UNIVERSIDAD DE A CORUÑA
FACULTAD DE INFORMÁTICA
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN

Tecnología de la Programación

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Elena Mª Hernández Pereira
Óscar Fontenla Romero

Bloque didáctico I: Introducción
Tema 2

- Título: Predicados
  - Ampliación del concepto de proposición
- Unidades de contenido
  - Extensión del rango de estado
  - Cuantificadores
  - Identificadores libres y ligados
  - Sustitución textual

Tema 2: Predicados
Sintaxis

- Generalización de una proposición:
  - Se incluyen como identificadores expresiones relacionales o aritméticas
  - Se incluyen cuantificadores: $\exists$, $\forall$, N
- Predicados: Expresiones resultantes de la generalización
  - Predicados binarios: $\geq$, $\leq$, <, >, =, $\neq$
  - Funciones binarias: +, -, *, /
  - Función unaria: -
  - Constantes: 0, 1, 2, -1, T, F
- Precedencia de operadores habitual
  - Todos tienen mayor prioridad que los operadores lógicos

Tema 2: Predicados
Semántica

- Partimos de un conjunto de valores constantes
  - Ej: Valores ={0,1,2,-1,-2,T, F, ...}
- Cada ID tiene un tipo $\Rightarrow$ Conjunto de valores a los que está asociado $\Rightarrow$ Rango
  - i : boolean **def** rango(i)={T, F}
  - i : natural **def** rango(i)={0, 1, 2, ...}
  - i : integer **def** rango(i)={..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
- Definición
  - Un estado *s*, es una función del tipo *s: ID* $\rightarrow$ *Valores*
  - Se puede representar como un conjunto de pares *(i, v)* de modo que *v* $\in$ *rango(i)*

Tema 2: Predicados
Semántica

- Ejemplo
  - rango(x) = {0, 1, 2} y: integer b: boolean
  - s={(x, 0), (y, -3), (b, F)}
- Definición
  - Una expresión atómica es cualquier expresión aritmética relacional o función (matemática) conocida, que devuelve T o F
- Definición
  - Un predicado es el resultado de reemplazar cualquier identificador por una expresión atómica en una proposición
- Ejemplos de predicados:
  - $(x \leq y \wedge (y < z)) \vee (x + y < z)$
  - $(x \leq y \wedge y < z) \vee x + y < z$

Tema 2: Predicados
Semántica

- Definición: Evaluación de un predicado
  - Sea α una función proposicional bien definida en el estado *s*, entonces $s(\alpha)$ se obtiene reemplazando todo x de α por s(x) y aplicando las operaciones predefinidas
- Ejemplo
  - Siendo s = {(x, 0), (y, -3), (b, F)} evaluar
    $s(x > y \wedge \neg b)$ $s(b \vee x+y = -3 \Rightarrow y+3 = 2 * x)$
    $s(x \neq 0 \wedge y/x = 2)$
- Problema: La expresión debería ser F pero
  - ¿Cómo se resuelve -3/0?
- Introducimos un nuevo valor: *U ("undefined")*
  - Para cualquier *k*, s(k / 0) = U
- En las tablas de operadores vistas, si un término es U, el resultado también es U

Tema 2: Predicados
Semántica

- Incorporamos dos nuevos operadores
  - cand *Conditional and*
  - cor *Conditional or*
- α cand $\beta \equiv$ si α entonces β, en otro caso F
- α cor $\beta \equiv$ si α entonces T, en otro caso β
- NOTA
  - $\alpha \equiv \beta$ representa la equivalencia, no se usará dentro de los programas
  - *cand* y *cor* no son conmutativos

Tema 2: Predicados
Semántica

α	β	α **cand** β	α **cor** β	$\alpha \equiv \beta$
F	F	F	F	T
F	U	F	U	F
F	T	F	T	F
U	F	U	U	F
U	U	U	U	T
U	T	U	U	F
T	F	F	T	F
T	U	U	T	F
T	T	T	T	T

Tema 2: Predicados
Semántica

- Leyes de equivalencia
  - Leyes asociativas
    - (α cand (β cand λ)) $\equiv$ ((α cand β) cand λ)
    - (α cor (β cor λ)) $\equiv$ ((α cor β) cor λ)
  - Leyes distributivas
    - (α cor (β cand λ)) $\equiv$ ((α cor β) cand (α cor λ))
    - (α cand (β cor λ)) $\equiv$ ((α cand β) cor (α cand λ))
  - Leyes de De Morgan
    - $\neg$(α cand β) $\equiv$ $\neg\alpha$ cor $\neg\beta$
    - $\neg$(α cor β) $\equiv$ $\neg\alpha$ cand $\neg\beta$

Tema 2: Predicados
Semántica

- Leyes de equivalencia
  - Ley del medio excluido
    - Si α está bien definida (s(α)$\neq$ U), α cor $\neg\alpha \equiv$ T
  - Ley de contradicción
    - Si α está bien definida (s(α)$\neq$ U), α cand $\neg\alpha \equiv$ F
  - Leyes de simplificación del *cor*
    - α cor $\alpha \equiv \alpha$
    - α cor T $\equiv$ T (si α está bien definida)
    - α cor F $\equiv \alpha$
    - α cor (α cand β) $\equiv \alpha$

Tema 2: Predicados
Semántica

- Leyes de equivalencia
  - Leyes de simplificación del *cand*
    - α cand $\alpha \equiv \alpha$
    - α cand T $\equiv \alpha$
    - α cand F $\equiv$ F (si α está bien definida)
    - α cand (α cor β) $\equiv \alpha$
- Es posible derivar nuevas leyes
  - Ejemplo: α cand $(\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha$ cand $\beta) \vee (\alpha$ cand $\gamma)$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Cuantificador existencial
  - Sean m, n expresiones enteras con $m \leq n$
  - $\alpha_m \vee \alpha_{m+1} \vee \dots \vee \alpha_{n-1}$ donde cada α_i es un predicado se puede expresar como

    $(\exists I: m \leq I < n: \alpha_I)$ $\qquad$ $(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha_I)$
  - Rango del identificador
    - Conjunto de valores que satisfacen $m \leq I < n$
  - I variable cuantificada
  - De forma recursiva
    - 1) $(\exists I \in [m,m\rangle: \alpha_I) = F$
    - 2) $(\exists I \in [m,k+1\rangle: \alpha_I) = (\exists I \in [m,k\rangle: \alpha_I) \vee \alpha_k$ para $k \geq m$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Cuantificador universal
  - Sean m, n expresiones enteras con $m \le n$
  - $\alpha_m \wedge \alpha_{m+1} \wedge \ \dots \wedge \ \alpha_{n-1}$ donde cada α_i es un predicado se puede expresar como

    $(\forall l: m \le l < n: \alpha_l)$ $(\forall l \in [m,n\rangle: \alpha_l)$
  - En función de $\exists$
    - $(\forall l \in [m,n\rangle: \alpha_l) = \neg(\exists l \in [m,n\rangle: \neg \alpha_l)$
    - $=\neg(\neg \alpha_m \vee \neg \alpha_{m+1} \vee \dots \vee \neg \alpha_{n-1})$
    - $= \alpha_m \wedge \alpha_{m+1} \wedge \ \dots \wedge \ \alpha_{n-1}$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Cuantificador numérico o contador
  - Cómo expresar *k* el q-ésimo menor valor que cumple α_k
  - Definimos un nuevo cuantificador:
  - $(\mathbf{N}\ l: m \le l < n: \alpha_l)$ $(\mathbf{N}\ l \in [m,n\rangle: \alpha_l)$
    - Es el número de valores de *l* que satisfacen α_l
    - Es un término numérico, no una fórmula que se pueda hacer T o F
  - Definimos $\exists$ y $\forall$ en función de **N**
    - $(\exists l \in [m, n\rangle: \alpha_l) = ((\mathbf{N}\ l \in [m,n\rangle: \alpha_l) \ge 1)$
    - $(\forall l \in [m, n\rangle: \alpha_l) = ((\mathbf{N}\ l \in [m,n\rangle: \alpha_l) = m - n)$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Algunas abreviaturas
  - Varias variables índice. Ejemplo:
    - $(\exists\ I, J: 5 \leq I, J < 7: 2*i + x \leq J) =$
    - $(\exists\ I: 5 \leq I < 7: (\exists\ J: 5 \leq J < 7: 2*i + x \leq J))$
  - Uso de intervalos
    - $[m, n\ \rangle \equiv [m, n-1] \equiv m \leq I < n$
- Usaremos
  - Mayúsculas para las variables cuantificadas
  - Minúsculas para los identificadores del programa
- Los cuantificadores no son parte del programa
- La variable cuantificada no es un identificador del programa

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Propiedades
  - Unión de rangos
  - $(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha_I) \wedge (\exists I \in [n, p\rangle: \alpha_I) = (\exists I \in [m, p\rangle: \alpha_I)$
  - $(\forall I \in [m,n\rangle: \alpha_I) \wedge (\forall I \in [n, p\rangle: \alpha_I) = (\forall I \in [m, p\rangle: \alpha_I)$
  - $(\mathbf{N}\ I \in [m,n\rangle: \alpha_I) + (\mathbf{N}\ I \in [n, p\rangle: \alpha_I) = (\mathbf{N}\ I \in [m, p\rangle: \alpha_I)$
- Leyes de equivalencia
  - Renombrar la variable cuantificada
    - $(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha) = (\exists K \in [m,n\rangle: \alpha)$
    - $(\forall I \in [m,n\rangle: \alpha) = (\forall K \in [m,n\rangle: \alpha)$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Leyes de equivalencia
  - Leyes asociativas
    - $(\forall I \in [m,n\rangle: \alpha \wedge \beta) = (\forall I \in [m,n\rangle: \alpha) \wedge (\forall I \in [m,n\rangle: \beta)$
    - $(\exists\ I \in [m,n\rangle: \alpha \vee \beta) = (\exists I \in [m,n\rangle: \alpha) \vee (\exists I \in [m,n\rangle: \beta)$
    - $(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha \Rightarrow \beta) = (\exists I \in [m,n\rangle: \alpha) \Rightarrow (\exists I \in [m,n\rangle: \beta)$
  - Leyes de De Morgan
    - $\neg(\forall I \in [m,n\rangle: \alpha) = (\exists I \in [m,n\rangle: \neg\ \alpha)$
    - $\neg(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha) = (\forall I \in [m,n\rangle: \neg\ \alpha\ )$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Leyes de equivalencia
  - Leyes de cuantificación (*β no contiene a I)*
    - $(\forall I \in [m,n\rangle: \alpha \wedge \beta) = (\forall I \in [m,n\rangle: \alpha) \wedge \beta$
    - $(\forall I \in [m,n\rangle: \alpha \vee \beta) = (\forall I \in [m,n\rangle: \alpha) \vee \beta$
    - $(\forall I \in [m,n\rangle: \beta \Rightarrow \alpha) = \beta \Rightarrow (\forall I \in [m,n\rangle: \alpha)$
    - $(\forall I \in [m,n\rangle: \alpha \Rightarrow \beta) = (\forall I \in [m,n\rangle: \alpha) \Rightarrow \beta$
    - $(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha \wedge \beta) = (\exists I \in [m,n\rangle: \alpha) \wedge \beta$
    - $(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha \vee \beta) = (\exists I \in [m,n\rangle: \alpha) \vee \beta$
    - $(\exists I \in [m,n\rangle: \beta \Rightarrow \alpha) = \beta \Rightarrow (\exists I \in [m,n\rangle: \alpha)$
    - $(\exists I \in [m,n\rangle: \alpha \Rightarrow \beta) = (\exists I \in [m,n\rangle: \alpha) \Rightarrow \beta$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Reglas de rango
  - Rango nulo
    - $(\forall I \in [m,m\rangle: \alpha) = T$
    - $(\exists I \in [m,m\rangle: \alpha) = F$
  - Rango uno
    - $(\forall I = v: \alpha) = \alpha(v)$
    - $(\exists I = v: \alpha) = \alpha(v)$
  - División de rango
    - $(\forall I \in r_1 \vee I \in r_2: \alpha) = (\forall I \in r_1: \alpha) \wedge (\forall I \in r2: \alpha)$
    - $(\exists I \in r_1 \vee I \in r_2: \alpha) = (\exists I \in r_1: \alpha) \vee (\exists I \in r2: \alpha)$
  - Expresión constante *(I no aparece en N)*
    - $(\forall I \in r: N) = N$
    - $(\exists I \in r: N) = N$

Tema 2: Predicados
Cuantificadores

- Reglas de rango
  - Anidamiento
    - $(\forall I \in r_1: (\forall J \in r_2: \alpha)) = (\forall I, J: I \in r_1 \wedge J \in r2: \alpha)$
    - $(\exists I \in r_1: (\exists J \in r_2: \alpha)) = (\exists I, J: I \in r_1 \wedge J \in r2: \alpha)$
- Otros cuantificadores
  - Sumatorio: $(\sum I \in [m, n\rangle: \alpha_I)$ definido como
    - 1. $(\sum I \in [m, m\rangle: \alpha_I) = 0$
    - 2. $(\sum I \in [m, k+1\rangle: \alpha_I) = (\sum I \in [m, k\rangle: \alpha_I) + \alpha_k$ para $k \geq m$
  - Producto: $(\prod I \in [m, n\rangle: \alpha_I)$ definido como
    - 1. $(\prod I \in [m, m\rangle: \alpha_I) = 1$
    - 2. $(\prod I \in [m, k+1\rangle: \alpha_I) = (\prod I \in [m, k\rangle: \alpha_I) * \alpha_k$ para $k \geq m$

Tema 2: Predicados
Identificadores libres y ligados

- P: $(\forall I \in [m, n\rangle: x * I > 0)$
  - Equivale a $(x > 0 \wedge m > 0) \vee (x < 0 \wedge n \leq 0)$
  - La verdad de P en s depende de x, m y n
  - Equivale a $(\forall J \in [m, n\rangle: x * J > 0)$
- Definición
  - Identificador ligado, todo aquel asociado a un cuantificador
  - Identificador libre, todo aquel asociado a una variable del programa
- Problema: Identificador libre y ligado a la vez
  - $(I > 0) \wedge (\forall I \in [m, n\rangle: x * I > 0)$
- Definición: Restricción de un identificador
  - Un identificador no puede ser libre y ligado a la vez, ni estar ligado a dos cuantificadores diferentes

Bloque didáctico I:
Introducción

Tema 2: Predicados
Identificadores libres y ligados

- Definición: *i* libre en una expresión
  - 1. *i* es libre en *i*
  - 2. *i* es libre en (α) sii lo es en α
  - 3. *i* es libre en $\otimes\alpha$ sii lo es en α ($\otimes$ *operador unario*)
  - 4. *i* es libre en $\alpha \otimes \beta$ sii lo es en α o en β ($\otimes$ *operador binario*)
  - 5. *i* es libre en $(\otimes J \in [m, n\rangle: \alpha)$ sii no es la propia *J* y además es libre en *m, n* y α ($\otimes$ *cuantificador*)

Tema 2: Predicados
Identificadores libres y ligados

- Definición: *i* ligado en una expresión
  - 1. *i* está ligado en (α) sii lo está en α
  - 2. *i* está ligado en $\otimes\alpha$ sii lo está en α (*$\otimes$ operador unario*)
  - 3. *i* está ligado en $\alpha \otimes \beta$ sii lo está en α o en β (*$\otimes$ operador binario*)
  - 4. *i* está ligado al cuantificador en $(\otimes i \in [m, n\rangle: \alpha) \Rightarrow$ ámbito del cuantificador (*$\otimes$ cuantificador*)
  - 5. *i* está ligado al cuantificador en $(\otimes J \in [m, n\rangle: \alpha)$ (aunque a otro cuantificador) si lo está en *m, n* o α

Tema 2: Predicados
Identificadores libres y ligados

- Ejemplos
  - $2 \leq m < n \wedge (\forall i \in [2, m\rangle: m/i \neq 0)$
  - $2 \leq m < n \wedge (\forall n \in [2, m\rangle: m/n \neq 0)$
  - $(\exists i \in [1, 25\rangle: 25/i = 0) \wedge (\exists i \in [1, 25\rangle: 26/i = 0)$
  - $(\exists t \in [1, 25\rangle: 25/t = 0) \wedge (\exists i \in [1, 25\rangle: 26/i = 0)$
  - $(\exists i: 1\leq i < 25: 25/i = 0 \wedge 26/i = 0)$
  - $(\forall m \in [n, n+6\rangle: (\exists i \in [2, m\rangle : m/i = 0))$
  - $(\forall m \in [n, n+6\rangle: (\exists n \in [2, n\rangle : m/n = 0))$
  - $(\exists k \in [0, n\rangle: P \wedge H_k(T)) \wedge k > 0$
  - $(\forall j \in [0, n\rangle: (\exists t \in [j+1, m\rangle : (\forall k \in [0, n\rangle: F(k,t))))$

Tema 2: Predicados
Sustitución textual

- Definición
  - α^x_e expresión obtenida tras la sustitución de todas las ocurrencias libres de *x* por *e*
    - siendo α, *e* expresiones y *x*, identificador
- Utilizada en expresiones de asignación
- Se utilizarán paréntesis donde sea necesario
- Ejemplos:
  - $(x + y)^x_z = (z + y)$
  - $(x * y)^x_{x+1} = ((x + 1) * y)$

Tema 2: Predicados
Sustitución textual

- Sea
  - α: $x < y \wedge (\exists l \in [0, n\rangle: l + x < y) \vee b$
- Realizamos las siguientes sustituciones textuales:
  - $\alpha^x_z = z < y \wedge (\exists l \in [0, n\rangle: l + z < y) \vee b$
  - $\alpha^y_{x+y} = x < x + y \wedge (\exists l \in [0, n\rangle: l + x < x + y) \vee b$
  - $(\alpha^y_{w*z})^z_{a+u} = (x < w * z \wedge (\exists l \in [0, n\rangle: l + x < w *z) \vee b)^z_{a+u}=$
  - $= x < w *(a+u) \wedge (\exists l \in [0, n\rangle: l + x < w *(a+u)\vee b$
  - $\alpha^l_k = \alpha$

Tema 2: Predicados
Sustitución textual

- Problemas que pueden surgir:
  - La expresión resultante de una sustitución debe ser una expresión bien formada $\Rightarrow$ correcta semánticamente
    - $\alpha^b_3 = x < y \wedge (\exists J \in [0, n\rangle: J + I < y) \vee 3$ *sustitución no válida*
    - $(c[i])^c_3 = 3[i]$ *sustitución no válida*
  - Las variables libres en *e* no pueden convertirse en ligadas en α^x_e. Para evitarlo se renombra la variable ligada en α
    - $\alpha^x_I = I < y \wedge (\exists I \in [0, n\rangle: I + I < y) \vee b$ *incorrecta*
    - $\alpha^x_I = I < y \wedge (\exists J \in [0, n\rangle: J + I < y) \vee b$ *correcta*

Tema 2: Predicados
Sustitución textual

- Definición Sustitución simultánea

$$\alpha^{\bar{x}}_{\bar{e}} = \alpha^{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{e_1, e_2, \ldots, e_n}$$ expresión obtenida tras la sustitución simultánea de las ocurrencias de x_i por las e_i, siendo e_i expresiones y x_i, identificadores

- Ejemplos:
  - $(x + y)^{x,y}_{3,c} = 3 + c$
  - $(x + y)^{x,y}_{y+1,c} = y + 1 + c$
  - $((x + y)^x_{y+1})^y_c = c + 1 + c$
- En general: $\alpha^{x,y}_{u,v} \neq (\alpha^x_u)^y_v$ (sustitución simple)

$$\left(\alpha^{\bar{x}}_{\bar{u}}\right)^{\bar{y}}_{\bar{v}} \neq \alpha^{\bar{x},\bar{y}}_{\bar{u},\bar{v}}$$ (sustitución simultánea)

- Restricciones:
  - No ligar variables libres en las e_i
  - La expresión resultante debe ser semánticamente correcta

Tema 2: Predicados
Sustitución textual y estados

- Recordamos
  - Sea α una función proposicional bien definida en el estado *s*, entonces *s*(α) se obtiene reemplazando todo x de α por *s(x)* y aplicando las operaciones predefinidas
- Definición:
  - *(s;x : v)* representa un estado *s'* igual que s excepto que *x* pasa a valer *v.*
    - $s - \{(x,\ldots)\} \cup (x,v)$
- Una asignación *x:=e* aplicada a *s* resultará en *(s;x:s(e))*
- Propiedades:
  - $s(\alpha^x_e) = s(\alpha^x_{s(e)})$
  - Sea s' = (s; x:s(e)), entonces $s'(\alpha) = s(\alpha^x_e)$
  - Dadas dos listas de identificadores $x_1,\ldots,x_n$ y $u_1,\ldots,u_n$ mutuamente excluyentes, se cumple que $(\alpha^{\bar{x}}_{\bar{u}})^{\bar{u}}_{\bar{x}} = \alpha$