PROBLEMA 1 *grao de dificultade* fácil

Nota: neste exercicio e o seguinte, os beneficios relativos aparecen cambiados de signo (en relación a como traballamos en clase)

. Un informático programador debe implementar un programa que consta de 4 subprogramas. Sabe que dispone de a lo sumo 40 horas para realizar el programa. También sabe que el segundo subprograma le costará el doble de tiempo que el primero, el tercero el mismo tiempo que el cuarto y la suma de los tiempos empleados en la realización de los subprogramas 1 y 2 le va a suponer al menos el 60% del tiempo total en realizar el programa. Cada hora de trabajo en los subprogramas 1, 2, 3 y 4 le reporta unos beneficios de 10, 12, 14 y 16 mil pesetas, respectivamente. Calcular el tiempo medio que tiene que emplear en cada subprograma para obtener el mayor beneficio posible.

(a) Modelizar el problema como un programa lineal.

(b) Resolverlo utilizando el método del Simplex.

(c) ¿Es única la solución óptima obtenida en el apartado b)? ¿Por qué?.

a) Variables de decisión:

X_i = Número de horas dedicadas al subprograma i

Restricciones

Disponibilidad en horas para programar

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 40$$

El segundo subprograma le cuesta el doble que el primero

$$-2X_1 + X_2 = 0$$

El tiempo empleado en el tercer y cuarto subprograma es el mismo

$$X_3 - X_4 = 0$$

La suma del tiempo empleado en los subprogramas 1 y 2 supone al menos el 60% del tiempo total

$$0.6(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \leq X_1 + X_2$$

No negatividad de las variables de decisión

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Función objetivo

max z = 10 X_1 + 12 X_2 + 14 X_3 + 16 X_4

MODELIZACIÓN

$$\begin{aligned} \max z = 10 X_1 + 12 X_2 + 14 X_3 + 16 X_4 \\ \text{s.a} \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 40 \\ -2X_1 + X_2 = 0 \\ X_3 - X_4 = 0 \\ 0.6(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \leq X_1 + X_2 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Añadimos dos variables de holgura asociadas a las restricciones 1 y 4 y dos variables artificiales, asociadas a las restricciones 2 y 3. Aplicamos el método del Simplex para obtener la solución óptima.

Método del Simplex

		10	12	14	16	0	-M	0	-M	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
0	X_5	1	1	1	1	1	0	0	0	40
-M	X_6	-2	1	0	0	0	1	0	0	0
0	X_7	-4	-4	6	6	0	0	1	0	0
-M	X_8	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
		2M-10	-M-12	-M-14	M-6	0	0	0	0	0

		10	12	14	16	0	-M	0	-M	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
0	X_5	1	1	0	2	1	0	0	-1	40
-M	X_6	-2	1	0	0	0	1	0	0	0
0	X_7	-4	-4	0	12	0	0	1	-6	0
14	X_3	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
		2M-10	-M-12	0	-30	0	0	0	M+16	0

		10	12	14	16	0	-M	0	-M	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
0	X_5	3	0	0	2	1	-1	0	-1	40
12	X_2	-2	1	0	0	0	1	0	0	0
0	X_7	-12	0	0	12	0	4	1	-6	0
14	X_3	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
		-34	0	0	-30	0	M+12	0	M+16	0

		10	12	14	16	0	-M	0	-M	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
10	X_1	1	0	0	2/3	1/3	-1/3	0	-1/3	40/3
12	X_2	0	1	0	4/3	2/3	1/3	0	-2/3	80/3
0	X_7	0	0	0	20	4	0	1	-10	160
14	X_3	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
		0	0	0	-22/3	34/3	M+2/3	0	M+14/3	1360/3

		10	12	14	16	0	-M	0	-M	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
10	X_1	1	0	0	0	1/5	-1/3	-1/30	0	8
12	X_2	0	1	0	0	2/5	1/3	-1/15	-1/2	16
16	X_4	0	0	0	1	1/5	0	1/20	-1/2	8
14	X_3	0	0	1	0	1/5	0	1/20	½	8
		0	0	0	0	64/5	M+2/3	11/30	M+1	512

c) La solución es única ya que todos los valores indicadores de las variables no básicas son mayores que cero.

PROBLEMA 2 *grao de dificultade* fácil

Una compañía de acero debe decidir como distribuir el tiempo de la próxima semana de su taller de laminación, que consta de una máquina que toma bloques de acero y los transforma en tiras o espirales. En la siguiente tabla aparecen las tasas de producción, el beneficio por cada tonelada producida y la cantidad máxima de toneladas que se pueden fabricar de tiras y espirales.

	Tasa de producción	**Beneficio**	**Cantidad máxima**
Tiras	200 tons/h	25 euros/ton	6000 tons
Espirales	140 tons/h	30 euros/ton	4000 tons

Supuesto que existen 40 horas de tiempo de producción la próxima semana, el problema es decidir cuántas toneladas de tiras y espirales deberían producirse para obtener el máximo beneficio. Formular este problema como uno de programación lineal y resolverlo gráficamente y aplicando el método del Simplex.

Variables de decisión :

X_1 = Número de horas dedicadas a la producción de tiras
X_2 = Número de horas dedicadas a la producción de espirales

Restricciones

Disponibilidad en horas de producción la próxima semana

$$X_1 + X_2 \leq 40$$

Cantidad máxima que se puede producir de tiras y de espirales

$$200X_1 \leq 6000 \qquad 140X_2 \leq 4000$$

Condiciones de no negatividad de las variables de decisión

$$X_1 \geq 0 \qquad X_2 \geq 0$$

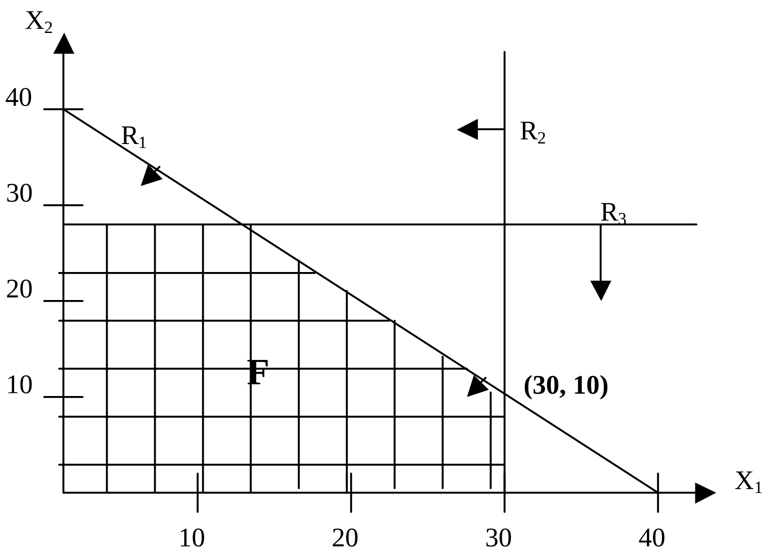
Función objetivo

max z = $25 \times 200 \times X_1 + 30 \times 140 \times X_2$

MODELIZACIÓN

max z = $5000\ X_1 + 4200\ X_2$
s.a

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 \leq 40 && (R_1)\\ &200X_1 \leq 6000 && (R_2)\\ &140X_2 \leq 4000 && (R_3)\\ &X_1 \geq 0 &&\\ &X_2 \geq 0 && \end{aligned}$$



Método del Simplex

		5000	4200	0	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	1	1	1	0	0	40
0	X_4	1*	0	0	1	0	30
0	X_5	0	1	0	0	1	200/7
		-5000	-4200	0	0	0	0

		5000	4200	0	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	0	1*	1	-1	0	10
5000	X_1	1	0	0	1	0	30
0	X_5	0	1	0	0	1	200/7
		0	-4200	0	5000	0	15000

		5000	4200	0	0	0	
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
4200	X_2	0	1	1	-1	0	10
5000	X_1	1	0	0	1	0	30
0	X_5	0	0	-1	1	1	130/2
		0	0	4200	800	0	192000

Solución óptima : x_1^* 30, x_2^* 10, x_3^* x_4^* 0, x_5^* 65, z^* 192.000*euros*

PROBLEMA 3 *grao de dificultade* media. Quizá teñades algunha dificultade para expor a función do obxectivo. Para as restricións non deberiades ter moitas dificultades.

Un alumno decide distribuir el tiempo de que dispone (120 horas) para preparar los exámenes de febrero. El alumno se encuentra matriculado en cuatro asignaturas y ha estimado que el tiempo de estudio necesario para aprobarlas con 5.0 son repectivamente 12, 20, 25 y 18 horas, mientras que las necesarias para sacar un 10 son respectivamente 20, 45, 60 y 30 horas (aunque la realidad puede ser muy distinta de sus estimaciones). La nota que estima obtener será proporcional al tiempo dedicado a la asignatura y los tiempos necesarios para aprobar y sacar un diez, linealmente (Por ejemplo, si el tiempo para aprobar son 10 horas y para sacar un 10 son 20 horas, si dedica 17 horas su nota será 8.5).

Se impone además como condición que el tiempo que dedica a las distintas asignaturas no difiera en más de 5 horas. Modelizar el problema de programación lineal que maximice la nota media obtenida en los exámenes de febrero, aprobando además las cuatro asignaturas, de acuerdo a sus estimaciones optimistas.

Variables de decisión : X_i = Número de horas dedicadas a la asignatura i, i=1,2,3,4.

Restricciones

El alumno debe aprobar las cuatro asignaturas

$$X_1 \geq 12 \qquad X_2 \geq 20 \qquad X_3 \geq 25 \qquad X_4 \geq 18$$

El alumno, lógicamente, no puede sacar más de un diez en cada asignatura luego no tiene sentido estudiar en cada una de ellas más del tiempo necesario para sacar un 10

$$X_1 \leq 20 \qquad X_2 \leq 45 \qquad X_3 \leq 60 \qquad X_4 \leq 30$$

El alumno dispone de un total de 120 horas

$$X_1+X_2+X_3+X_4 \leq 120$$

Los tiempos dedicados a cada asignatura no deben diferir en más de 5 horas

$$|X_1-X_2| \leq 5 \rightarrow X_1 - X_2 \leq 5 \text{ y } X_1 - X_2 \geq -5$$
$$|X_1-X_3| \leq 5 \rightarrow X_1 - X_3 \leq 5 \text{ y } X_1 - X_3 \geq -5$$
$$|X_1-X_4| \leq 5 \rightarrow X_1 - X_4 \leq 5 \text{ y } X_1 - X_4 \geq -5$$
$$|X_2-X_3| \leq 5 \rightarrow X_2 - X_3 \leq 5 \text{ y } X_2 - X_3 \geq -5$$
$$|X_2-X_4| \leq 5 \rightarrow X_2 - X_4 \leq 5 \text{ y } X_2 - X_4 \geq -5$$
$$|X_3-X_4| \leq 5 \rightarrow X_3 - X_4 \leq 5 \text{ y } X_3 - X_4 \geq -5$$

Función objetivo

$$\max z = \frac{1}{4}\left[\left(5\times\frac{(X_1-12)}{(20-12)}\right)+\left(5\times\frac{(X_1-20)}{(45-20)}\right)+\left(5\times\frac{(X_1-25)}{(60-25)}\right)+\left(5\times\frac{(X_1-18)}{(30-18)}\right)\right]$$

MODELIZACIÓN

$$\max z = \frac{1}{4}\left[\left(5\times\frac{(X_1-12)}{(20-12)}\right)+\left(5\times\frac{(X_1-20)}{(45-20)}\right)+\left(5\times\frac{(X_1-25)}{(60-25)}\right)+\left(5\times\frac{(X_1-18)}{(30-18)}\right)\right]$$

s.a

$$X_1 \geq 12 \qquad X_2 \geq 20 \qquad X_3 \geq 25 \qquad X_4 \geq 18$$
$$X_1 \leq 20 \qquad X_2 \leq 45 \qquad X_3 \leq 60 \qquad X_4 \leq 30$$
$$X_1+X_2+X_3+X_4 \leq 120$$
$$X_1 - X_2 \leq 5 \qquad X_1 - X_2 \geq -5$$
$$X_1 - X_3 \leq 5 \qquad X_1 - X_3 \geq -5$$
$$X_1 - X_4 \leq 5 \qquad X_1 - X_4 \geq -5$$
$$X_2 - X_3 \leq 5 \qquad X_2 - X_3 \geq -5$$
$$X_2 - X_4 \leq 5 \qquad X_2 - X_4 \geq -5$$
$$X_3 - X_4 \leq 5 \qquad X_3 - X_4 \geq -5$$
$$X_i \geq 0$$

PROBLEMA 4 *grao de dificultade* media

Una fábrica consta de tres talleres A, B y C, en los que se fabrican dos productos, 1 y 2, en cantidades x_1 y x_2 a determinar. Los tres talleres A, B y C tienen limitado el trabajo mensual en 400, 300 y 700 horas, respectivamente. El producto 1 se fabrica según el proceso

Talleres sucesivos	A	C	B	C
Unidades producidas por hora	4	8	3	2

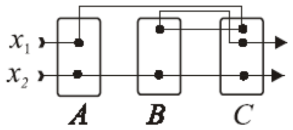
y el producto 2

Talleres sucesivos	A	B	C
Unidades producidas por hora	2	6	2

La producción máxima para los dos productos son, respectivamente, de 800 y 900 unidades por mes. Los beneficios unitarios de los dos productos son 20 y 30 euros, respectivamente. Se pide: a) Construir un modelo de programación lineal que ayude a determinar cuantas unidades se deben fabricar de cada producto para que el beneficio total sea máximo; b) Resolver gráficamente el modelo construido y comentar la influencia de cada restricción considerada en a) sobre la solución óptima. ¿Se utilizan todas las horas de trabajo disponibles en los talleres?

Nota:

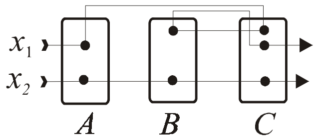
El esquema de los procesos para la fabricación de ambos productos se muestra en la figura



1. a) Las variables de decisión se indican en el enunciado, siendo éstas

$$x_i\text{: número de unidades a fabricar del producto } i = 1, 2.$$

El esquema de los procesos para la fabricación de ambos productos se muestra en la figura



A partir de este esquema construimos primero las restricciones debidas a las limitaciones mensuales en los tiempos de producción con cada taller, siendo éstas

$$\begin{array}{lccc} \text{Taller } A\text{:} & \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} & \leq & 400 \\ \text{Taller } B\text{:} & \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} & \leq & 300 \\ \text{Taller } C\text{:} & \frac{x_1}{8} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} & \leq & 700 \end{array}$$

A continuación consideramos las limitaciones por producciones máximas por mes, que serán

$$x_1 \leq 800 \quad \text{y} \quad x_2 \leq 900,$$

además de las condiciones de no negatividad. Finalmente, la función objetivo es

$$\max B = 20x_1 + 30x_2$$

donde B es el beneficio total debido a un programa de producción (x_1, x_2).

Operando y simplificando las restricciones, se tiene el programa lineal

$$\begin{array}{lcllll} \max B & = & 20x_1 + 30x_2 & & & \\ \text{s. a} & & & & & \\ & & x_1 + 2x_2 & \leq & 1600 & (r_1) \\ & & 2x_1 + \ x_2 & \leq & 1800 & (r_2) \\ & & 5x_1 + 4x_2 & \leq & 5600 & (r_3) \\ & & x_1 & \leq & 800 & (r_4) \\ & & \qquad x_2 & \leq & 900 & (r_5) \\ & & \qquad x_1, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

b) La resolución gráfica se muestra en la figura

La solución óptima es el punto extremo intersección de las restricciones (como igualdades) primera (r_1) y segunda (r_2), dada por

$$x_1^* = 666.67,\ x_2^* = 466.67 \quad \text{con} \quad B^* = 27333.33$$

Observamos de la resolución gráfica que las restricciones tercera (r_3) y quinta (r_5) son redundantes. Además, si calculamos los valores de las restricciones en la solución óptima tendremos que las holguras (h_i) para las restricciones r_1 y r_2 son nulas, es decir, $h_1^* = 0$ y $h_2^* = 0$, y por tanto, se consumen en su totalidad los tiempos disponibles para los talleres A y B. Sin embargo, ya que $h_3^* = 400$, se tendrá que (deshaciendo la transformación sobre la restricción r_3) de la disponibilidad total para el taller C, no se utilizan 50h.

Finalmente, observemos que la producción máxima no se alcanza en ambos productos ya que se dejan de producir $h_4^* = 133.3$ unidades del producto 1 y $h_5^* = 433.3$ unidades del producto 2.

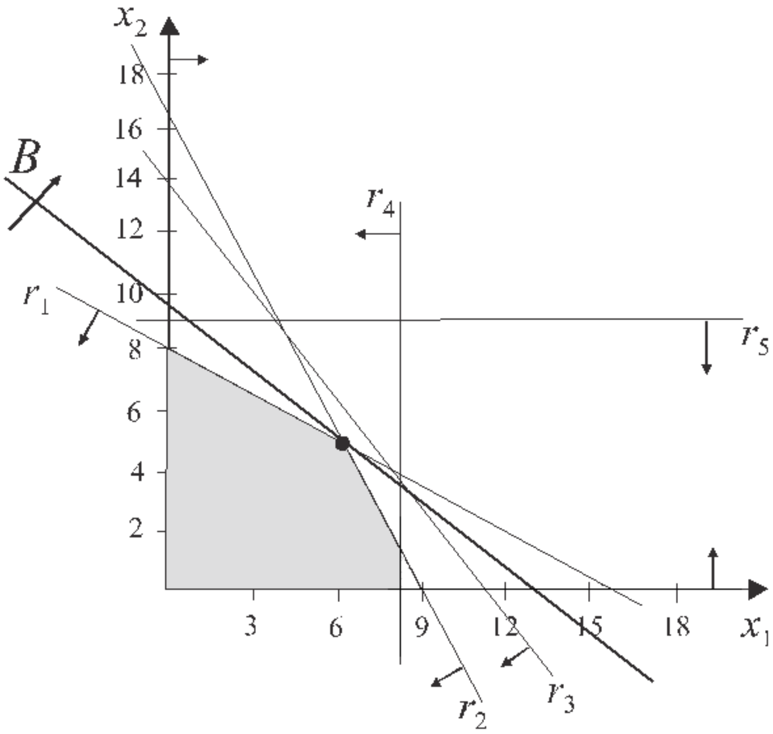


Figure 1:

PROBLEMA 5 *grao de dificultade:* media

Una pequeña línea aérea, Ivy Air, vuela entre tres ciudades: Ithaca (una pequeña ciudad de New York), Newark (una ciudad horrorosa en la bella New Jersey), y Boston (ciudad de Massachusetts). Ivy Air ofrece varios vuelos pero, para este problema, nos centraremos en el vuelo del viernes por la tarde que sale de Ithaca, hace escala en Newark, y continúa a Boston. Existen tres tipos de pasajeros: los que viajan de Ithaca a Newark, los que viajan de Newark a Boston y los que viajan de Ithaca a Boston. El avión tan sólo admite 30 pasajeros como máximo.
La línea ofrece tres clases de precios: 1^a, 2^a, 3^a. Los precios de los billetes son los que aparecen en la siguiente tabla

	Ithaca-Newark	**Newark-Boston**	**Ithaca-Boston**
$\mathbf{1^a}$	300	160	360
$\mathbf{2^a}$	220	130	280
$\mathbf{3^a}$	100	80	140

Basándonos en la experiencia se sabe que el número de pasajeros no sobrepasará las cantidades de la siguiente tabla

	Ithaca-Newark	**Newark-Boston**	**Ithaca-Boston**
$\mathbf{1^a}$	4	8	3
$\mathbf{2^a}$	8	13	10
$\mathbf{3^a}$	22	20	18

Modelizar el problema como un programa lineal que calcule el beneficio máximo.

Variables de decisión :

X^{i}_{IN} = Viajeros que van de Ithaca a Newark en la clase i, i=1,2,3.
X^{i}_{NB} = Viajeros que van de Newark a Boston en la clase i, i=1,2,3.
X^{i}_{IB} = Viajeros que van de Ithaca a Boston en la clase i, i=1,2,3.

Restricciones

Experiencia en número de pasajeros:

$$
\begin{array}{lll}
X^{1}_{IN} \leq 4 & X^{2}_{IN} \leq 8 & X^{3}_{IN} \leq 22 \\
X^{1}_{NB} \leq 8 & X^{2}_{NB} \leq 13 & X^{3}_{NB} \leq 20 \\
X^{1}_{IB} \leq 3 & X^{2}_{IB} \leq 10 & X^{3}_{IB} \leq 18
\end{array}
$$

Capacidad del avión de 30 personas en los trayectos Ithaca-Newark y Newark-Boston

$$X^{1}_{IN} + X^{2}_{IN} + X^{3}_{IN} + X^{1}_{IB} + X^{2}_{IB} + X^{3}_{IB} \leq 30$$
$$X^{1}_{NB} + X^{2}_{NB} + X^{3}_{NB} + X^{1}_{IB} + X^{2}_{IB} + X^{3}_{IB} \leq 30$$

No negatividad de las variables de decisión

$$X^{i}_{IN} \geq 0, \quad X^{i}_{NB} \geq 0, \quad X^{i}_{IB} \geq 0 \quad i = 1,2,3$$

Función objetivo

$$\max z = 300\,X^{1}_{IN} + 220\,X^{2}_{IN} + 100\,X^{3}_{IN} + 160\,X^{1}_{NB} + 130\,X^{2}_{NB} + 80\,X^{3}_{NB} + 360\,X^{1}_{IB} + 280\,X^{2}_{IB} + 140\,X^{3}_{IB}$$

MODELIZACIÓN

$$\max z = 300\,X^{1}_{IN} + 220\,X^{2}_{IN} + 100\,X^{3}_{IN} + 160\,X^{1}_{NB} + 130\,X^{2}_{NB} + 80\,X^{3}_{NB} + 360\,X^{1}_{IB} + 280\,X^{2}_{IB} + 140\,X^{3}_{IB}$$

s.a

$$
\begin{array}{lll}
X^{1}_{IN} \leq 4 & X^{2}_{IN} \leq 8 & X^{3}_{IN} \leq 22 \\
X^{1}_{NB} \leq 8 & X^{2}_{NB} \leq 13 & X^{3}_{NB} \leq 20 \\
X^{1}_{IB} \leq 3 & X^{2}_{IB} \leq 10 & X^{3}_{IB} \leq 18
\end{array}
$$
$$X^{1}_{IN} + X^{2}_{IN} + X^{3}_{IN} + X^{1}_{IB} + X^{2}_{IB} + X^{3}_{IB} \leq 30$$
$$X^{1}_{NB} + X^{2}_{NB} + X^{3}_{NB} + X^{1}_{IB} + X^{2}_{IB} + X^{3}_{IB} \leq 30$$
$$X^{i}_{IN} \geq 0, \quad X^{i}_{NB} \geq 0, \quad X^{i}_{IB} \geq 0 \quad i = 1,2,3$$

PROBLEMA 6 *grao de dificultade:* difícil

En tres días consecutivos (miércoles, jueves y viernes) deben matricularse 500 alumnos, de los cuales 200 pedirán becas. Se sabe que los tiempos que tardan las secretarias en matricular a un alumno es de 10 minutos y en revisarle la beca 5 minutos y que secretaría permanece abierta durante cinco horas al día. Además las becas tan solo se recogen los miércoles y jueves y un día no pueden recogerse más de 10 becas que el otro. Modelizar el problema como uno de programación lineal que obtenga el número mínimo de secretarias necesarias para los tres días.

Variables de decisión:

N_X = Número de secretarias que trabajan el miércoles
N_J = Número de secretarias que trabajan el jueves
N_V = Número de secretarias que trabajan el viernes
AB_X = Número de alumnos que piden beca el miércoles (se matriculan y piden beca)
AB_J = Número de alumnos que piden beca el jueves (se matriculan y piden beca)
A_X = Número de alumnos que no piden beca el miércoles (sólo se matriculan)
A_J = Número de alumnos que no piden beca el jueves (sólo se matriculan)
A_V = Número de alumnos que no piden beca el viernes (sólo se matriculan)

Restricciones

Restricciones sobre el número de alumnos que se matriculan y piden beca

$$AB_X + AB_J = 200 \qquad A_X + A_J + A_V = 300$$

Restricciones en el tiempo de servicio que se presta

$$AB_X \times 5 + A_X \times 10 \leq N_X \times 300$$
$$AB_J \times 5 + A_J \times 10 \leq N_J \times 300$$
$$A_V \times 5 \leq N_v \times 300$$

Un día no pueden recogerse más de 10 becas que el otro

$$| AB_X - AB_J | \leq 10 \rightarrow AB_X - AB_J \leq 10 \text{ y } AB_J - AB_X \leq 10$$

Condición de no negatividad de las variables de decisión

$$AB_X, AB_J, A_X, A_J, A_V, N_X, N_J, N_v \geq 0$$

Función objetivo

min z = $N_X + N_J + N_v$

MODELIZACIÓN

min z = $N_X + N_J + N_v$
s.a

$AB_X + AB_J = 200 \qquad A_X + A_J + A_V = 300$
$AB_X \times 5 + A_X \times 10 \leq N_X \times 300$
$AB_J \times 5 + A_J \times 10 \leq N_J \times 300$
$A_V \times 5 \leq N_v \times 300$
$AB_X - AB_J \leq 10$
$AB_J - AB_X \leq 10$
$AB_X, AB_J, A_X, A_J, A_V, N_X, N_J, N_v \geq 0$