
Existe al menos un entero que es menor que el siguiente
- $(\exists x \in \mathbf{Z} : x = 5)$   
Existe al menos un entero que es igual a cinco
- $(\exists x \in \mathbf{Z} : x = x + 1)$   
Existe al menos un entero que es igual al siguiente
- $(\forall x \in \mathbf{Z} : (\exists y \in \mathbf{Z} : x * y = 0))$   
Dado cualquier número entero, existe otro tal que el producto de ambos es cero
- $(\exists x \in \mathbf{Z} : (\forall y \in \mathbf{Z} : x * y = 1))$   
Puede encontrarse un número entero tal que su producto con cualquier otro número entero es uno
- $(\exists x \in \mathbf{Z} : (\forall y \in \mathbf{Z} : x * y = x))$   
Existe al menos un número entero tal que al multiplicarlo por cualquier otro entero lo deja igual

**Ejercicio 8** Dado  $\alpha = (\forall I \in [0, n) : b[I] < b[I + 1])$  indicar cuales de las siguientes sustituciones textuales no son válidas y realizar aquellas que son válidas.

- $(\alpha_J^I) = \alpha$
- $(\alpha_{n+1}^n) = (\forall I \in [0, n + 1) : b[I] < b[I + 1])$
- $(\alpha_c^b) = (\forall I \in [0, n) : c[I] < c[I + 1])$
- $(\alpha_{n+I}^n) = (\forall I \in [0, n + I) : b[I] < b[I + 1]) \Rightarrow$  Sustitución no válida
- $(\alpha_{b+1}^b) = (\forall I \in [0, n) : b + 1[I] < b + 1[I + 1]) \Rightarrow$  Sustitución no válida
- $(\alpha_{m,k}^{n,b}) = (\forall I \in [0, m) : k[I] < k[I + 1])$

**Ejercicio 9** Dado  $\alpha = (n > i) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n) : n/J = 0) > 1$  indicar cuales de las siguientes sustituciones textuales no son válidas y realizar aquellas que son válidas.

- $(\alpha_J^i) = (n > J) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n) : n/J = 0) > 1 \Rightarrow$  Sustitución no válida
- $(\alpha_{m+i}^n) = (m + i > i) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, m + i) : (m + i)/J = 0) > 1$
- $(\alpha_{J+1}^J) = \alpha$
- $(\alpha_k^i) = (n > k) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n) : n/J = 0) > 1$
- $(\alpha_{n+i}^n)_t^i = (n + t > t) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n + t) : (n + t)/J = 0) > 1$
- $(\alpha_{n+i,t}^{n,i}) = (n + i > t) \wedge (\mathbf{N}J \in [1, n + i) : (n + i)/J = 0) > 1$

**Ejercicio 10** (Marcar todas las respuestas correctas) Dada la expresión  $\alpha : i < 3 \vee (\forall i \in [j, m] : i > (\mathbf{N}k \in [0, m] : b[k] = j))$ :

- $i$  aparece libre y ligada en  $\alpha$
- $\alpha = \alpha_p^i$
- es equivalente a  $\alpha : i < 3 \vee (\forall h \in [j, m] : h > (\mathbf{N}k \in [0, m] : b[k] = j))$
- $\alpha = \alpha_p^k$

Respuestas:

- a) **Sí.**  $i$  aparece libre en  $i < 3$  y ligada en el cuantificador.
- b) **No.** Porque la  $i$  libre cambia por  $p$  y la expresión ya no es equivalente a  $\alpha$ .
- c) **Sí.** Siempre es posible cambiar el nombre a una variable cuantificada (en este caso la  $i$  ligada) por un nombre nuevo que no aparecía antes (en este caso la  $h$ ).
- d) **Sí.** Ya que al no aparecer  $k$  libre en  $\alpha$ , la sustitución no hace nada.

**Ejercicio 11** (Marcar todas las respuestas correctas) El predicado  $0 \leq p < n \wedge (\forall i : 0 \leq i < n : b[p] \geq b[i])$ :

- a) indica que  $p$  es la posición del máximo valor de  $b[0 : n - 1]$
- b) contiene a la variable  $i$  libre
- c) indica que el valor máximo de  $b[0 : n - 1]$  es único
- d) contiene a la variable  $p$  libre

Respuestas:

- a) **Sí.**
- b) **No.** Está ligada al cuantificador universal.
- c) **No.** Sólo indica que en  $p$  hay un máximo. Podría haber más posiciones con ese mismo valor.
- d) **Sí.**

**Ejercicio 12** (Marcar todas las respuestas correctas) Dados  $b[0 : n]$  y  $c[0 : m]$ , la expresión  $(\forall k : 0 \leq k \leq n : (\exists j : 0 \leq j \leq m : c[j] = b[k]))$  es equivalente a afirmar:

- a) todo elemento de  $c$  está en  $b$
- b) algún elemento de  $c$  está en  $b$
- c) todo elemento de  $b$  está en  $c$
- d)  $\neg(\exists k : 0 \leq k \leq n : (\forall j : 0 \leq j \leq m : c[j] \neq b[k]))$

Respuestas:

- a) **No.**  $k$  se usa para posiciones de  $b$  mientras que  $j$  para posiciones de  $c$ . Por tanto, lo que dice la fórmula es que todo valor  $b[k]$  está en algún  $c[j]$ . Pero no lo contrario: puede haber valores en  $c$  que no están en  $b$ .
- b) **No.** En efecto la fórmula original implica que  $b$  tiene al menos un elemento (como mucho  $0 = k = n$ ) y, dado que todo elemento de  $b$  está en  $c$ ,  $c$  tiene algún elemento de  $b$ . Sin embargo, el enunciado pregunta si esta afirmación es equivalente a la fórmula original y esto no es así: la respuesta propuesta tan sólo es una condición necesaria, pero no suficiente.
- c) **Sí.** Ver primera respuesta.
- d) **Sí.** Por definición del cuantificador universal en función del cuantificador existencial.

**Ejercicio 13** Señala el predicado que indica que todos los ceros del array  $b[0 : n]$  están en el subarray  $b[h : k]$ :

- a)  $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\exists i \in [h, k] : b[i] = 0)$
- b)  $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\forall i \in [h, k] : b[i] = 0)$
- c)  $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\forall i \in [0, h - 1] : b[i] \neq 0) \wedge (\forall i \in [k + 1, n] : b[i] \neq 0)$

d)  $0 \leq h \leq k \leq n \wedge (\forall i \in [0, h-1] : b[i] \neq 0) \wedge (\forall i \in [k+1, n] : b[i] \neq 0) \wedge (\exists i \in [h, k] : b[i] = 0)$

Respuestas:

- a) **No.** Indica que el subarray tiene un valor igual a cero, y no dice nada del resto del array.
- b) **No.** Indica que el subarray tiene todos los valores a cero, y no dice nada del resto del array.
- c) **Sí.** Indica que el resto del array no tiene ceros, con lo que, de haberlos, estarán en el subarray  $b[h : k]$ .
- d) **No.** Porque en el enunciado no nos han dicho que exista al menos un cero. El array podría no contener ninguno.

**Ejercicio 14** (Marcar todas las respuestas correctas) Sea  $\alpha : (\forall i \in [j, m] : i > (\mathbf{N}j \in [0, m] : b[i] = j))$ , entonces es cierto que:

- a)  $j$  aparece libre en  $\alpha$
- b)  $j$  no aparece ligada en  $\alpha$
- c) es equivalente a  $(\forall i \in [k, m] : i > (\mathbf{N}k \in [0, m] : b[i] = k))$
- d) es equivalente a  $(\forall h \in [j, m] : h > (\mathbf{N}k \in [0, m] : b[h] = k))$

Respuestas:

- a) **Sí.** En el rango  $[j, m]$ .
- b) **No.** Está ligada al cuantificador numérico.
- c) **No.** Porque la  $j$  libre se ha perdido y en su lugar aparece una  $k$  libre que, en principio no guarda ninguna relación.
- d) **Sí.** Hemos cambiado de nombre la  $i$  ligada por una nueva  $h$  y la  $j$  ligada (sólo la ligada) por una nueva  $k$ .