Se dispone de un bus de 4 servidores que contienen mensajes. Cada segundo, los servidores pueden enviar mensajes a los servidores adyacentes, al de la derecha con probabilidad 0.5 y al de la izquierda con probabilidad 0.3. Debido a la sobrecarga, parte de los mensajes no son enviados y permanecen en la cola de envios hasta que llegue su turno. El vector $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^4, x_4^k)^t$ expresa la distribución de mensajes entre los servidores en el tiempo k.

1. Construye la matriz $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}^k$.

2. Obtén la factorización $\mathbf{LU}$ de $\mathbf{A}$.

x_i^{k+1} = probabilidad de que en el instante $k+1$ haya un mensaje en s_i

Th. de las probabilidades totales:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)$$

Primer servidor (s_1):

$$x_1^{k+1} = x_1^k\, P(\text{se quede en } s_1/\text{si ya está en } s_1)$$

$$+ x_2^k\, P(\text{vaya a } s_1/\text{si está en } s_2)$$

$$= x_1^k\, 0.5 + \mathbf{x}_2^k\, 0.3$$

Primera ecuación:

$$x_1^{k+1} = x_1^k\, 0.5 + x_2^k\, 0.3$$

x_2^{k+1} = probabilidad de que en el instante $k+1$ haya un mensaje en s_2

Segundo servidor (s_2):

$$
\begin{aligned}
x_2^{k+1} = {} & x_1^k \, P(\text{venga de } s_1/\text{si estaba en } s_1) \\
& + x_2^k \, P(\text{se quede en } s_2/\text{si ya está en } s_2) \\
& + x_3^k \, P(\text{vaya a } s_2/\text{si está en } s_3) \\
= {} & x_1^k \, 0.5 + x_2^k \, 0.2 + x_3^k \, 0.3
\end{aligned}
$$

Segunda ecuación:

$$x_2^{k+1} = x_1^k \, 0.5 + x_2^k \, 0.2 + x_3^k \, 0.3$$

Tercer servidor (s_3):

Tercera ecuación:

$$x_3^{k+1} = x_2^k\, 0.5 + x_3^k\, 0.2 + x_4^k\, 0.3$$

Cuarto servidor (s_4):

P(no transmitir desde s_4)=1-P(transmitir a s_3)

Cuarta ecuación:

$$x_4^{k+1} = x_3^k\, 0.5 + x_4^k\, 0.7$$

$$x_1^{k+1} = x_1^k\,0.5 + x_2^k\,0.3$$

$$x_2^{k+1} = x_1^k\,0.5 + x_2^k\,0.2 + x_3^k\,0.3$$

$$x_3^{k+1} = x_2^k\,0.5 + x_3^k\,0.2 + x_4^k\,0.3$$

$$x_4^{k+1} = x_3^k\,0.5 + x_4^k\,0.7$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+1}$$

con

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} = \mathbf{LU}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{104}{170} \end{pmatrix}$$

Supuesto que partimos del mismo número de mensajes en cada servidor (un 25% en cada uno de ellos) entonces, en el instante siguiente, la proporción de mensajes en cada uno de los cuatro servidores es:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que, obviamente, la suma de las componentes del vector resultante es 1.

Si, en un instante dado, el 30% de los mensajes está en el servidor 1, el 60% en s_2 y el 10% restante en s_3 entonces, en el instante siguiente, la proporción de mensajes en cada servidor viene dado por

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 \\ 0.30 \\ 0.32 \\ 0.05 \end{pmatrix}.$$

¿Es posible obtener (en algún instante distinto del inicial) el mismo número de mensajes en cada servidor?

Durante los últimos años el n$^{\text{o}}$ de visitas a una determinada web verifica la siguiente relación: la suma del número de usuarios de un determinado año y la mitad del número de usuarios del año anterior es igual al número de usuarios del año siguiente. Supongamos que iniciamente han visitado la web 10.000 usuarios. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones lineales para hallar los usuarios de los tres años siguientes, sabiendo que sólo en el quinto año el número de visitas ha multiplicado por 5 las del año inicial. Aprovecha el hecho de que la matriz es tridiagonal.

Generaliza la situación anterior para calcular el número de usuarios de n años consecutivos, suponiendo que sólo durante el $(n+1)-$ésimo año el número de usuarios multiplica por $n+1$ las visitas realizadas en el primer año. Expresa matricialmente el sistema de tamaño $(n-1)\times(n-1)$.