PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1.-) Una compañía armamentística americana desea proyectar la fabricación de un cohete antitanque casero para vender en supermercados. La Compañía ha considerado 3 modelos y su departamento de producción ha elaborado la siguiente tabla:

	modelo		
	A	B	C
Trabajo (horas por unidad)	7	3	6
Material (titanio Por unidad)	4	4	5
Beneficios (por unidad fabricada)	40$	20$	30$

El suministro de material se restringe a 200 kg de titanio por día, y la disponibilidad total diaria de los trabajadores es de 150 horas. Formular un problema de programación lineal para determinar la producción diaria de cada modelo, en orden a maximizar el beneficio total.

2.-) El gobierno provisional ha decidido repartir cereales en los colegios iraquíes a la hora de la merienda. Los niños podrán tomar Cereales "A" o Cereales "B", o bien una mezcla de ambos. Por recomendación de la ONU, los niños deben recibir en su desayuno, cuando menos, 1 miligramo de tiamina, 5 miligramos de miacina y 400 calorías. Una unidad (100 gramos) de cereales "A" tiene 0.10 mg de tiamina, 1 mg de miacina y 110 calorías, mientras que una unidad de cereales "B" tiene 0.25 mg de tiamina, 0.25 de miacina y 120 calorías. La unidad de cereales "A" cuesta 180 centavos de dólar y la de cereales "B" 234 centavos de dólar. Formular un problema de programación lineal que sirva para establecer la dieta óptima más barata.

3.-) El administrador de un club de carretera ha elaborado una lista de necesidad de camareras para su establecimiento cada 24 horas

Periodo	Horas	Numero mínimo de camareras
1	6 a 10	60
2	10 a 14	70
3	14 a 18	60
4	1 8 a 22	50
5	22 a 2	20
6	2 a 6	30

El administrador ha acordado con las camareras que éstas comiencen a trabajar al principio de cada periodo y trabajen 8 horas seguidas. El administrador quiere determinar el número mínimo de camareras que sea suficiente para la atención correcta del establecimiento.

Formular un modelo de programación lineal para este caso.

4.-) Una organización terrorista da trabajo a 1000 personas. En una semana, cada uno de ellos puede producir 2 barriles de sustancias químicas "mantrax" para enviar a países del eje del mal, o bien transformar un barril en otro de un arma de destrucción masiva "agente amarillo" (tras mezclado de sustancias indicadas por un químico español aburrido de no cobrar un duro como becario), <u>pero no ambas cosas a la vez.</u> Actualmente, la fábrica tiene un amplio surtido de materia prima porque se la envió Irak poco antes de la invasión. Después de <u>tres semanas de producción</u>, los barriles de "mantrax" se venden a 20$ unidad y los barriles de "agente amarillo" a 75 por unidad.

Plantear un problema de programación- lineal que nos sirva para calcular <u>cuántos terroristas deben dedicarse a la fabricación de cada producto durante cada semana</u>, en orden a obtener el máximo beneficio (supóngase que un barril de mantrax puede convertirse en agente amarillo tan sólo a la semana siguiente de su fabricación).

5.-) Para la fabricación de dos herramientas de defensa personal A y B son necesarias 2 operaciones. Cada unidad de la herramienta A requiere de 2 horas de la operación 1 y 3 horas de la operación 2. Cada unidad de la herramienta B requiere de 3 horas de la operación 1 y 4 horas de la operación 2. La operación 1 puede desarrollarse durante 16 horas y la 2 durante 24 horas.

Al fabricar la herramienta B también se produce un polvillo mata-suegras sin coste adicional, pero sólo una parte puede venderse con provecho en sobres en quioscos; el resto debe destruirse. Se obtienen 2 sobres del polvillo C por cada herramienta B fabricada, y sólo se podrán vender 5 sobres de C para que la policía no sospeche y clausure la fábrica

La ganancia de la herramienta A es de 4 euros por unidad y la de B es de 10 euros. por unidad. El producto C, si se vende proporciona una ganancia de 3 euros/unidad, pero si se destruye su coste es de 2 euros/unidad.

Plantear un problema de p.l.. de manera que se maximicen las ganancias.

6.-) Una tienda de máquinas tiene un taladro a presión y 5 máquinas moledoras, las cuales son utilizadas para producir un destornillador-navaja que consta de dos piezas A(destornillador) y B (navaja). La productividad de cada máquina para las dos piezas viene dada por:

Tiempo de producción en minutos por pieza

	TALADRO	MOLEDORA
PIEZA A	3	20
PIEZA B	5	15

Se desea mantener un equilibrio entre todas las máquinas de lal forma que ninguna máquina trabaje 30 minutos por día más que otra (se supone que la carga de trabajo de cada moledora es la media de las 5 máquinas). Plantear un problema de programación lineal para obtener el número máximo de herramientas completas en 8 horas diarias de trabajo.

7.-) Un alumno de Quinto de Ingeniería Informática al que sólo le queda Álgebra y Estadística para licenciarse, y que sólo dispone de 30 días para prepararlas, recibe de su padre la siguiente proposición:

Por cada asignatura **que apruebe** le premiará de la siguiente forma:

. Por cada punto que saque en Álgebra le dará 900 euros.

. Por cada punto que saque en Estadística le dará 500 euros.

Al alumno le ha salido un curre como striper por el que le pagan a 15 euros la hora, y no puede hacer más de 200 horas al mes sin que su abuela (católica ferviente desde que nació) se entere y lo desherede. El alumno piensa que:

. Tiene que dormir necesariamente 8 horas diarias.

. Va a dedicar, sin excusa alguna, 100 horas en chats y hackeos a los ordenadores de varios alumnos pelotas que han subido el nivel de estudios ese año.

Sabe que para cada punto de álgebra necesitará 30 horas de estudio, y de Estadística 20 horas.

¿Cómo distribuirá su tiempo para obtener máximo beneficio económico, si no está realmente obligado a aprobar, puesto que un arreglo con un Vicedecano (al que pagaría 600 euros) le permite obtener el título igual ¿Cuánto dinero le queda una vez transcurridos estos 30 dias tan apurados?

Nota: El padre le paga por la nota que saque, pero solo si aprueba. Se aprueba con nota mayor o igual a 5. El problema es más difícil de plantear de lo habitual, pero fácil de resolver.

8.-) Utilizando el método del simplex resolver:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \; & Z = x1 + 3x2 \\ \text{sujeto a } \; & x1 \le 5 \\ & x1 + 2x2 \le 10 \\ & x2 \le 4 \\ & x1, x2 \ge 0 \end{aligned}$$

Dibujar la región factible. Seguir gráficamente los pasos del método del simples, interpretando el cambio de una solución factible básica a la siguiente en dicha región factible.

9.-) Sean Y^1, Y^2 2 soluciones óptimas de un p.p.l en forma estándar.

$$\begin{aligned} \text{Max (o Min) } & Z = CX \\ & AX = b \\ & X \ge 0 \end{aligned}$$

Demostrar que cualquier vector de la forma $Y=a_1 Y^1+a_2Y^2$ con $a_1+a_2=1$, $a_1,a_2\ge 0$ es también una solución óptima.

Generalización.- demostrar que, si en vez de tener 2 soluciones óptimas se tienen n, el vector $Y= a_1 Y^1+\ldots+a_nY^n$ con $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, $a_1,a_2,\ldots,a_n\ge 0$ es también una solución óptima.

10.-) Resolver el siguiente problema utilizando el método de las penalizaciones:

MINIMIZAR $Z = 2X1 - X2 + 2X3$

SUJETO A $\quad -X1 + X2 + X3 = 4$

$- X1 + X2 - X3 \le 6$

$X1 \le 0$, $X2 \ge 0$, X3 cualquier signo

11.-) Obtener tres soluciones óptimas del siguiente problema:

Minimizar Z = 3X1+ X2+ X3 + X4
sujeto a - 2X1 + 2X2 + X3= 4
3X1 + X2+ X4 = 6
$Xi \ge 0$

12.-) Se ha resuelto un problema de programación lineal y se ha obtenido solución óptima múltiple. Se tiene que $Y^1 = (2,3,0)$, $y^2 = (3,1,1)$ Y $y^3 = (1,2,2)$ son tres soluciones óptimas. ¿Puede saberse si $y^4 = (2,2,1)$ es también una solución óptima? Justifíquese la respuesta.

PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL AVANZADA.

1.-) Dado MINIMIZAR Z = 2x1 - x2 + 3x3

Sujeto a

X1 -2x3 ≥ 6
2x1 - x2 + 2x3 ≥ -2
x1,x3 ≥ 0, x2 cualquier signo

a) Escribir el problema dual y resolverlo gráficamente.
b) A partir de la solución dual calcular la del primal utilizando las condiciones de holguras complementarias.

2.-) La tabla óptima de un p.p.1. de maximización con 3 restricciones del tipo ≤ y 2 incógnitas (x1 ,x2) es

Base	Xl	x2	x3	x4	Xs	Constantes
x3	0	0	1	1	-1	2
x2	0	1	0	1	0	6
x1	1	0	0	-1	1	2
$\bar{C}_j$	0	0	0	-3	-2	

Donde x3,x4,x5 son variables de holgura. Calcular el valor óptimo de la función del objetivo de 2 formas diferentes.

3.-) Sabiendo que los 2 siguientes sistemas de restricciones

i) $2x1+x2+4x3 \leq 10$, $3x1+2x2-x3 \geq 1$, $2x1-x2+x3 \leq 5$; $xi \geq 0$

ii) $4y1+y2+y3 \geq 5$, $-2y1+3y2-2y3 \leq 1$, $-y1+2y2+y3 \leq 1$, $yi \geq 0$

son los conjuntos de restricciones de un problema de p.l. y de su dual, respectivamente (las restricciones no están ordenadas), determinar cuáles de las siguientes parejas de soluciones dadas por las ternas (x1,x2,x3) e (y1,y2,y3) pueden ser soluciones óptimas de los correspondientes p.p.l, justificando la respuesta.

a) (1,1,1) y (1,1,0)
b) (1,0,2) y (1,1,0)
c) (1,0,2) y (0,2,1)
d) (1,2,0) y (0,2,1)

4-) Dado el p.p.l

Max Z= 15x1 + 25x2 + 10x3
Sujeto a

$-6x2+3x3 \geq 12$

$3x1+12x2+6x3=30$

$xi \geq 0$

a) resolver el problema dual gráficamente
b) a partir de la solución óptima del problema dual, calcular la solución óptima del primal utilizando las condiciones de holgura complementarias

5.-) Comprobar, utilizando el método del simplex dual, que el siguiente problema no tiene solución:

MAXIMIZAR Z= -4X1 – 3X2
Sujeto a
X1 + x2 <=1;
-x2 <=-1;
-x1+2x2<=1;
x1,x2>=0

Resolver el siguiente p.p.l., utilizando el método dual del simplex:

Min Z =40x1+36x2

Sujeto a x1<=8

X2 <=10

5x1+3x2>=45

x1,x2 >=0 y enteros

6.-) Considérese el problema

maximizar Z= 5x1 – 6x2 –6x3
sujeto a
x1+5x2 + 2x3 <= b1
x1 – x2 - x3 <= b2
xi>=0

para unos valores específicos de b1 y b2 la solución óptima es:

Base	X1	X2	X3	X4	X5	ctes
X1	1	b	-1	0	1	30
X4	0	c	3	1	-1	10
cj	0	a	-1	d	e	Z=150

Calcular

a) Los valores de b1 y b2 que proporcionan la solución óptima especificada
b) los valores de a, b y c en la tabla óptima
c) si se requiriera aumentar Z_0 óptimo, ¿debería aumentarse b1 ó b2 y en cuánto?
d) Supongamos que la función objetivo del problema anterior se cambia a minimizar, esto es, queda Min Z=5x1 – 6x2 –6x3. Obtener la nueva solución óptima y el nuevo Z óptimo a partir de la solución óptima inicial, sin resolver el problema otra vez

7.-) Una banda de "querubines del purgatorio" posee un laboratorio clandestino en el que fabrican 3 tipos diferentes de droga: "Peleona" (P), "Juliana" (J) y "Marijuana" (M). Para la fabricación son necesarios, además de pastillas sedantes, pegamento y caldo avecrem –para los cuales no hay limitación de disponibilidad-, crack y cocaína, que limitan la cantidad diaria de producción. La siguiente tabla nos da la cantidad necesaria de estos 2 últimos recursos para producir 1 kg de cada una de las distintas drogas, los kg disponibles de cada recurso, y el beneficio por kg de droga producida

	P	J	M	disponibilidad
Crack	2	1	2	30
Cocaína	1	2	2	45
Beneficio (en millones de euros)	4	7	3	

El jefe de la banda es un experto en IO, y calcula la producción óptima mediante la programación lineal. Obtiene que, como más dinero ganarán será fabricando 5 kg de droga P, 20 de J y no fabricando la M.

Responder:

a) ¿Por qué no sale rentable fabricar la droga Marijuana? ¿Qué debería ocurrir para que sí se fabricase?
b) Resulta que, por cada kg de crack que sobre, hay un millonario colgado que se lo compra, pagándolo a 2 millones el kg. ¿Sigue siendo la solución inicial la óptima?
c) La policía ha incautado en el puerto un alijo de crack procedente de Nueva Zelanda. Un policía corrupto le vende a la banda 6 kg a cambio de 5 millones. ¿Les compensa comprárselos?
d) Un robo salvaje a una banda rival les proporciona nada menos que 63 kg más de crack. Lógicamente, ahora la solución inicial no puede seguir siendo la óptima. Calcular la nueva.
e) Gracias a una nueva formula robada en el Monsergas, no es necesario utilizar cocaína para fabricar la droga M.¿Cuánto dinero ganará la banda con esta nueva fórmula?
f) Se introduce en el plan de producción la posibilidad de añadir tomate, de forma que la fabricación de 1 kg de droga P requiere 3 kg de tomate, 1 kg de J requiere 1 kg de tomate, y 1 kg de M requiere también 1 kg de tomate. Se tienen 30 kg de tomate. ¿Cómo varía la solución óptima? Si es el caso, calcular la nueva
g) A la chorba del jefe se le ocurre fabricar un nuevo tipo de droga que coloque más rapidamente (Veloz), que requiere 1 kg de crack y 1 kg de cocaína por kg fabricado, y supone que les reportará 5 millones de euros por kg. Ella dice que la fabricación de esta droga les hará ganar más dinero. ¿Es cierto lo que piensan los de la banda acerca de que el jefe es un calzonazos, y que su novia está equivocada? ¿Cuánto ganan o pierden con esta idea?

8.-) Una empresa fabrica los productos A, B y C, para lo que son necesarios recursos de trabajo y material. Se quiere determinar la producción que maximiza la ganancia. Para ello se plantea el siguiente p.p.l.

Maximizar $Z= 3x1 + x2 + 5x3$

Sujeto a

$6x1 + 3x2 + 5x3 <= 45$ (trabajo)

$3x1 + 4x2 + 5x3 <= 30$ (material)

$xi>=0$

y se obtiene la siguiente solución óptima $x1=5$, $x3=3$, $x2=0$.
Utilizando el análisis de sensibilidad, responder a las siguientes cuestiones

a) calcular el campo de variación de c1 que mantiene esta solución óptima, y calcular la solución óptima para c1=2
b) disponemos de 6 unidades adicionales de material a un coste de 10 (en total). ¿Es rentable adquirirlas?
c) Encontrar la solución óptima cuando el material disponible es de 60 unidades.
d) Si el material que se necesita para el producto B fuese de 2 unidades, ¿afectaría a la solución óptima?
e) Se añade al problema una condición de control $2x1+x2+3x3<=20$. ¿Cómo afecta esto a las soluciones primal y dual?

9.-) La siguiente tabla da una solución óptima a un p.p.l estándar donde suponemos que x4 y x5 forman la base inicial (son variables de holgura)

Base	X1	X2	X3	X4	X5	ctes
X1	1	0	-1	3	-1	1
X2	0	1	2	-1	1	2
cj	0	0	-3	-3	-1	

a) calcular el campo de variación de λ para que la solución actual siga siendo óptima si el vector original b de constantes de la derecha es reemplazado por $b+\lambda b^*$, con $b^*=(1,-1)$. Encontrar la solución óptima para $\lambda=1/2$
b) calcular la solución óptima si se añade la nueva restricción x1 + x3>=2 al problema original.
c) calcular los precios sombra de las restricciones.

10.-) Dado el p.p.l. paramétrico siguiente

Maximizar $Z = (4-\lambda)x1 + (3-2\lambda)x2 + (6-\lambda)x3$

Sujeto a

3x1 + x2 + 3x3 <=30

2x1 + 2x2 + 3x3 <= 40

xi>=0

calcular la solución óptima y el valor de λ que daría un beneficio óptimo de 62.

11.-) Resolver el siguiente p.p.l. entera, usando el algoritmo de ramificación y acotación

Min Z =10x1+9x2

Sujeto a x1<=8

X2 <=10

5x1+3x2>=45

x1,x2 >=0 y enteros

PROBLEMAS DE TRANSPORTE

1.-) Una compañía de conservas tiene 2 plantas de producción. Tres cultivadores le surten de fruta fresca en las siguientes cantidades

Felipe: 200 toneladas a 10.000 unidad

Carrascal: 300 toneladas a 9000 unidad

Andrés: 400 toneladas a 8000 unidad

Los costes de transporte en miles de euros por tonelada son

	Hacia	
Desde	Planta A	Planta B
Felipe	2	2.5
Carrascal	1	1.5
Andrés	5	3

Las capacidades de las plantas y los costes de producción son:

Planta A: Capacidad 450 toneladas a 25000 euros la tonelada
Planta B: Capacidad 550 toneladas a 20000 euros la tonelada

La fruta en conserva se vende a 50000 la tonelada. La compañía puede vender a este precio todo lo que produce. ¿Qué cantidad se deberá enviar desde cada cultivador a cada planta de manera que la compañía obtenga el máximo beneficio?

Plantearlo como un problema de transporte y resolverlo.

2.-) Se pretende distribuir a los estudiantes de tres barrios de una ciudad (A,B,C) entre 4 colegios (E,O,N,S). Hay 50 estudiantes en cada barrio y los colegios admiten 20,40,30 y 60 estudiantes, respectivamente. El coste de tranporte en autobús viene dado en la siguiente tabla

COLEGIOS					
BARRIOS		E	O	N	S
	A	7	6	5	4
	B	9	7	3	6
	C	8	8	7	3

La delegación de educación desea planificar la distribución de los estudiantes minimizando el coste del transporte.

a) calcular la solución óptima a partir de una solución inicial calculada por el método del coste mínimo.
b) Debido a un rodeo que hay que dar por obras para llegar a la escuela E, el coste del transporte desde cada barrio hasta dicha escuela se incrementa una unidad. Explicar cómo modificará este hecho la solución óptima obtenida en el apartado anterior.

3.-) Desde 3 pantanos se envía agua a 4 ciudades. La capacidad de los pantanos es de 15, 20 y 25 millones de litros diarios. Las demandas de las ciudades es de 8, 10, 12 y 15. El coste de bombeo por millón de litros está dado en la siguiente tabla:

CIUDAD					
PANTANO		A	B	C	D

	1	2	3	4	5
	2	3	2	5	2
	3	4	1	2	3

Utilizando el algoritmo del transporte, planificar los envíos de agua a las ciudades con el mínimo coste.

4.-) Un problema de transporte se caracteriza por la siguiente matriz

	D1	D2	D3	D4	D5	Existencias
01	14	16	17	12	18	120
02	18	12	21	16	22	190
03	20	15	19	18	19	60
04	17	13	25	20	21	160
	80	100	120	110	60	

En donde cada uno de los números de la matriz denota el coste unitario de transporte del origen al destino correspondiente y los restantes números las existencias y las demandas.

Plantear la tabla de transporte con la que empezar a resolver el problema (No resolverlo), teniendo en cuenta que no se pueden transportar más de 70 unidades desde O1 hasta D4.

PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN

1.-) Una escuela de Ingeniería decide realizar seminarios sobre 4 temas de actualidad. Estos seminarios se realizarán una vez por semana. Al planificarlos, se ha procurado que el número de estudiantes que no pueda asistir a un seminario sea mínimo. Un cuidadoso estudio indica que el número de estudiantes que no pueden asistir a un seminario particular un día específico es el siguiente

	Ecología	Energía	Transporte	Bioingeniería
Lunes	50	40	60	20
Martes	40	30	40	30
Miércoles	60	20	30	20
Jueves	30	30	30	30
Viernes	10	20	10	30

Obtener la planificación óptima de los seminarios.

2.-) Para realizar 4 tareas (A,B,C,D), un empresario dispone de 3 empleados, cada uno de los cuales cobra las siguientes cantidades por realizar cada tarea.

	A	B	C	D
1	10	12	8	15
2	14	18	16	12
3	18	15	16	14

Para poder realizar las cuatro tareas, el empresario puede optar entre: a) contratar a un nuevo empleado, que cobraría 20 por realizar cualquier tarea, o b) que uno de sus empleados realice 2 tareas, una de ellas en horas extraordinarias, de forma que tendría que pagarle un 20 por ciento más que si la realizara en horario normal.

Determinar cuál de las 2 opciones es más ventajosa para el empresario, y determinar la asignación de los empleados a las tareas, de forma que el coste total sea mínimo.

3.-) Un millonario tiene 4 hijas muy feas, que no logran conseguir marido. Después de muchos avatares, consigue convencer a 4 incautos, sobornándoles de acuerdo a los gustos de cada uno, para que se casen con ellas. La cantidad de millones que tendrá que pagar a los interesados amantes según con quien elijan casarse viene dado en la siguiente tabla

	Hija 1	Hija 2	Hija 3	Hija 4
Torrente	2	3.5	5	6.5
Rodríguez Carpintero	10	22	34	46
Felipe Lotas	8	14	20	26
Bartol O. Me	0	6	12	18

Decidir los emparejamientos que comporten el menor gasto para el sufrido padre