CÁLCULO

Boletín IV. Ecuaciones diferenciales

1. Resuelve los problemas de valores iniciales:

   (a) (**DIC01**) $\begin{cases} (5-x)\sqrt{3-x}\,dz = dx \\ z(3) = -1 \end{cases}$ *Solución:* $z = -\left(1+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{3-x}{2}}\right)$

   (b) (**DIC98**) $\begin{cases} xy' - 3y = x^5 \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ *Solución:* $y(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^5$

   (c) (**JUN01**) $\begin{cases} y' = \dfrac{x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ *Solución:* $y = x\arcsin\left(\ln|xe^{k\pi}|\right)$

   (d) (**SEP01**) $\begin{cases} y' + y\cos x = \sin x\,\cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *Solución:* $y = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$

   (e) (**FEB99**) $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ *Solución:* $y = x\,\tan\left(\ln\sqrt{x^2+y^2} + k\pi\right)$

   (f) (**SEP98**) $\begin{cases} y' + y = \sin x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ *Solución:* $y(x) = 0.5(e^{\pi - x} + \sin x - \cos x)$

   (g) $\begin{cases} e^{-\cos x}\left(y' + y\,\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = 5 \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$ *Solución:* $y = (1 - 5e^{\cos x})/\sin x$

   (h) $\begin{cases} (3x^2 + y^3e^y)\,dx + (3xy^2e^y + xy^3e^y + 3y^2)\,dy = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$ *Solución:* $x^3 + xy^3e^y + y^3 = 8$

2. (**SEP03**) Un método para resolver la ecuación diferencial (llamada ecuación logística):

$$\frac{dP}{dt} = KP\left(1 - \frac{P}{L}\right) \quad ,$$

   donde K y L son constantes, es realizar el cambio de variable $P = 1/u$ y resolverla después.

   (a) Reescribe la ecuación diferencial logística en términos de u y de t, y resuélvela.

   (b) Usa el resultado obtenido en el apartado anterior para encontrar la solución P como función de t. *Solución:* $P(t) = Le^{Kt}/(e^{Kt} - C)$

3. (**FEB00**) Resuelve la ecuación $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$; $y''(0) = 8$. *Solución:* $y = 0.5e^{3x} - (2x + 0.5)\,e^{-x}$

4. (**JUN05**) Calcula la solución general de la ecuación diferencial $y''' + y' = 5x$.

   Solución: $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \dfrac{5}{2}x^2$

5. (**SEP08**) Resuelve la ecuación diferencial $y'' + y = 4x + 10\sin x$ verificando $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$.

   Solución: $y(x) = 7\sin x + (9\pi - 5x)\cos x + 4x$

6. (**FEB03**) Calcula la solución general de la ecuación diferencial: $y''' - y'' - 2y' = 4\sin 2x + 2e^{-x}$.

Solución: $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + (\sin 2x + 3\cos 2x)/10 + 2xe^{-x}/3$

7. Cuando se disuelve azúcar en agua, la cantidad A que permanece sin disolver después de t minutos satisface la ecuación $\frac{dA}{dt} = -KA$, donde $K > 0$. Si el 25% se disuelve después de un minuto, ¿cuánto tiempo hace falta para que se disuelva la mitad? *Solución:* $t \approx 2.41$ min

8. Un circuito RL tiene una f.e.m. $e(t) = 4\sin(t)$ voltios, una resistencia de 100Ω y una bobina de 4 Henrios. Sabiendo que no tiene corriente inicial, hallar la intensidad de corriente en cada instante. *Solución:* $i(t) = \left[e^{-25t} + 25\sin t - \cos t\right]/626$

9. Según la ley de Newton, el enfriamiento de un cuerpo en una corriente de aire es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el aire. Si la temperatura del aire es de 30^oC y el cuerpo pasa de 100^oC a 70^oC en 15 min, determinar al cabo de cuánto tiempo estará a 40^oC. *Solución:* $t = 52.16$ min

10. Se disuelven inicialmente 50 kg de sal en un gran tanque que contiene 300 l de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 l/min, y luego la solución mezclada se bombea fuera del tanque también a razón de 3 l/min.

    (a) Si la concentración de la solución que entra es de $\frac{1}{3}$ kg/l, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante dado. *Solución:* $y(t) = 100 - 50e^{-0.01t}$ kg

    (b) Calcular la cantidad de sal que hay después de 50 min. *Solución:* 69.67 kg

    (c) Calcular la cantidad de sal que hay en el tanque después de un tiempo suficientemente largo. *Solución:* 100 kg

11. (**FEB04**) Colgamos una masa m de uno de los dos extremos de un muelle y al aplicar una fuerza $f(t)$ la ecuación que describe el desplazamiento $x(t)$ en el instante t es:

$$x'' + 2x' + x = f(t)\ .$$

    (a) Resuelve la ecuación diferencial para $f(t) = 0$ y las condiciones iniciales $\{x(0) = 1, x'(0) = 1\}$. Calcula $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

    (b) Resuelve la ecuación diferencial para la fuerza $f(t) = 5t$, con las condiciones iniciales del apartado anterior. *Solución:* $x(t) = (11 + 7t)e^{-t} + 5(t - 2)$

12. (**JUN03**) En cierto país bárbaro, dos tribus vecinas se han odiado mutuamente desde tiempo inmemorial. Sus poderes son fuertes y una maldición solemne pronunciada por el hechicero de la primera tribu vuelve locos a los miembros de la segunda, conduciéndoles al asesinato y al suicidio.
Si la variación de población por unidad de tiempo de la segunda tribu es $-\sqrt{P}$ personas por semana, y si su población cuando se profiere la maldición es de 676 personas, ¿cuánto tiempo tardará en extinguirse la segunda tribu? *Solución:* 52 semanas

13. (**FEB06**) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{3x}{1-x^2}y = (x-1)(1-x^2) \\ y(0) = 1\ . \end{cases}$$

14. (**DIC07**) Encuentra la solución general de la ecuación diferencial: $y'' - y = (2 - 4x)e^{-x} + 10\cos(2x)$.

Solución: $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + x^2e^{-x} - 2\cos(2x)$