CÁLCULO

Boletín II. Integración de funciones de una variable

1. (**SEP01**) Calcula el volumen que genera la curva $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ al girar alrededor del eje OX para $0 \le x \le 2$. *Solución:* ∞

2. (**FEB01**) Consideramos la circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio 2. Sea r la recta tangente a la semicircunferencia superior en $x = 1$. Calcula, mediante integración, el área limitada por r, la circunferencia y la parte positiva del eje OX. *Solución:* $A = \dfrac{18 - 2\pi\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$

3. (**FEB00**) Para construir una lámpara se hace girar la gráfica de $y = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$, con $0 \le x \le \dfrac{1}{3}$, en torno al eje OX. Calcula el área de la lámpara. *Solución:* $\pi/27$

4. (**DIC98**) Halla el área limitada por la gráfica de $f(x) = xe^{-2x}$ y el eje OX en el intervalo $(0, \infty)$. *Solución:* $1/4$

5. (**DIC98**) Halla los extremos de la función $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$, con $x > 1$. *Solución:* $F_{\min} = F(2k\pi)$; $F_{\max} = F((2k-1)\pi)$, $k \in \mathbb{N}$

6. Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Halla el volumen del cuerpo que se origina al girar alrededor del eje OX el grafo de f.

7. (**SEP98**) Sea $f(x) = x(x-a)$, $a > 0$, y V_f el volumen engendrado al girar en torno al eje OX la región del plano limitada por dicha función y las rectas $y = 0$ y $x = c$, $c \ge a > 0$. Halla c para que V_f sea igual al del cono engendrado por el triángulo de vértices $(0,0)$, $(c,0)$ y $(c, f(c))$ al girar en torno al eje OX. *Solución:* $c = 1.25a$

8. (**SEP98**) Calcula, si existe, $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\, dx$. *Solución:* 1

9. (**JUN01**) Sea la función $f(x) = \sqrt{-x \ln x}$ definida en los puntos x para los cuales $-x \ln x \ge 0$. Calcula el volumen del sólido generado al rotar todo su dominio alrededor del eje OX. *Solución:* $\pi/4$

10. Calcula:

    (a) (**FEB95**) $I_1 = \displaystyle\int \frac{(2 + \tan^2 x)\sec^2 x}{1 + \tan^3 x}\, dx$ *Solución:* $\ln|1 + \tan x| + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}} + C$

    (b) (**DIC96**) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx$

    (c) (**JUN00**) $I_3 = \displaystyle\int_1^\infty e^{-3x}\, dx$ *Solución:* $1/(3e^3)$

11. (**SEP98**) Sea $f(x) = \cos \pi x$. Calcula $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, dx$.

12. (**SEP99**) Calcula $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$. *Solución:* 2

13. (**SEP00**) Sea la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{si } x \in [0,1] \\ 1+x \quad , & \text{si } x \in (1,2]\,. \end{cases}$$

Se define $S(x_0)$ como el área limitada por la gráfica de f, el eje OX y la recta $x = x_0$ ($x_0 \in [0,2]$).

(a) Razona, sin construir la función, la continuidad de S.

(b) Obtén $S(x_0)$ para cada x_0 perteneciente al intervalo $[0,2]$.

(c) Supón que se repite el procedimiento con la función S en lugar de f, construyéndose de esta forma la función A, donde $A(x_0)$ es el área limitada por la gráfica de S, el eje OX y la recta $x = x_0$. Razona, sin construir la función, la derivabilidad de A y obtén, además, $A(x_0)$ para todo x_0 perteneciente al intervalo $[0,2]$.

14. (**SEP02**) Halla un número real a y una función continua f tales que:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \cos x - \frac{1}{2}.$$

15. (**SEP99**) Halla $f(4)$ si $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x\,\cos(\pi x)$. *Solución:* 1

16. (**JUN04**) Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(t) = \int_0^t \frac{10\,\cos x}{\sin x + \cos^2 x + 1}\,dx.$$

(a) Calcula $f(\pi)$. *Solución:* 0

(b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f en $[0,\pi]$, justificando previamente su existencia. *Solución:* $f_{\max} = f(\pi/2)$; $f_{\min} = 0 = f(\pi)$

17. Sea f una función continua en $x \in [2,4]$, de la que sabemos que $\displaystyle\min_{x\in[2,4]} f(x) = 3$ y $\displaystyle\max_{x\in[2,4]} f(x) = 6$.

(a) ¿Puede valer 15 unidades de superficie el área de la figura comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$? *Solución:* No

(b) ¿Entre qué valores puede oscilar el área anterior? *Solución:* $6 \leq A \leq 12$

18. Calcula: $\displaystyle I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

19. Calcula: $\displaystyle I_2 = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$ *Solución:* $1 - \sqrt{3}\pi/6$

20. (**JUN98**) Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$ y el eje de abscisas a la derecha de la recta $x = 0$. *Solución:* $4\sqrt{3}\pi/9$

21. (**JUN00**) ¿Qué área tiene la región limitada por el círculo $x^2+y^2=16$ que se encuentra en semiplano $x>2$? ¿Qué volumen genera dicha región del plano al girar alrededor del eje OX?

Solución: $A=4(4\pi-3\sqrt{3})/3$; $V=40\pi/3$

22. Sabiendo que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}$, prueba que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}$.

23. (**SEP03**) Calcula **por integración** el volumen de una pirámide de altura h cuya base es un cuadrado de lado ℓ. *Solución:* $\ell^2 h/3$

24. (**SEP05**) Una esfera de madera de radio $R=10$ cm se recubre de una capa de acero de 1 cm de espesor. Calcula, **mediante integración**, el volumen de acero necesario.

25. (**JUN06**) Sea la función F dada por:

$$F(x)=\int_{\pi/2}^{g(x)} f(t)\,dt$$

donde $f(t)=(1-\sin^3 t)\,e^t$ y $g(x)=\frac{\pi}{2}+e^x$.

(a) Determina los puntos críticos de F en el intervalo $[1\,,\,\ln(5\pi)]$. *Solución:* $\ln(2\pi)$; $x_2=\ln(4\pi)$

(b) Sin calcular F'', clasifica los puntos críticos y determina los extremos absolutos de F en $[1,\ln(5\pi)]$.

Solución: $F_{\min}=F(1)$; $F_{\max}=F(\ln 5\pi)$

26. (**SEP06**) Sea la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & , \quad \text{si } x\in[0,\pi] \\[2ex] \dfrac{x}{\pi-x^2} & , \quad \text{si } x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$$

(a) ¿Es f integrable en $[0,2\pi]$? Razona la respuesta.

(b) Calcula el área limitada por el grafo de f, $x=0$, $x=2\pi$ e $y=0$.

27. (**JUN07**) Halla el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por los semiejes positivos, la parábola $y=-x^2+2x+3$ y las rectas $y=2-2x/3$ y $x=3$.

Solución: $V=133\pi/5$

28. (**JUN07**) Halla el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x\,dx$. *Solución:* $-1/9$

29. (**SEP07**) Sea $f(x)=\ln x^2$, $x\in[1,e]$. Aplica el teorema del valor medio del cálculo integral, verificando previamente las hipótesis. Calcula el punto en el intervalo $[1,e]$ que satisface el teorema.

Solución: $e^{1/(e-1)}$

30. (**JUN08**) Calcula $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Solución: π

31. (**SEP08**) Halla la longitud de un arco de exponencial $y=e^x$ entre los puntos $(0,1)$ y $(1,e)$.

32. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) El área bajo el grafo de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $[-1, 1]$ es finita.

(b) (**FEB01**) La función

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3, & \text{si } x \in [1, 2] \\ \sin x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es integrable en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$.

(c) Construimos $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$. Entonces $g'(x) = 2x\,f(x^2)$.

(d) Consideramos $f(x) = 1 - x^2$ y las particiones $P = \{-5, 1, 2\}$ y $Q = \{-5, 0, 1, 2\}$. Entonces, $L(P, f) \le U(Q, f)$.

(e) Si f es integrable en $I = [7, 9]$ y $3 \le f(x) \le 9$, $\forall x \in I$, entonces $6 \le \displaystyle\int_7^9 f(x)\,dx \le 18$.

(f) (**DIC03**) Si $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\,dt$, entonces $F'(x) = 2x\sqrt{x^4 + 1}$.

(g) (**FEB04**) El área bajo el grafo de la función $f(x) = \dfrac{e^{-\ln x}}{x}$ en el intervalo $[1, \infty)$ es infinita.

33. (a) Halla el área de la figura limitada por la curva $y = \tan x$, el eje OY y la recta $y = 1$.
    (b) Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX el área del apartado anterior.

34. (**JUN06**) Para construir un depósito, se hace girar la gráfica de la función dada por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{x^2 + x + 1}}$$

alrededor del eje OX, entre las abscisas $x = 0$ y $x = 1$. Calcula el volumen del depósito.

35. (**JUN06**) Calcula, en caso de ser convergente, la integral:

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,(x^2 - 1)}$$

36. (**DIC08**) Calcula el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar, en torno al eje OX, la intersección de los círculos $x^2 + y^2 \le 16$ y $(x - 3)^2 + y^2 \le 25$.