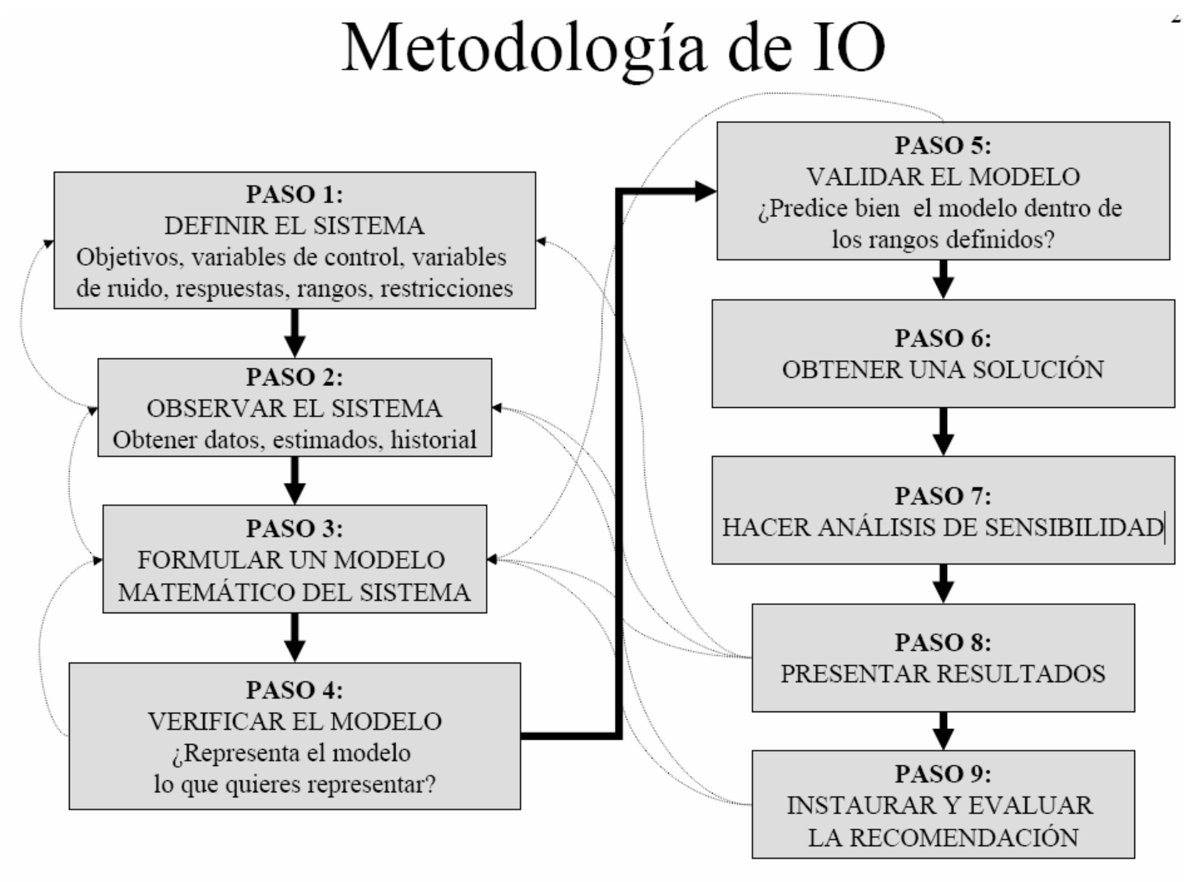
INVESTIGACIÓN OPERATIVA:

Es la aplicación del método científico para asignar los recursos o actividades de forma eficaz, en la gestión y organización de sistemas complejos



Tema 1. Modelos de programación lineal y aplicaciones.

Formulación de modelos de programación lineal

Un problema de programación se refiere, en general, al uso o asignación (reparto) de una serie de recursos (dinero, material, trabajadores,...) de "la mejor manera posible", es decir, de manera que se maximicen las ganancias o se minimicen los costes (de utilización de dichos recursos).

Para que un problema de programación se diga lineal ha de cumplir dos características:

1. La regla o criterio para seleccionar los mejores valores de las variables usadas para construir el problema se puede escribir como una ecuación lineal de las mismas (sin potencias de grado mayor que uno, sin productos cruzados, ...), que habrá que maximizar / minimizar. A esta función se la llama **función del objetivo**.

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$$

2. Las relaciones existentes entre las variables del problema (también llamadas restricciones) se pueden escribir como un conjunto de ecuaciones o inecuaciones lineales de las variables anteriores. A este conjunto de ecuaciones se le denomina **conjunto de restricciones**.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \ (\leq, \geq, =)\ b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \ (\leq, \geq, =)\ b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \ (\leq, \geq, =)\ b_m \end{array}$$

m filas o ecuaciones y n variables o incógnitas

¿Cómo "escribir" un problema de programación lineal? Debemos conocer (en este orden):

1) Las variables del problema $\mathbf{x_i}$ (variables de decisión o actividad)
2) El conjunto de restricciones
3) La función del objetivo que habrá que maximizar o minimizar, Z

Ejemplo:

"Una compañía armamentística americana desea proyectar la fabricación de un cohete antitanque casero para vender en supermercados. La compañía ha considerado 3 modelos y su departamento de producción ha elaborado la siguiente tabla:

MODELO	A	B	C
Trabajo (horas/unidad)	7	3	6
Material (titanio/unidad)	4	4	5
Beneficios (por unidad fabricada)	40$	20$	30$

El suministro de material se restringe a 200 kg de titanio por día, y la disponibilidad total diaria de los trabajadores es de 150 horas. Formular un problema de programación lineal para determinar la producción diaria de cada modelo, en orden a maximizar el beneficio total."

1. Identificación de las variables:

X_1= "unidades diarias a producir del modelo A"

X_2 = "unidades diarias a producir del modelo B"

X_3 = "unidades diarias a producir del modelo C"

2. Restricciones:

Las restricciones vienen dadas por los límites de disponibilidad de los dos recursos: trabajo y material.

1 unidad modelo A lleva 7 horas de trabajo, entonces X_1 unidades -> $7 \cdot X_1$

1 unidad modelo B lleva 3 horas ... X_2 unidades -> $3 \cdot X_2$

1 unidad modelo C lleva 6 horas ... X_3 unidades -> $6 \cdot X_3$

TOTAL Horas de trabajo: $7 \cdot X_1+3 \cdot X_2+6 \cdot X_3$

1 unidad modelo A necesita 4 ... X_1unidades -> $4 \cdot X_1$

1 unidad modelo B necesita 4 ... X_2 unidades -> $4 \cdot X_2$

1 unidad modelo C necesita 4 ... X_3 unidades -> $5 \cdot X_3$

TOTAL Material: $4 \cdot X_1+4 \cdot X_2+5 \cdot X_3$

Tendremos, por tanto que:

$7 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 6 \cdot X_3 \leq 150$

$4 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 \leq 200$

3. Función objetivo:

MODELO	BENEFICIO POR UNIDAD	UNIDADES PRODUCIDAS	
A	40	X_1	$40\ X_1$
B	20	X_2	$20\ X_2$
C	30	X_3	$30\ X_3$

Tendremos, por tanto:

$Z = 40 \cdot X_1 + 20 \cdot X_2 + 30 \cdot X_3$

Por último, tendríamos la formulación completa del problema:

Maximizar $Z = 40X_1 + 20X_2 + 30X_3$

Sujeto a:

$7X_1+3X_2+6X_3 \leq 150$

$4X_1+4X_2+5X_3 \leq 200$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

$X_3 \geq 0$

X_1, X_2, X_3 enteros

Solución gráfica de problemas de programación lineal con 2 variables

Ejemplo: Minimizar $Z = 40x_1+36x_2$

Sujeto a $x_1 \leq 8$

$x_2 \leq 10$

$5x_1+3x_2 \geq 45$

$x_1,x_2 \geq 0$

Resolver el p.p.l. es encontrar un par de valores (x_1^{opt}, x_2^{opt}) que cumplan las restricciones y hagan mínima la función del objetivo

a) $\left.\begin{array}{l} x_1=8 \\ x_2=10 \end{array}\right\}$ Satisface las restricciones

b) $\left.\begin{array}{l} x_1=7 \\ x_2=9 \end{array}\right\}$ Satisface las restricciones

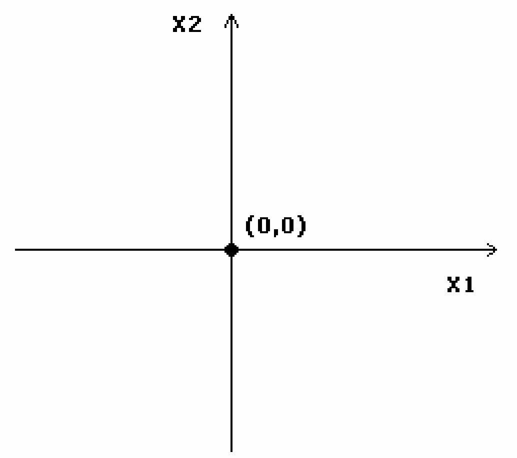
ambas son **soluciones factibles**

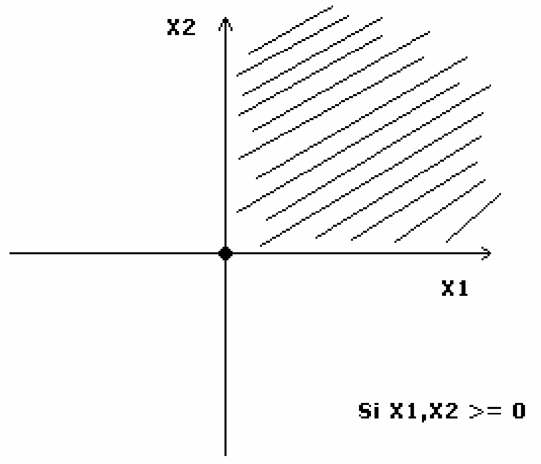
Z(a)=40•8+36•10=680 Z(b)=40•7+36•9=604

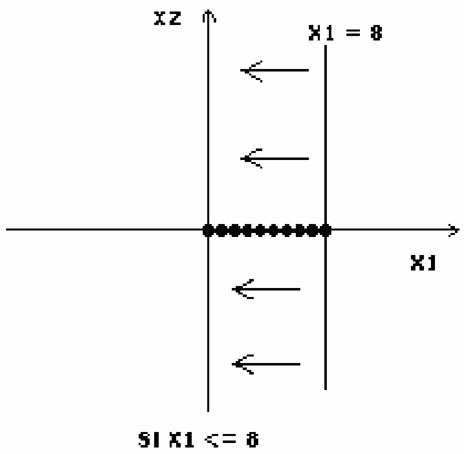
b es "mejor" solución que *a* (estamos minimizando)

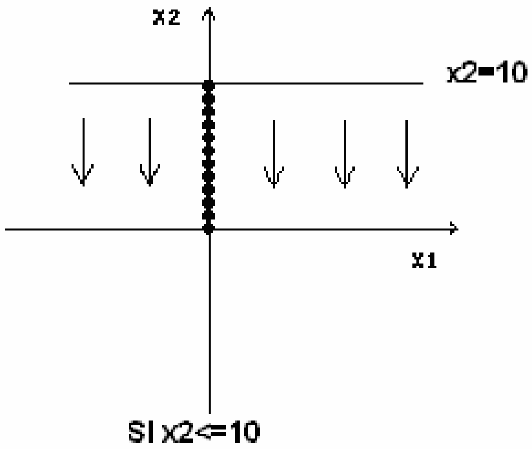
El conjunto de todas las soluciones factibles de un problema de programación lineal (p.p.l.) se llama **región factible**. Resolver un p.p.lineal es encontrar la mejor solución factible en la región factible. Esta última se llama solución óptima.

Gráficamente:



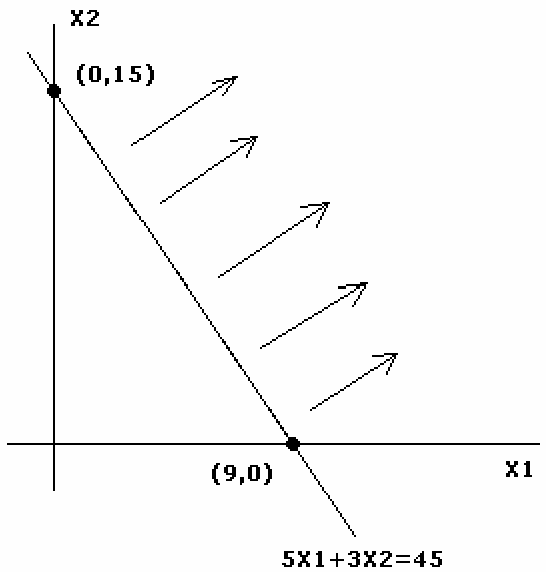






$5x_1+3x_2 \geq 45$ $\rightarrow$ **$5x_1+3x_2=45$** **<u>Ec. Recta</u> pasa por los puntos**

$x_1=0 \rightarrow x_2=15$
$x_1=9 \rightarrow x_2=0$

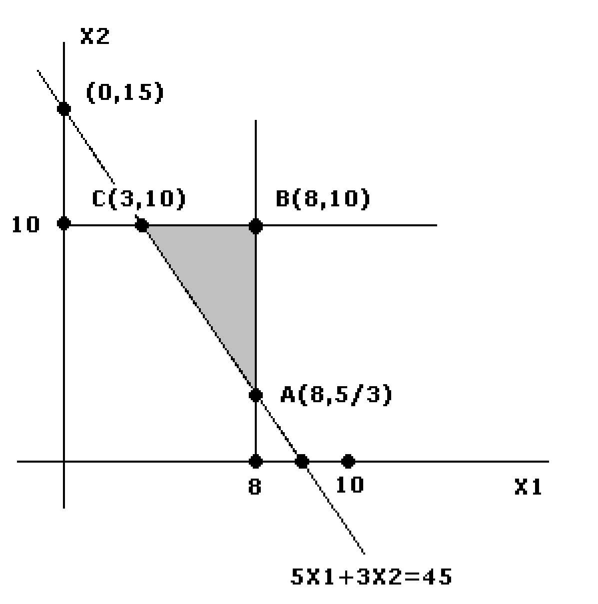


· Se coge un punto cualquiera, por ejemplo X1=X2=0, el punto (0,0), y vemos:

5·0 + 3·0 <= 45

5·0 + 3·0 >= 45 NO CIERTO

· La región factible será el triángulo formado por los puntos A, B y C, con los bordes incluidos.



Función objetivo $40\ x_1+36x_2$

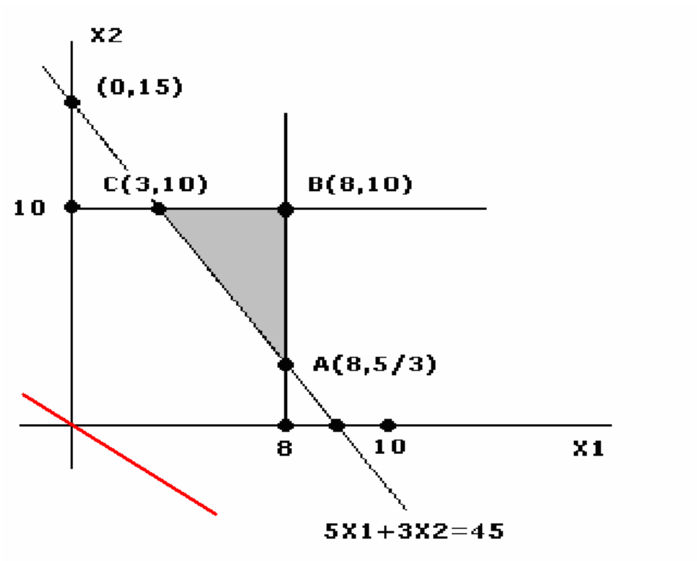
$40x_1+36x_2 = cte$ es la ecuación de una recta

Por ejemplo Z=0

$40x_1+36x_2=0$

$x_1= 0 \rightarrow x_2= 0$

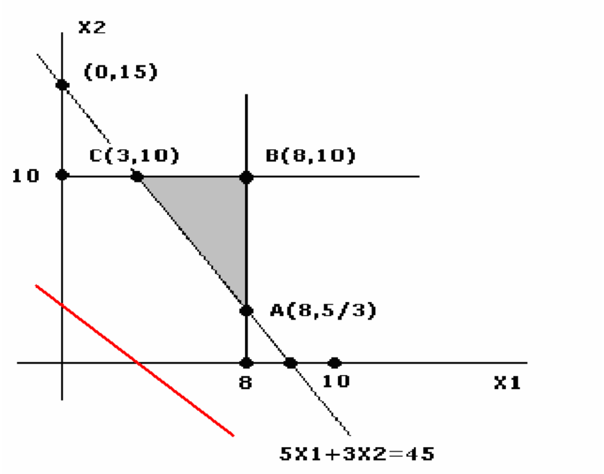
$x_1=1 \rightarrow x_2= -40/36 = -10/9$



Z=36

$40\ x_1+36\ x_2=36$

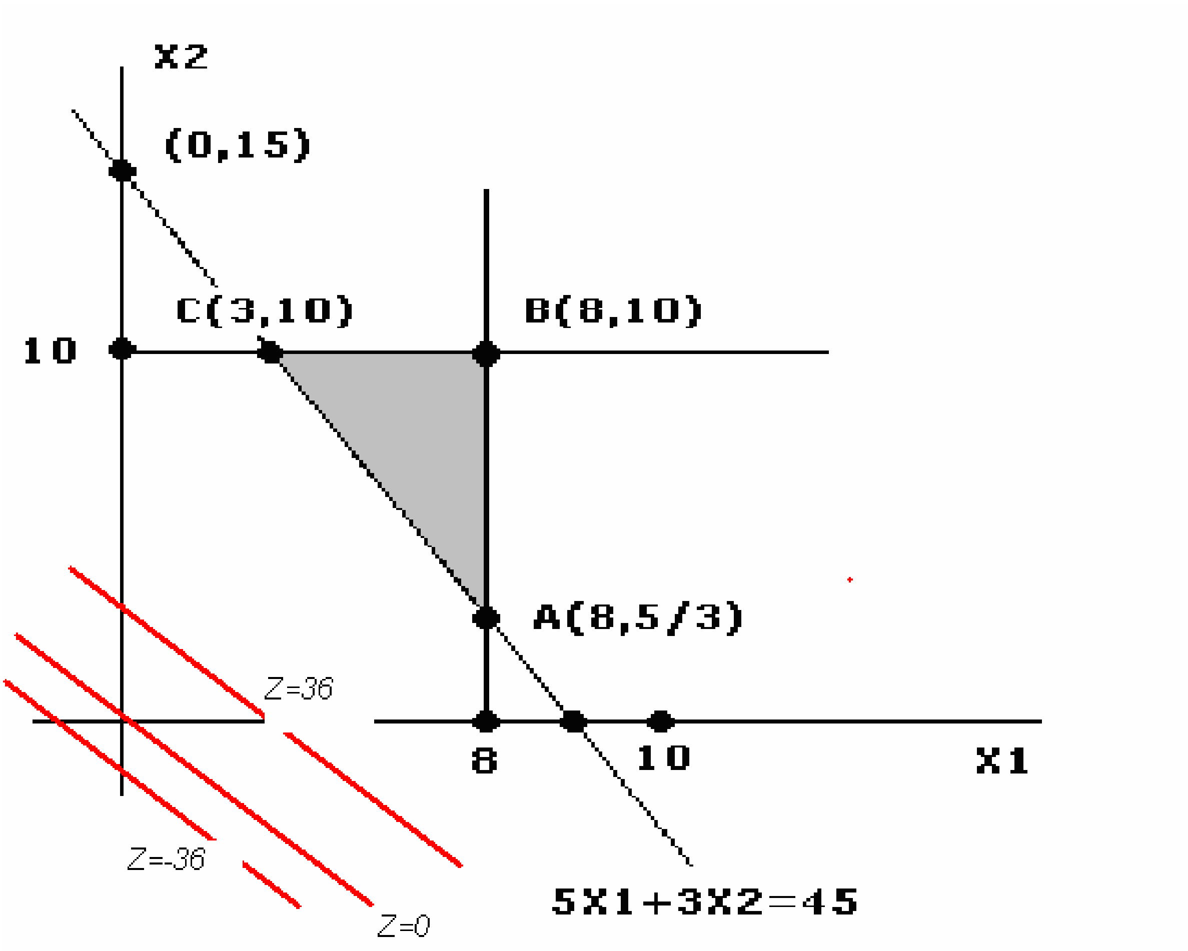
$x_1= 0 \rightarrow x_2= 1$
$x_2= 0 \rightarrow x_1= 36/40 = 9/10$



Z= -36

$40\ x_1+36\ x_2=-36$

$x_1= 0 \rightarrow x_2= -1$
$x_2= 0 \rightarrow x_1= -36/40 = -9/10$

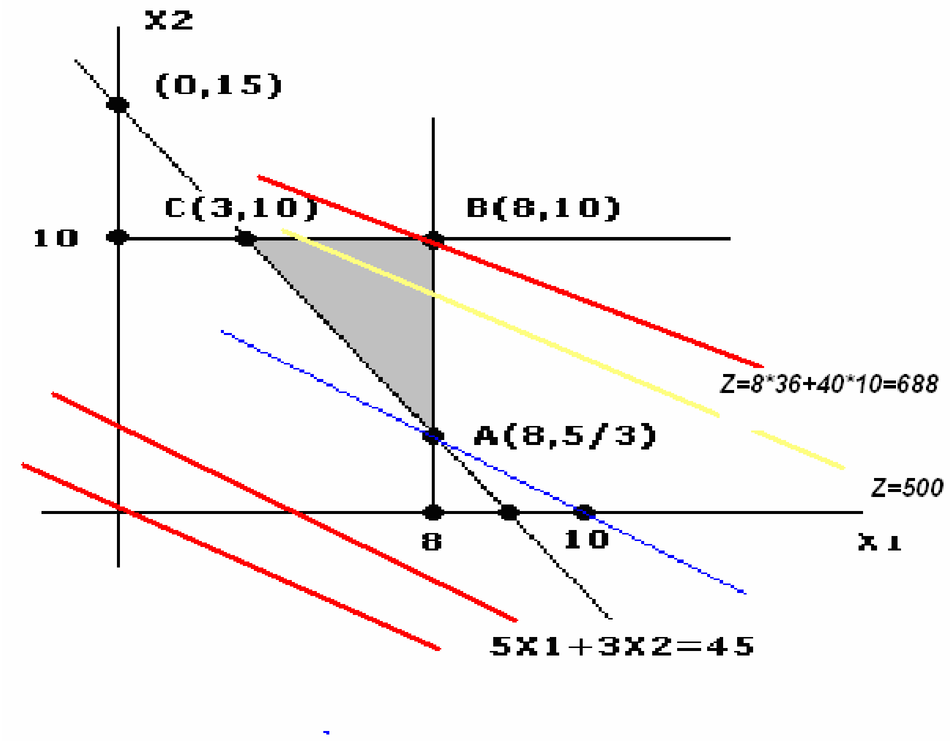


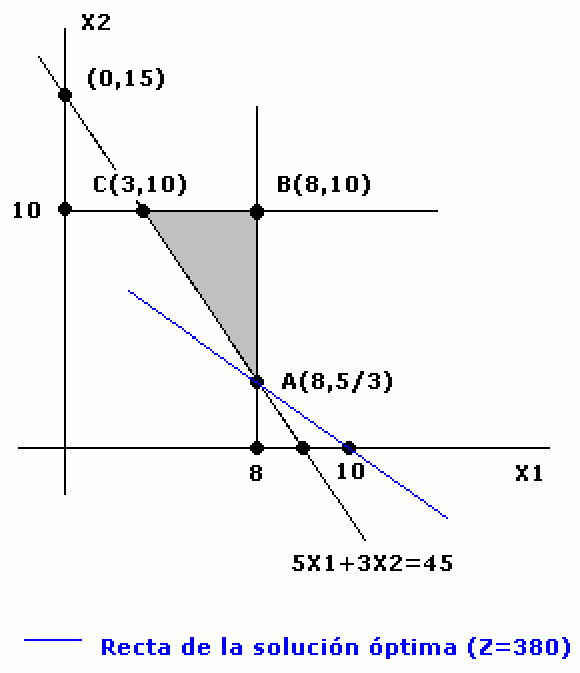
Resumiendo:

Con los tres valores de la cte, Z:

- Constante positiva → la recta se mueve a la derecha
- Constante negativa → la recta se mueve a la izquierda

· Hemos de probar en qué parte esta ecuación nos da el valor óptimo. Como estamos minimizando, queremos que nos dé el menor valor posible. Gráficamente esto supone bajar la recta lo más posible en la región factible:





A = (x_1, x_2) = (8, 5/3) **minimiza** Z $\Rightarrow$ es la <u>solución óptima</u> y Z=380 es el <u>valor óptimo</u> para el problema.

Este es un ejemplo de **solución óptima única**.

Otro ejemplo:

Max Z $= x_2$

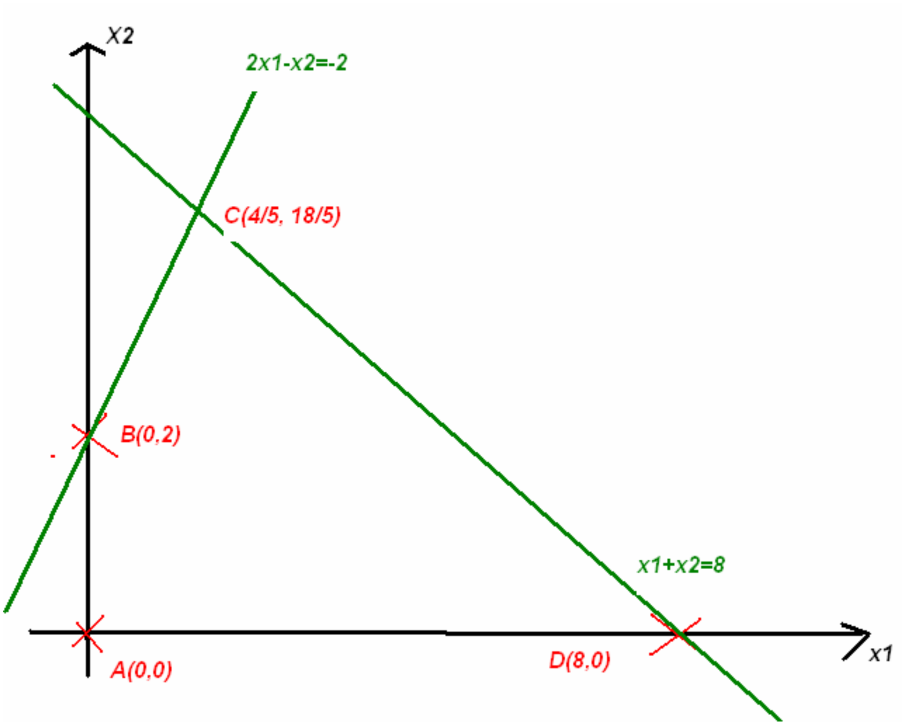
Sujeto a $2x_1 - x_2 \geq -2$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

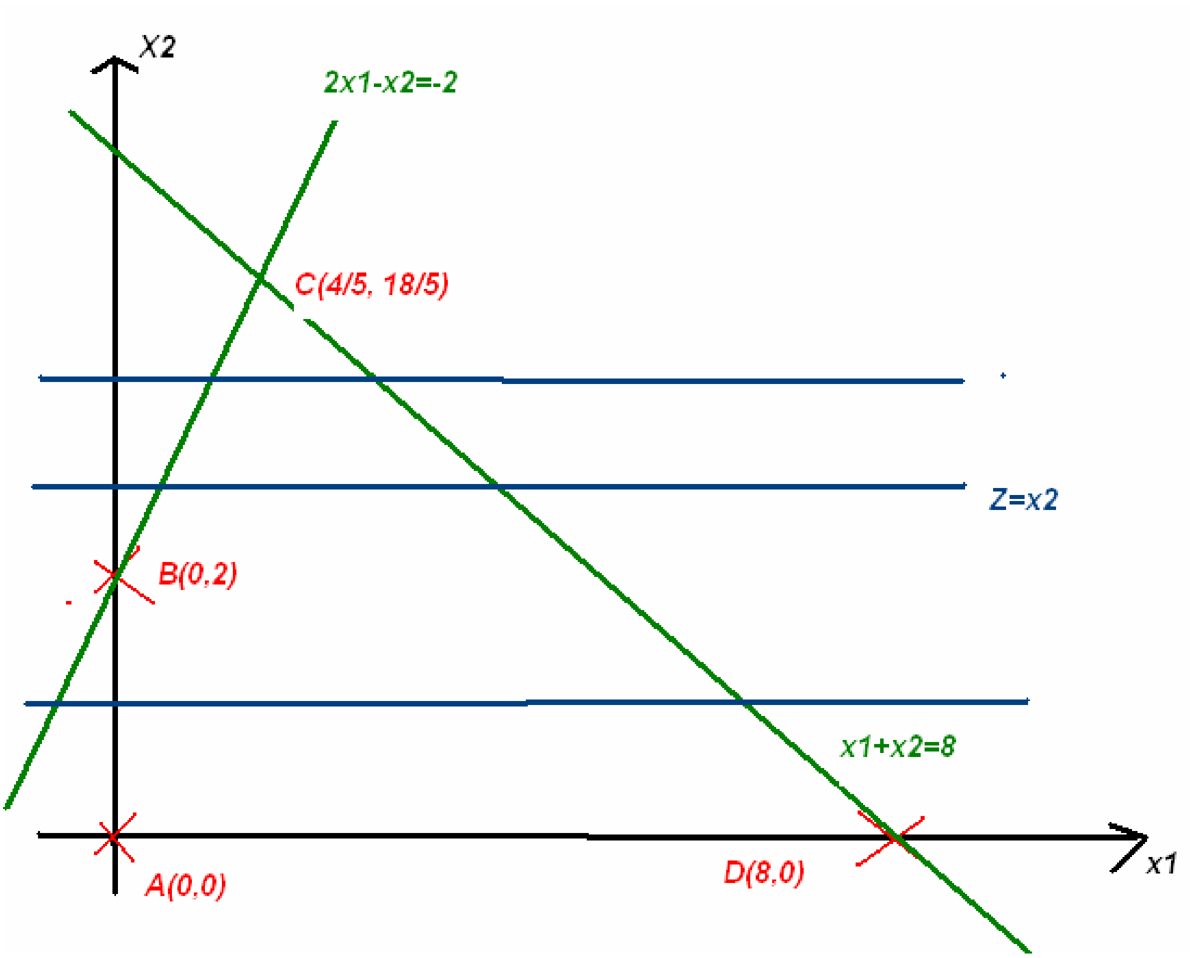
$x_1, x_2 \geq 0$

$$2x_1 - x_2 = -2 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \end{array} \right.$$

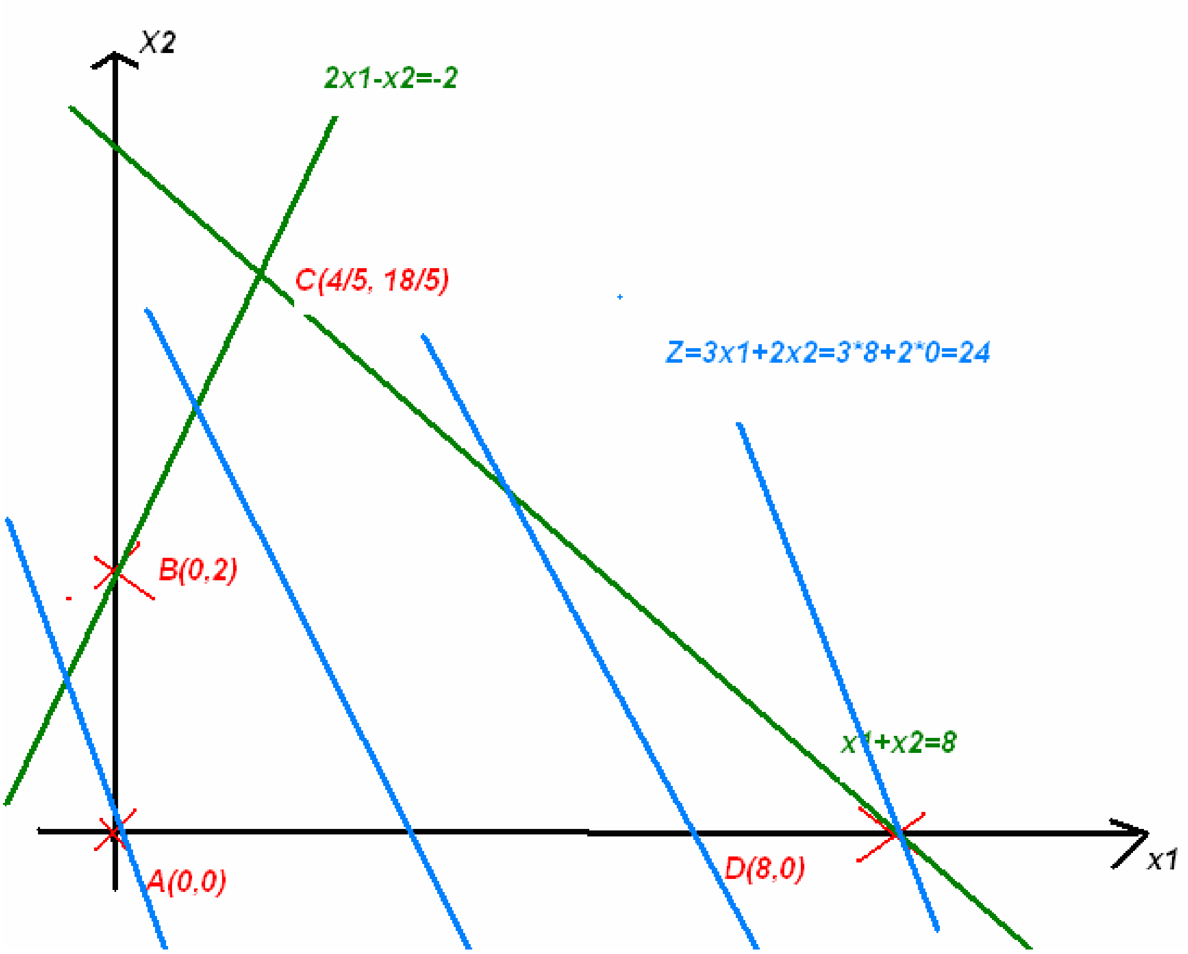
$$x_1 + 2x_2 = 8 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \\ x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 8 \end{array} \right.$$



Max Z = x_2



Max Z = $3x_1 + 2x_2$



Soluciones óptimas múltiples o alternativas

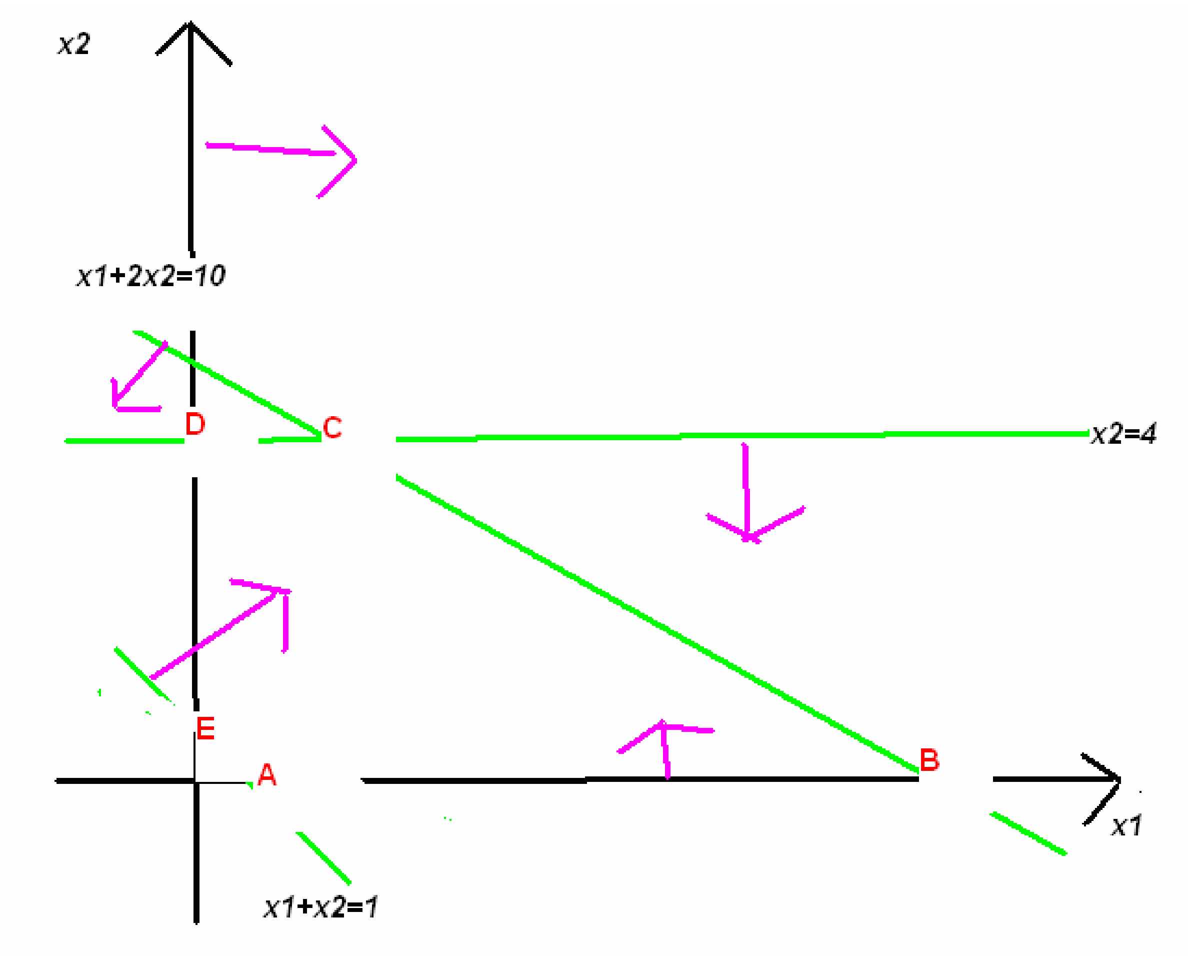
Max $Z = x_1 + 2x_2$

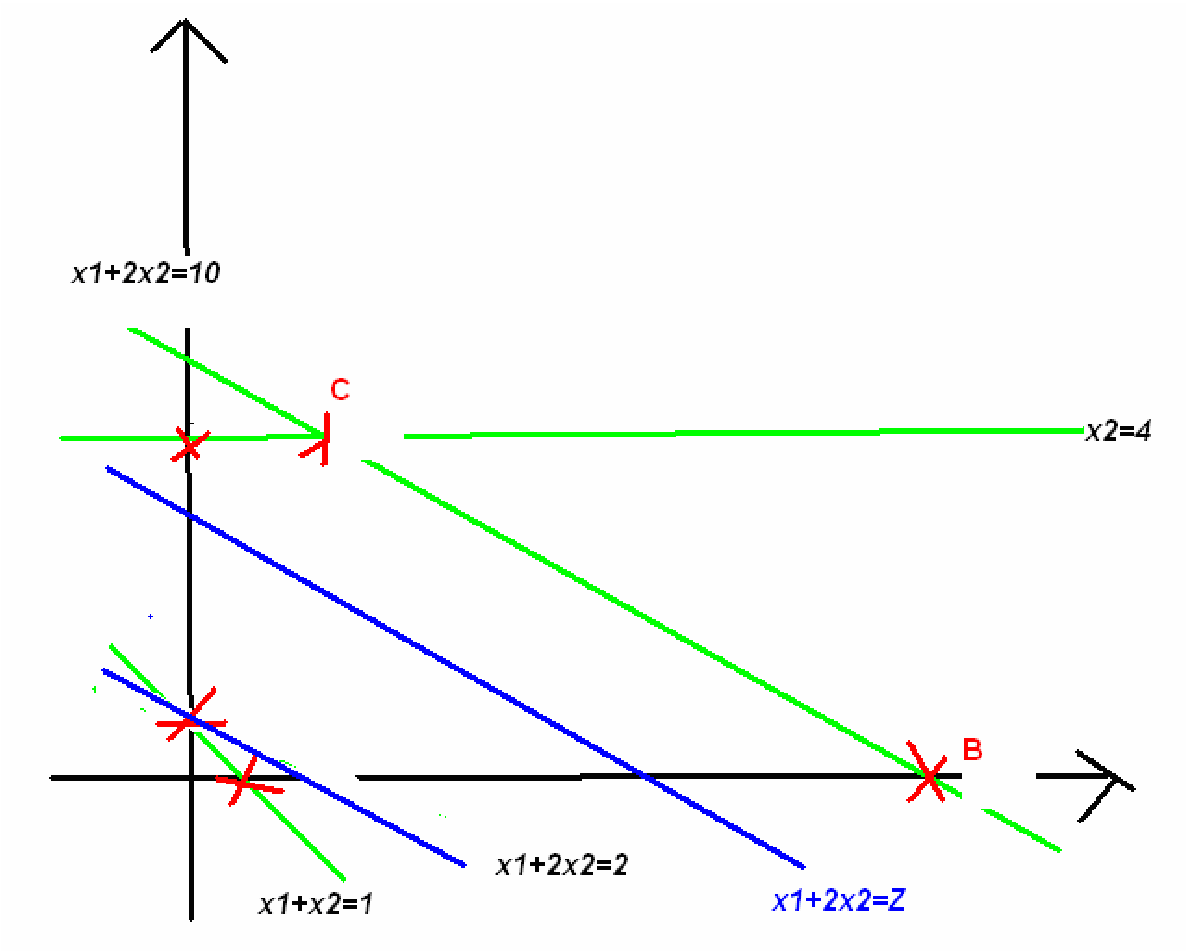
Sujeto a $x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$





Todos los puntos de la línea BC son soluciones óptimas.

Solución no acotada

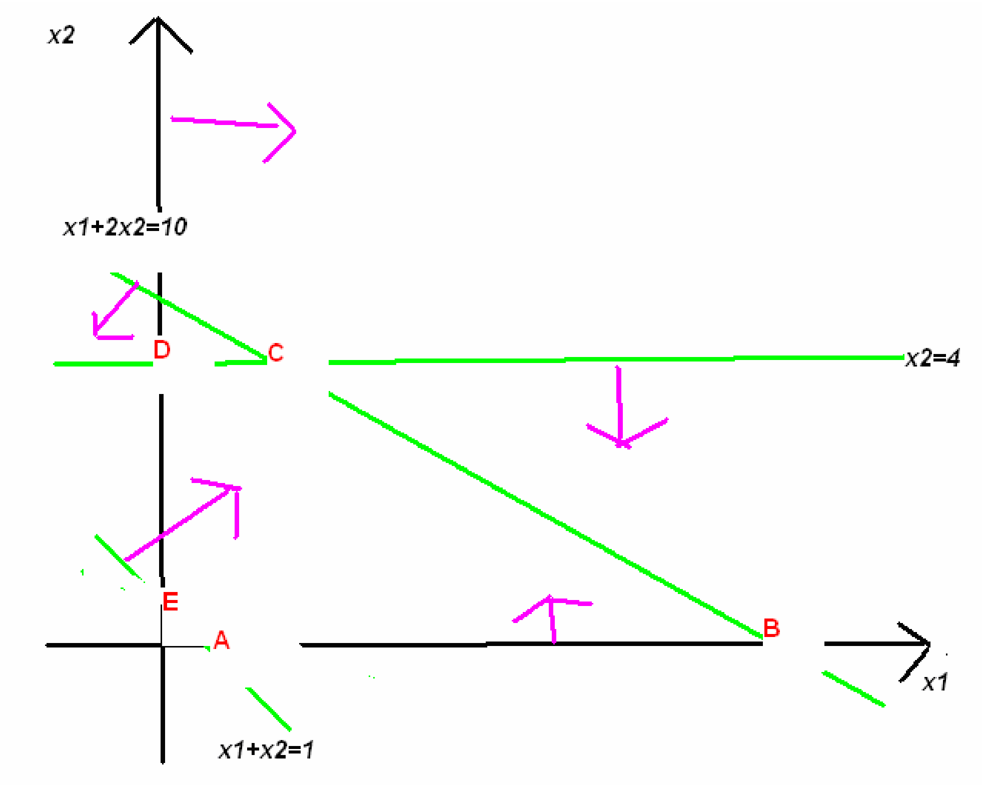
En una situación real no existe. Ej: construcción pisos

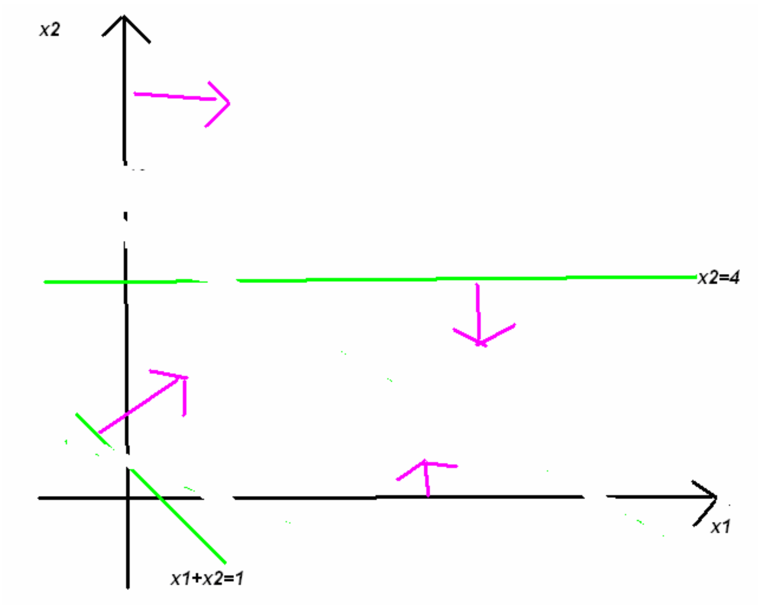
Max $Z = x_1 + 2x_2$

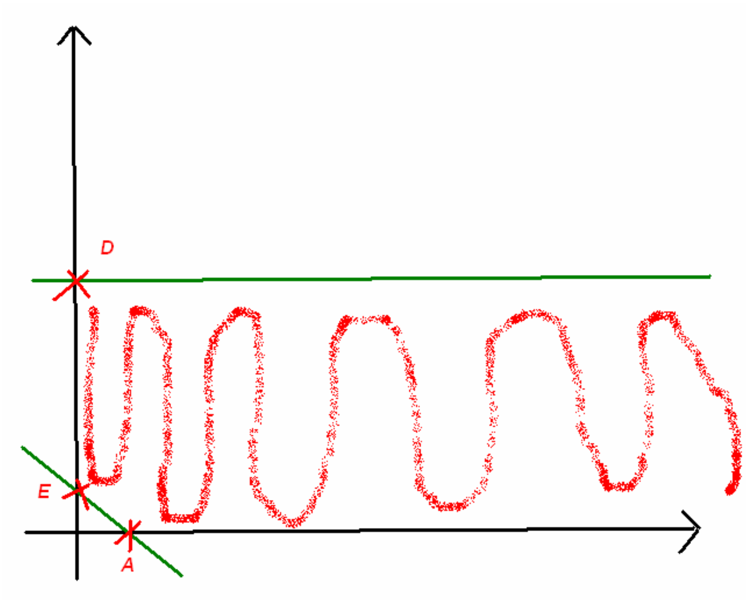
Sujeto a $x_1 + x_2 \geq 1$

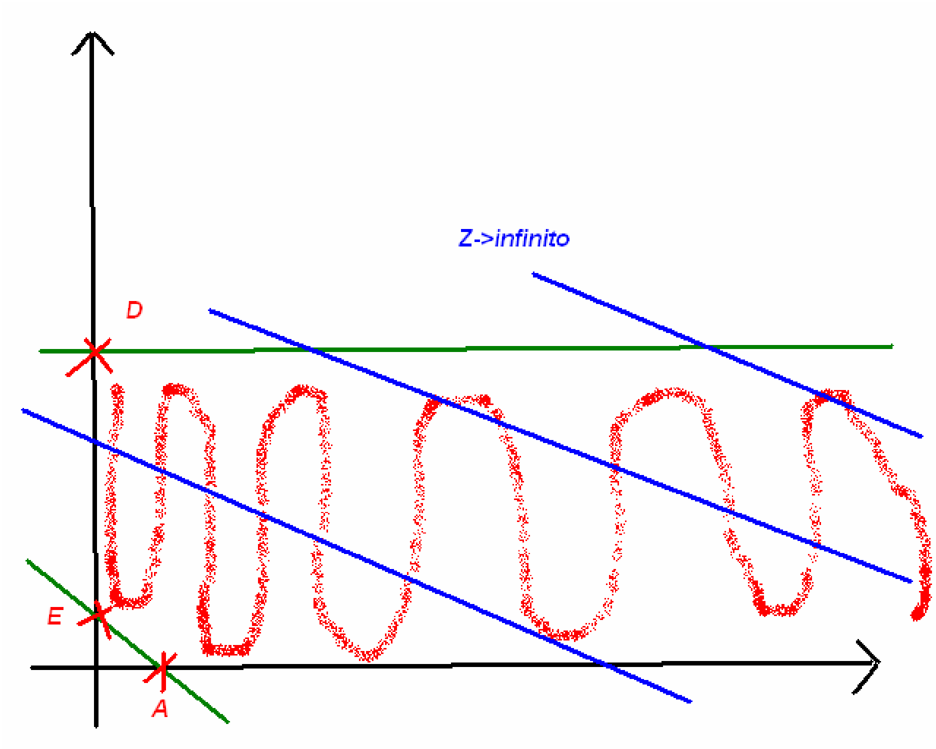
$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$




x2
x2=4
x1
x1+x2=1


D
E
A



$Z_{OPT} \rightarrow +\infty$

No existe óptimo finito. El p.p.l. se dice que tiene solución no acotada. En este caso porque queremos Max Z, si fuese Min Z la solución sería el punto A

Problema no factible

Min $Z = x_1 + x_2$

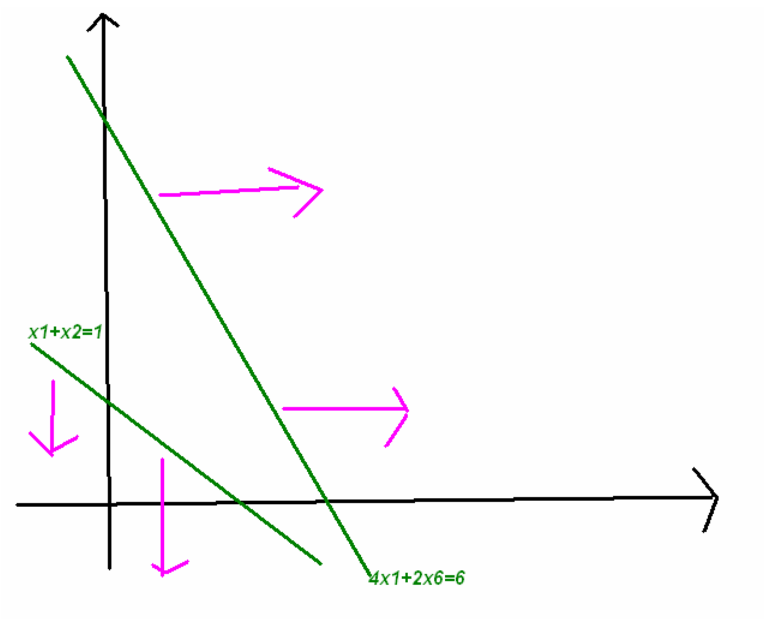
Sujeto a $x_1 + x_2 \leq 1$

$4x_1 + 2x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 = 1$ pasa por los puntos (0,1) y (1,0)

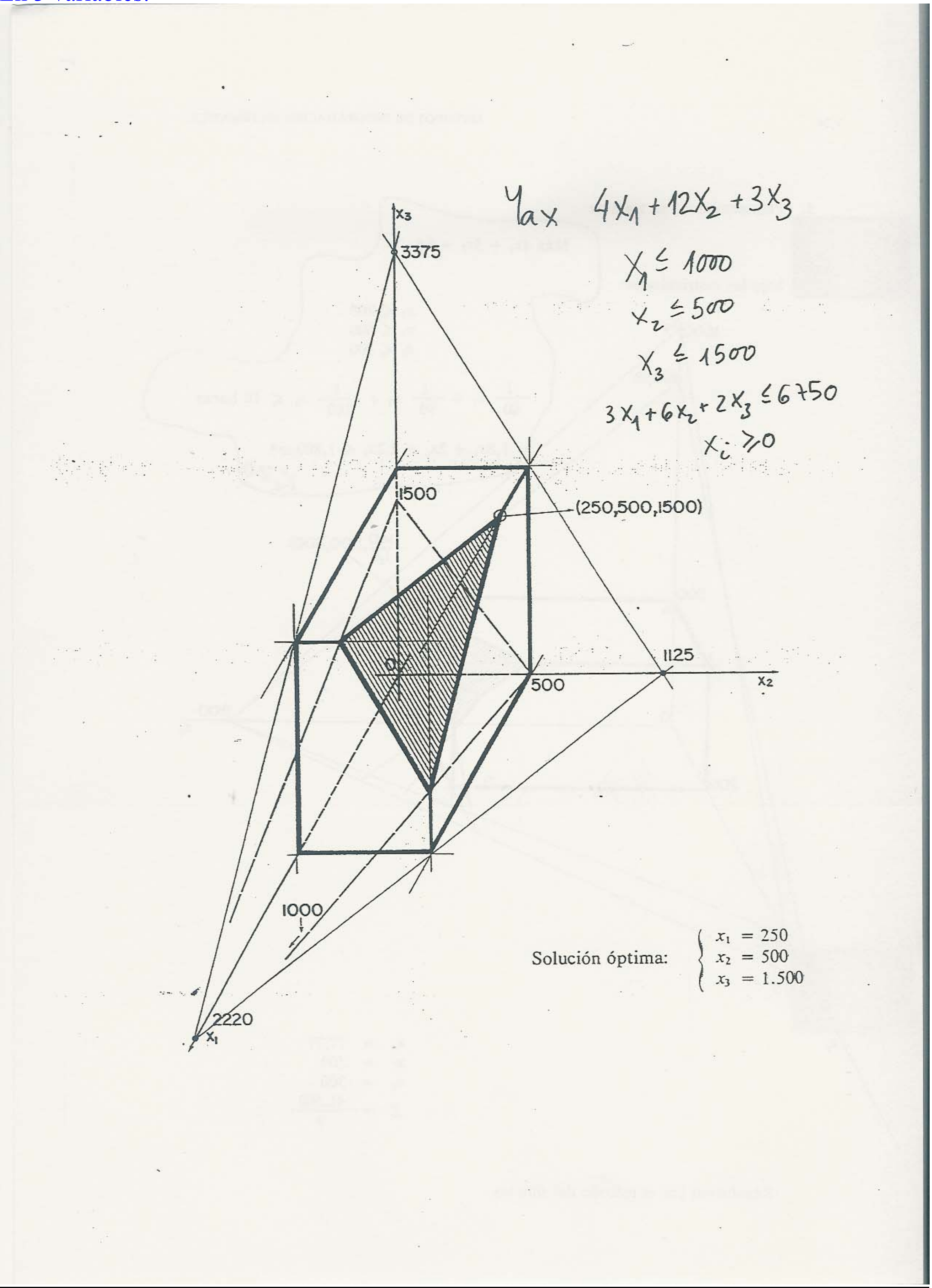
$4x_1 + 2x_2 = 6$ pasa por los puntos (0,3) y (1.5,0)



No hay intersección entre los dos planos → no hay ninguna solución que cumpla las restricciones.

R = Ø

En 3 variables:



5. Planteamiento: se trata de

$$\text{Máx } 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

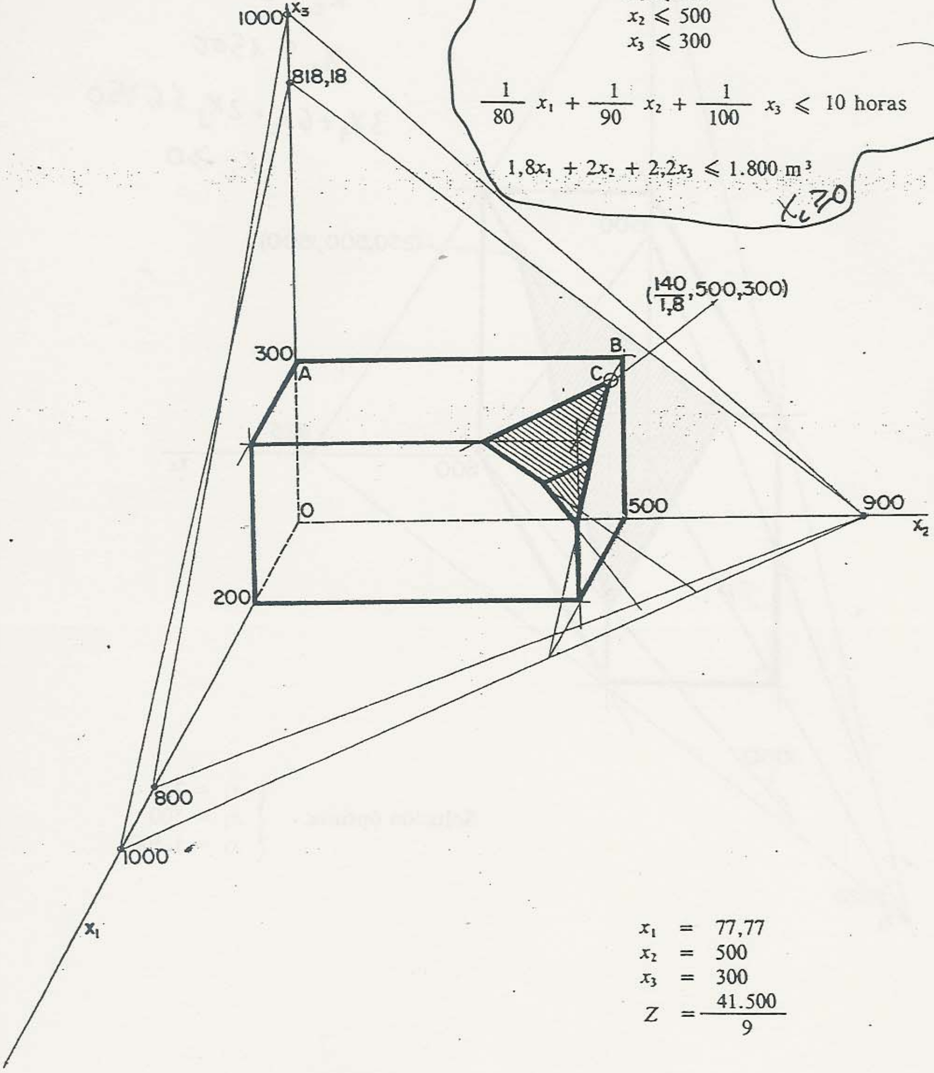
bajo las restricciones:

$$x_1 \leqslant 200$$
$$x_2 \leqslant 500$$
$$x_3 \leqslant 300$$

$$\frac{1}{80}x_1 + \frac{1}{90}x_2 + \frac{1}{100}x_3 \leqslant 10 \text{ horas}$$

$$1{,}8x_1 + 2x_2 + 2{,}2x_3 \leqslant 1.800 \text{ m}^3$$

$x_i \geqslant 0$



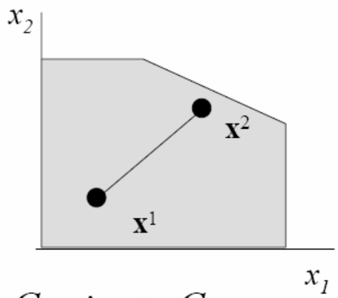
$$x_1 = 77{,}77$$
$$x_2 = 500$$
$$x_3 = 300$$
$$Z = \frac{41.500}{9}$$

Resolución por el método del simplex.

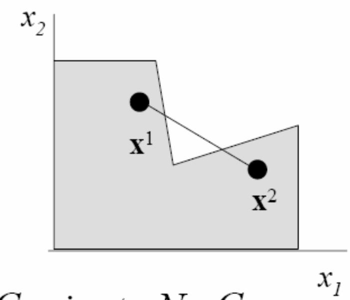
Resumen-→

Conjunto convexo

- Un conjunto de puntos, S, es un conjunto convexo si el segmento de línea que une <u>cualquier</u> par de puntos en S está completamente contenido en S.



Conjunto Convexo



Conjunto No Convexo