CÁLCULO

Boletín III. Funciones reales de varias variables

1. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x^2) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

   (b) (**JUN03**) La norma del vector gradiente de la función $f(x,y) = xe^{2y-x}$ en el punto P de coordenadas $(2,1)$ es 4.

   (c) (**FEB04**) La función:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es continua en $(0,0)$.

   (d) (**FEB04**) Consideramos dos funciones genéricas:

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))^T \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v,w) & \longrightarrow & g(u,v,w) \end{array}$$

   Si llamamos $h = g \circ f$, entonces:

   $$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial x} \quad .$$

   (e) (**FEB08**) El límite de la función f, dada por

   $$f(x,y) = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{\tan(x) + \tan(y)}$$

   es uno cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

   (f) (**FEB08**) Sean f una función continua definida en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ y (x_0, y_0) un punto donde f presenta un máximo absoluto estricto en K. Si (a,b) es el único punto en K tal que las derivadas parciales de f respecto a x e y son nulas, entonces $(x_0, y_0) = (a,b)$.

   (g) (**FEB08**) Si la temperatura en los puntos (x,y) de una placa metálica viene dada por

   $$T(x,y) = 400\, e^{\frac{-x^2+y}{2}},$$

   la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en el punto $(3,5)$ es $\left(\frac{-6}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}\right)$.

2. (**DIC01**) Sea:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Halla $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) ¿Se verifica la igualdad: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Justifica la respuesta.

3. (**FEB99**) Sea la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Determina el valor de a de forma que f sea continua en el origen. *Solución:* $a = 0$

   (b) Para este valor de a, calcula $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. *Solución:* 0

   (c) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,0)$. *Solución:* $z = 0.25\pi + x - 1$

4. Sea f una función de dos variables que admite derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en todo $\mathbb{R}^2$. **Razona** la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si (x_0, y_0) es un extremo condicionado de f, entonces el hessiano de f en dicho punto es estrictamente mayor que cero.

   (b) Si la derivada parcial segunda de f respecto de x dos veces es estrictamente negativa, entonces (x_0, y_0) es un máximo relativo de f.

   (c) La función f alcanza sus valores extremos sobre cualquier círculo del plano.

5. (**FEB98**) Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = xy$ sobre la elipse $x^2 + y^2 + xy = 4$.
Solución: $f_{\max} = 4/3$; $f_{\min} = -4$

6. (**FEB01**) Sea:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2y & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Halla $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

   (b) Comprueba que las únicas derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$ que existen son las derivadas en las direcciones de los ejes coordenados.

7. La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia de P a cada uno de los puntos del plano. Halla la distancia de $P = (0,3,4)$ al plano $x + 2y + z = 5$.

8. (**SEP98**) Si se gastan x millones de euros en mano de obra e y millones de euros en equipos, la producción de una factoría será: $Q(x,y) = 50x^{2/5}y^{3/5}$ unidades. Si se dispone de un total de 150 millones de euros, halla cómo se deben distribuir entre trabajo y equipamiento para que la producción sea máxima. *Solución:* $x = 60$, $y = 90$

9. (**SEP01**) Halla los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$.
Solución: $M_r = f(-2,1)$; pto. silla: $(-1, 0.5)$ y $(0,0)$

10. Halla los extremos absolutos de $f(x,y) = -5x^2 + 5xy + 5y^2 - 30x$ sobre el rectángulo $C = \{(x,y) \,/\, 0 \leq x \leq 5,\ -2 \leq y \leq 2\}$.

11. (**JUN00**) Analiza los puntos críticos de la función $z = (x^2 - y^2)e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$, encontrando sus extremos.
Solución: pto.silla: $(0,0)$; $M_r = f(\sqrt{2},0) = f(-\sqrt{2},0)$; $m_r = f(0,\sqrt{2}) = f(0,-\sqrt{2})$

12. (**FEB00**) Calcula los extremos absolutos, si existen, de $f(x, y) = x^3 + y^3$ en el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\, -1 \leq y\}$.

13. (**FEB02**) La intensidad de luz en una habitación en la que se sitúa una lámpara de 300 W viene dada, en cada punto (x, y), por la función:

$$i(x, y) = \frac{300}{4\pi\,[(x-5)^2 + (y-2)^2 + 9]}$$

   (a) Calcula los puntos en los que la intensidad de luz es $3/\pi$. Represéntalos.

   (b) Si estamos situados en el punto de coordenadas $(0, 4)$, ¿cuál es la dirección que debemos seguir para incrementar la intensidad de luz lo máximo posible? *Solución:* $\vec{v} = (5, -2)$

   (c) Si la habitación ocupa el rectángulo $D = [0, 10] \times [0, 4]$, obtén los puntos de máxima y mínima intensidad, demostrando previamente su existencia.
   Solución: $f_{\max} = f(5, 2)$; $f_{\min} = f(0, 0) = f(0, 4) = f(10, 0) = f(10, 4)$

14. (**FEB03**) Sean el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq x^2 - 1, y \leq 2x - 0.5\}$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   (a) Dibuja el conjunto A. ¿Es compacto?

   (b) Razona si f tiene extremos absolutos sobre A y, en caso afirmativo, calcúlalos.

15. (**FEB03**) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $(0, 0)$ y tal que $g(0, 0) = 1$. Construimos la función f dada por:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\, g(x, y).$$

   Calcula:

   (a) $D_v f(0, 0), \quad v \in \mathbb{R}^2$

   (b) $\nabla f(0, 0)$.

16. (**JUN03**) Un agente de bolsa invierte 120000 EUR en acciones de dos empresas. Si la acción de la empresa A vale 30 EUR y la de la empresa B vale 10 EUR, calcula el número de acciones que debe comprar para maximizar la función $f(x, y) = 3\ln(x + 1) + \ln(y + 1)$, sabiendo que x es el número de acciones que compra de A, e y el de acciones que compra de B.

17. (**SEP03**) Dada la función de dos variables $f(x, y) = x \arctan(y/x)$, razona la existencia de plano tangente en el punto $(1, 1)$. Calcúlalo.

18. (**FEB04**) El valor de una finca triangular viene dado por:

$$\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right),$$

   donde a, b y c son las longitudes de sus lados y P es el perímetro de la finca. Calcula las longitudes de los lados de la finca triangular de mayor valor que podemos cercar con un alambre de longitud dada P. *Solución:* $a = b = c = P/3$

19. (**SEP04**) Una panadería produce dos tipos de pan. El coste de producción del primero es de 50 céntimos la unidad, vendiéndose ésta a x céntimos, con $x \in [50, 100]$. El coste de producción del segundo es de 60 céntimos la unidad, vendiéndose a y céntimos, con $y \in [60, 100]$. Sabiendo que el número de unidades que se vende en un día es $N_1 = 250(y - x)$ del primer tipo y $N_2 = 32000 + 250(x - 2y)$ del segundo tipo, calcula los precios de venta que consiguen maximizar el beneficio.
   Solución: $(x, y) = (89, 94)$

20. (**JUN04**) Consideramos la función f dada por:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \,.$$

(a) Calcula sus derivadas parciales en $(0,0)$. *Solución:* $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.25$

(b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$? Razona tu respuesta.

(c) Aproxima el valor de f en el punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ mediante el plano tangente centrado en el origen. *Solución:* $z = 0.25(x+y)$

21. (**SEP05***) Sea f la función dada por:

$$f(x,y) = 3 + x^2 + xy + y^2 \,.$$

(a) Halla $\nabla f(0,0)$. *Solución:* $(0,0)$

(b) Halla $H_f(0,0)$. ¿Puede deducirse si f presenta en $(0,0)$ un extremo relativo? Razona la respuesta. *Solución:* Mínimo relativo

22. (**FEB06**) Sean $a = (1,-1)$, $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $v = \dfrac{1}{2}(1,\sqrt{3})$. Supongamos que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^2$ y verifica:

$$f(a) = 1, \qquad D_u f(a) = \frac{4}{\sqrt{2}}, \qquad D_v f(a) = \sqrt{3} + 1 \,.$$

(a) Calcula $\nabla f(a)$. Comprueba que $\nabla f(a) = (2,2)$.

(b) Si $g(t) = f(t, \cos \pi t)$, calcula $g'(1)$. *Solución:* 2

(c) Calcula $D_w \left(g \circ f\right)(a)$, para $w = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. *Solución:* 28/5

23. (**JUN06**) Sea $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$.

(a) Escribe su matriz jacobiana en cualquier punto.

(b) Determina y clasifica sus puntos críticos.

(c) Calcula la derivada direccional de f en el punto $c = (1,2)$ según la dirección del vector $v = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

(d) Calcula el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(y,x)}{\ln|f(0, x^2+y^2)|}$$

24. (**DIC07**) Sean las funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \left(x_1^2 x_2 \,,\, x_1 + x_2 \,,\, x_1 x_2\right) \\ g(y_1,y_2,y_3) &= \left(y_1 y_2^2 \,,\, y_2 y_3 \,,\, e^{y_1 y_2 y_3} \,,\, y_1 + y_2 + y_3\right) \,. \end{aligned}$$

Calcula la matriz jacobiana de la función compuesta $h = g \circ f$ en el punto $(1,1)$.