CÁLCULO

Boletín I. Nociones básicas

1. (**FEB06**) Halla la relación entre a y b para que se verifique:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+a}{2x+b}\right)^{3x}=\pi\,.$$

2. Sea $f(x)=\arctan\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$.

3. (**FEB01**) Sea f la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1 & ,\quad \text{si } x\in(0,1)\\ ax^2+bx+1 & ,\quad \text{si } x\in[1,2)\end{cases}$$

   (a) Determina a y b para que f sea derivable en $(0,2)$.

   (b) ¿Qué condiciones deben verificar a y b para que f tenga un mínimo relativo en el punto $x=1$?

4. Demuestra que la ecuación $x+\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$ tiene al menos una raíz en $[0,\pi]$.

5. (**SEP07**) Si la recta tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ en el punto $(4,3)$ pasa por el punto $(0,2)$, calcula el valor de la función f y su derivada en el punto cuya abscisa es $x=4$.

6. (**DIC05**) Sea f dada por $f(x)=\arctan(x)$. Aproxima $f(2)$ mediante el polinomio de Taylor de segundo grado relativo a la función y centrado en $a=1$. Acota el error cometido.

7. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,\quad \text{si } x\le -1\\ (x+1)^3+2x & ,\quad \text{si } x>-1\end{cases}$$

   Averigua si es derivable en $x=-1$.

8. (**FEB99**) Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos viene relacionada con el radio mediante la ecuación:

$$v=Ar^2(r_0-r)\quad,\qquad A>0$$

   donde r_0 es el radio en estado de relajación.

   (a) Halla el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

   (b) Justifica la existencia de un mínimo. Calcúlalo.

9. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{2} & ,\quad \text{si } x<0\\ \cos x & ,\quad \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

   ¿Cuántas veces es f derivable en el punto $x=0$?

10. Con una hoja cuadrada de cartón, de lado a, se quiere hacer una caja abierta, recortando para ello cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la hoja y doblando hacia arriba las pestañas para formar los lados de la caja. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que su volumen sea máximo?

11. (**FEB08**) Obtén el valor aproximado de $\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$ en función del *seno* y el *coseno* de 1, mediante un polinomio de Taylor de segundo grado para la función $\cos\left(\sqrt{x}\right)$.

12. Un rectángulo cuya base está en el eje de abscisas tiene sus dos vértices superiores en la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es la mayor área que puede tener ese rectángulo? Indica sus dimensiones.

13. Llamamos $f(x) = \sqrt{x+1}$.

    (a) Halla el polinomio de Taylor de cuarto grado de f en $x = 0$.

    (b) Aproxima $\sqrt{1.02}$ con el polinomio de segundo grado y acota el error cometido.

14. Calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}\,.$$

15. (**JUN08**) Calcula los extremos relativos y absolutos, si existen, de la función definida en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ por $f(x) = x^2 - 2\,|x| + 2$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

    Averigua si la función derivada es continua en $x = 0$.

17. Sea la función f dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x|x|$. ¿Cuál es la clase de f?

18. (**FEB03**) Sea la función real f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - 1 \quad , & \text{si } x < 0 \\[2ex] x^3 e^{-x^2} \quad , & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

    (a) Estudia la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

    (b) Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado de la función f en un entorno de $x_0 = 1$.

    (c) Determina razonadamente los extremos absolutos de f en $[0, +\infty)$.

19. (**SEP03**)

    (a) Construye el polinomio de Taylor, p, de primer orden de la función $g(x) = \sin(x)$ centrado en el punto $x_0 = \pi/2$.

    (b) Consideramos ahora la función f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) \quad , & \text{si } x \leq \pi/2 \\ p(x) \quad , & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$$

    siendo p el polinomio construido en el apartado anterior. ¿Cuál es la clase de f en $\mathbb{R}$?

20. (**SEP03**) Halla la condición que debe cumplir λ para que el polinomio $x^4 + x^3 + \lambda x^2$ sea cóncavo en algún intervalo. Determina ese intervalo en función de λ.

21. (**DIC03**) Sea la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2 - \cos x & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

   (a) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

   (b) Determina, si existe, $f'(0)$. En caso afirmativo, razona si f es de clase uno en $\mathbb{R}$.

   (c) Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado de f en $x = -\pi$.

22. (**DIC03**) Halla el radio y la altura de una lata cilíndrica de refresco de 33 cm^3 que minimice la cantidad de material utilizado para su construcción (supón que el grosor del material empleado es uniforme en toda la lata y despreciable).

23. (**JUN04**) Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de λ para el cual f es derivable en $x = 0$.

   (b) Calcula $f''(0)$ para el valor de λ hallado en el apartado anterior.

24. (**DIC04**) Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 km y 5 km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabemos que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5 km/h. ¿A qué distancia de A debe abandonar la costa para llegar hasta B lo antes posible?

25. **Razona** la respuesta de las siguientes cuestiones:

   (a) Halla un número racional y otro irracional situados entre 3^{500} y $3^{500} + 1$.

   (b) Dibuja la gráfica de la función tangente. Dibuja una función inversa respecto a la operación composición e indica su dominio.

   (c) Consideramos la circunferencia de centro $(0, 0)$ y de radio 2. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en $x = 1$.

   (d) Construye el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3 de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en un entorno del punto $a = 1$.

   (e) Calcula la primera derivada de la función $y = \ln(\arcsin(x^2 - 1))$.

   (f) Dadas las funciones f y g, dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   ¿son continuas en el punto $x = 0$?

26. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) (**FEB04**) Los números complejos $2_{\frac{\pi}{5}}$ y $\sqrt{3}+i\sqrt{2}$ son iguales.

(b) (**FEB04**) Sea $f(x)=2^x-3$. El dominio de f^{-1} es $[-3,\infty)$.

(c) (**FEB04**) Sea f una función real de variable real tal que $f(1)=1,\ \ f'(1)=f''(1)=2,\ \ f'''(1)=0$. Entonces su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 1 es x^2.

(d) Sea $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$. Entonces:

   i. Para que f tenga un extremo relativo es necesario que $4a^2-12b=0$.

   ii. Además el punto $x=\dfrac{a}{3}$ es siempre un punto de inflexión de f.

(e) (**JUN03**) Si $P(x)=1-2(x+\pi)^2-3(x+\pi)^3$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f en $x_0=-\pi$, entonces $-\pi$ es un máximo relativo de f.

(f) (**JUN03**) La relación entre la presión P, el volumen V y la temperatura T de un gas específico viene dada por la ecuación de Van der Waals:

$$\left(P+\frac{5}{V^2}\right)(V-0.03)=9.7\,.$$

Considerando el volumen como una función de la presión P, la derivada de V en el punto $(5,1)$ vale 2.

27. (**DIC06**) Pretendemos estudiar la función f dada por:

$$f(x)=\arctan\frac{x^3}{x^4+1}$$

en el intervalo $I=[0,2]$. Dado que analizarla directamente puede ser pesado,

(a) aproxímala mediante su polinomio de Taylor, p, de orden 2 centrado en $a=1$

(b) calcula los extremos relativos y absolutos de p en I.

28. (**DIC08**) Sea la función dada por:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathrm{Dom}\,(f)\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x)=\dfrac{x^2}{e^x} \end{array}$$

(a) Calcula el dominio máximo de f, Dom (f).

(b) Calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,10]$, justificando previamente su existencia.

(c) Calcula los extremos absolutos de f en Dom (f), justificando su existencia.