UNIVERSIDAD DE A CORUÑA
FACULTAD DE INFORMÁTICA
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Tecnología de la Programación

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Elena Mª Hernández Pereira
Óscar Fontenla Romero

Bloque didáctico I: Introducción
Tema 1

- Título: Cálculo proposicional
  - Nociones básicas de lógica
- Unidades de contenido
  - Evaluación de proposiciones
  - Proposiciones como conjuntos de estados
  - Leyes de Equivalencia

Tema 1: Cálculo proposicional

- Proposición: Expresión lógica o booleana
- Gramática
  - Operandos con valores T o F
  - Operadores
  - Paréntesis:
    - Orden de evaluación

Operadores		
Negación	**not** α	$\neg\ \alpha$
Conjunción	α **and** β	$\alpha \wedge \beta$
Disyunción	α **or** β	$\alpha \vee \beta$
Implicación	α **imp** β	$\alpha \Rightarrow \beta$
Igualdad	α **equals** β	$\alpha = \beta$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Partimos de un conjunto de identificadores, *ID*
  - Ej: *ID* ={x, y ,r, c}
- Proposición: Cualquiera de las expresiones
  - T, F, *p,* $\neg\ \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha = \beta$ y (α)
  - Siendo *p* un identificador y α y β proposiciones
  - Ejemplos: F, ($\neg$T), (T $\wedge$ F), ($\alpha \vee \beta$), (($\neg\ \alpha$) $\wedge$ ($\beta \Rightarrow \delta$))
  - No son: FF, TF, ($\delta \vee$ (β), λ+α
- Precedencia de operadores: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, =
  - Operadores binarios, de izquierda a derecha

Tema 1: Cálculo proposicional

- Semántica
  - Función que hace corresponder a cada proposición del lenguaje un elemento del conjunto {T, F}
- Evaluación de proposiciones constantes
  - Proposiciones sin operadores
    - T es T y F es F
  - Proposiciones con un operador
    - $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ y $(\alpha = \beta)$ siendo α y β T o F

Tema 1: Cálculo proposicional

- Proposiciones con un solo operador

α	β	$(\neg \alpha)$	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \Rightarrow \beta)$	$(\alpha = \beta)$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T

Tema 1: Cálculo proposicional

- Semántica
  - Función que hace corresponder a cada proposición del lenguaje un elemento del conjunto {T, F}
- Evaluación de proposiciones constantes
  - Proposiciones sin operadores
    - T es T y F es F
  - Proposiciones con un operador
    - $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ y $(\alpha = \beta)$ siendo α y β T o F
  - Proposiciones con más de un operador
    - Aplicar el caso anterior sustituyendo cada subproposición por su valor

Tema 1: Cálculo proposicional

- Ejemplos
  - $((T \wedge T) \Rightarrow F) = (T \Rightarrow F) = F$; $((\neg F) \vee T) = (T \vee T) = T$
- NOTAS:
  - Tablas de verdad $\Rightarrow$ Valores finitos
  - *or* dentota *or inclusivo* $\Rightarrow (T \vee T) = T$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Definición
  - Un estado *s* es una función del tipo s: $ID \rightarrow \{T, F\}$
  - se puede representar como un conjunto de pares *(id, valor)*
  - Ejemplo: si s={(a, T), (bc, F), (y1, T)} entonces s(a) = T, s(y) = F, …
- Definición
  - Una proposición α está bien definida en el estado *s* si y sólo si para todo identificador *p* en α, existe $(p, v) \in s$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Definición
  - Sea *e* una proposición bien definida en el estado *s*. El valor de *e* en *s*, es el valor obtenido al reemplazar todos los identificadores de *e* por su valor y evaluar la proposición constante resultante
- Ejemplo
  - Evaluar $s(((\neg b) \vee c))$ en el estado s={(b, T), (c, F)}
- Definición
  - Una tautología es cualquier proposición α tal que, para todo *s* en que esté bien definida, $s(\alpha) = T$
- Ejemplos
  - T, $p \vee \neg p$, $b \wedge c \wedge d \Rightarrow (d \Rightarrow b)$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Probar que α es una tautología
  - Demostrar que es cierta en todos los estados
- Probar que α no es una tautología
  - Encontrar un *contraejemplo*
- Utilidad
  - Una proposición representa un conjunto de estados, EST(p), que la hacen cierta $\quad p \rightarrow \{s \mid s(p) = T\}$
  - A partir de un conjunto de estados con identificadores asociados a T o F, se puede derivar una proposición

Tema 1: Cálculo proposicional

- Definición
  - α es más fuerte que β si $\alpha \Rightarrow \beta$, es decir $EST(\alpha) \subseteq EST(\beta)$
  - En ese caso β es más débil que α
- Una α más fuerte impone más restricciones en la combinación de valores con los que sus identificadores están asociados
  - ¿Cuál es la proposición más débil?
  - ¿ y cuál la más fuerte?

Tema 1: Cálculo proposicional

- Transformaciones de equivalencia
- Definición
  - Dos proposiciones α y β, son equivalentes si
    - tienen el mismo valor en todos los estados
    - $\alpha = \beta$ es una tautología. En este caso $\alpha = \beta$ es una equivalencia
- Leyes de equivalencia
  - Leyes conmutativas
    - $(\alpha \wedge \beta) = (\beta \wedge \alpha)$
    - $(\alpha \vee \beta) = (\beta \vee \alpha)$
    - $(\alpha = \beta) = (\beta = \alpha)$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Leyes de equivalencia
  - Leyes asociativas
    - $(\alpha \wedge (\beta \wedge \delta)) = ((\alpha \wedge \beta) \wedge \delta)$
    - $(\alpha \vee (\beta \vee \delta)) = ((\alpha \vee \beta) \vee \delta)$
  - Leyes distributivas
    - $(\alpha \vee (\beta \wedge \delta)) = ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \delta))$
    - $(\alpha \wedge (\beta \vee \delta)) = ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \delta))$
  - Leyes de De Morgan
    - $\neg (\alpha \wedge \beta) = \neg \alpha \vee \neg \beta$
    - $\neg (\alpha \vee \beta) = \neg \alpha \wedge \neg \beta$
  - Ley de la negación
    - $\neg (\neg \alpha) = \alpha$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Leyes de equivalencia
  - Ley del medio excluido
    - $\alpha \vee \neg \alpha = T$
  - Ley de contradicción
    - $\alpha \wedge \neg \alpha = F$
  - Ley de implicación
    - $(\alpha \Rightarrow \beta) = \neg \alpha \vee \beta$
  - Ley de igualdad
    - $(\alpha = \beta) = (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Leyes de equivalencia
  - Leyes de simplificación del *or*
    - $\alpha \vee \alpha = \alpha$
    - $\alpha \vee T = T$
    - $\alpha \vee F= \alpha$
    - $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha$
  - Leyes de simplificación del *and*
    - $\alpha \wedge \alpha = \alpha$
    - $\alpha \wedge T = \alpha$
    - $\alpha \wedge F = F$
    - $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha$
  - Ley de identidad
    - $\alpha = \alpha$

Tema 1: Cálculo proposicional

- Regla de sustitución uniforme
  - *Sea* $\alpha = \beta$ *una tautología y* α *subproposición de* γ*, escrita como* $\gamma(\alpha)$*, entonces* $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ es una tautología
  - Ejemplo
    - $\gamma(p) : a \wedge p$
    - $\alpha : \neg (b \vee c)$
    - $\beta : \neg b \wedge \neg c$
    - $a \wedge \neg (b \vee c) = a \wedge \neg b \wedge \neg c$
- Regla de transitividad
  - *Si* $\alpha = \beta$ *y* $\beta = \gamma$ *son tautologías entonces también lo es* $\alpha = \gamma$
  - Ejemplo $(\alpha \Rightarrow \beta) = \neg \beta \Rightarrow \neg \alpha$