Forma estándar de un PPL con m restricciones y n variables

Maximizar (minimizar) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\\
&...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

siendo $b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$

En notación matricial:

Maximizar (minimizar) $Z = c\,X$

$$
\begin{aligned}
A\,X &= b\\
X &\geq 0\\
(b &\geq 0)
\end{aligned}
$$

siendo:

$$
\underset{(m \times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{(n \times 1)}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underset{(m \times 1)}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{(1 \times n)}{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)
$$

(Un vector $X \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, ..., n$)

$A \equiv$ matriz de coeficientes
$X \equiv$ vector ***solución***, de actividades o decisiones
$b \equiv$ vector de restricciones, recursos o ***constantes de la derecha***
$c \equiv$ vector de costes o beneficios o ***coeficientes de la función del objetivo***

$$Z = cX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

Ejemplo: (que incumple la forma estándar)

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ \text{Sujeto a } \quad & -3x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \quad ① \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \quad ② \\ & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -7 \quad ③ \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ cq signo} \end{aligned}$$

1º) modificamos las variables, trabajamos con y_i :

$$y_1 = x_1 \geq 0$$
$$y_2 = -x_2 \geq 0$$
$$x_3 = y_3 - y_4 \ \text{ con } y_3, y_4 \geq 0$$

2º) ③ $3x_1 + x_2 - 2x_3 = -7 \Rightarrow -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$

$$-3y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 = 7$$

① $-3x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \Rightarrow -3y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 = 5, \quad y_5 \geq 0$

② $-x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \Rightarrow -y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_6 = 10, \quad y_6 \geq 0$

y_5, y_6 se llaman **variables de holgura.**

3º) $\text{Max } Z = 2y_1 - 3y_2 - 4y_3 + 4y_4$

$$\begin{aligned} & -3y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 = 5 \\ & -y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_6 = 10 \\ & -3y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 = 7 \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6 \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo:
$$\left.\begin{array}{ll}(a) & -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ (b) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 4\end{array}\right\}$$

Más incógnitas que soluciones $\Rightarrow$ ∞ soluciones

$A \equiv$ matriz m x n

$m > n \Rightarrow$ no hay solución

$n > m \Rightarrow$ hay ∞ soluciones

$n = m \Rightarrow$ hay una solución

La colección de todas las posibles soluciones de un conjunto de ecuaciones lineales se denomina **conjunto solución**.
Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** si ambos tienen el mismo conjunto solución.

(a) ✸ (-1)

$$\left.\begin{array}{ll} & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ (b) = & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 4\end{array}\right\}$$ Sistema equivalente al anterior

(a) ✸ ½

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \tfrac{1}{2} x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 - \tfrac{1}{2} x_4 + \tfrac{1}{2} x_5 = 1 \\ (b) - (a) \\ 5/2\, x_2 + 5/2\, x_3 - \tfrac{1}{2} x_4 + 3/2\, x_5 = 3\end{array}\right\}$$ Sistema equivalente al anterior

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \tfrac{1}{2} x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 - \tfrac{1}{2} x_4 + \tfrac{1}{2} x_5 = 1 \\ (b) ✸ 2/5 \\ x_2 + x_3 - 1/5\, x_4 + 3/5\, x_5 = 6/5\end{array}\right\}$$ Sistema equivalente al anterior

(a) + ½ (b)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \quad + x_3 - 6/10\, x_4 + 6/10\, x_5 = 16/10 \\ x_2 + x_3 - 1/5\, x_4 + 3/5\, x_5 = 6/5\end{array}\right\}$$ Sistema equivalente al anterior

Ahora eligiendo $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ queda:

$x_1 = 16/10$

$x_2 = 6/5$

que es solución de todos los sistemas equivalentes que hemos estado construyendo. Es una de las infinitas soluciones.

Definiciones

Un sistema de ecuaciones se dice **canónico** si en cada ecuación aparece una **variable básica**, que es aquella que posee en dicha ecuación coeficiente 1 y en las otras ecuaciones coeficiente 0.

Las variables que no cumplan esto se llaman **variables no básicas**.

$$\left.\begin{array}{llllll} x_1 & & +2x_3 & & +3x_5 & -7x_6 = 5 \\ & x_2 & +3x_3 & & +2x_5 & +1/3\,x_6 = 4 \\ & & -5x_3 & +x_4 & +3x_5 & -20/12\,x_6 = 100/31 \end{array}\right\}$$

x_1, x_2, x_4 <u>variables básicas</u>

x_1 variable básica respecto a la 1ª ecuación

x_2 variable básica respecto a la 2ª ecuación

x_4 variable básica respecto a la 3ª ecuación

x_3, x_5, x_6 <u>variables **no** básicas</u>

por tanto es un sistema de ecuaciones canónico.

Un **pivotaje** es una sucesión de operaciones elementales que reduce un sistema de ecuaciones dado a uno equivalente canónico.

Solución básica es la solución que se obtiene de un sistema canónico eligiendo para las variables no básicas el valor cero, y resolviéndolo para las básicas.

(ejemplo anterior)

$$x_3 = x_5 = x_6 = 0$$
$$x_1 = 5,\ x_2 = 4,\ x_4 = 100/31$$

Si los valores de las variables básicas son <u>no</u> negativos, se llama <u>**solución factible básica**. (s.f.b)</u>

Si el sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$n > m$

nº de sol básicas posibles $\leq \binom{n}{m}$ Nº combinatorio, aunque sea muy grande siempre es finito

A partir de este sistema, mediante el pivotaje obtenemos un sistema canónico, por tanto una variable básica en cada ecuación. Cada vértice de la figura es una solución factible básica.

Tema 2. El método del Simplex.

George B. Dantzig (1947).

Esquema básico de funcionamiento del método del Simplex.

El método del simplex es un procedimiento iterativo para resolver problemas de programación lineal (p.p.l.) expresados en forma estándar:

$$Z = cx$$
$$Ax = b \quad (b \geq 0)$$
$$x \geq 0$$

El método requiere que las ecuaciones de las restricciones conformen un sistema canónico con una solución factible básica fácil de obtener.

PASOS GENERALES:

1. Empezar con una solución factible básica (s.f.b.) inicial obtenida del sistema de ecuaciones expresado en forma canónica.
2. Mejorar dicha solución si ello es posible.
3. Repetir hasta encontrar la mejor solución factible básica (solución óptima).

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \\ \text{Sujeto a} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \quad\quad = 8 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 = 7 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

está en forma estándar → todas las variables son ≥ 0
todas las restricciones son igualdades (=)
las constantes de la derecha son ≥ 0

<u>Tenemos</u> x_4 variable básica de la primera ecuación
x_5 variable básica de la segunda ecuación

Solución básica inicial:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 8 \quad \geq 0 \\ x_5 = 7 \quad \geq 0 \end{cases} \quad \text{solución factible básica}$$

Z = $5 \cdot 0+2 \cdot 0+3 \cdot 0-1 \cdot 8+1 \cdot 7 =$ **-1**

Ahora hay que examinar si esta solución es **óptima**. Si lo es, hemos acabado. En caso de que no lo sea, se va a calcular una s.f.b. adyacente (difiere de la anterior en una variable básica).

Var Básica → Var NO Bás	(>0) → (=0)
Var NO Bás → Var Básica	(=0) → (>0)

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 8$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 7$$

s.f.b. actual $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ variables no básicas
$x_4 = 4,\ x_5 = 7$ variables básicas

Vamos a aumentar x_1 manteniendo $x_2 = x_3 = 0$

$$x_1 + \quad x_4 \quad = 8 \Rightarrow \quad x_4 = 8 - x_1 \ (*)$$
$$3x_1 \quad + x_5 = 7 \Rightarrow \quad x_5 = 7 - 3\,x_1 \ (**)$$

Si $x_1=1 \Rightarrow x_4 = 7,\ x_5 = 4$

Z = $5 \cdot 1+2 \cdot 0+3 \cdot 0-1 \cdot 7+1 \cdot 4$ **= 2** No es sol. óptima, hay que calcular una adyacente

Así pues el beneficio relativo de x_1, $\Delta x_1=1 \rightarrow \Delta Z = 2 - (-1) = 3$

El **beneficio relativo de una variable no básica** es el cambio que se produce en la función del objetivo por unidad aumentada en dicha variable no básica.

$$(*) \quad x_4 = 8 - x_1 \Rightarrow x_4 < 0 \ \text{ si } \ x_1 > 8$$
$$(**) \quad x_5 = 7 - 3\,x_1 \Rightarrow x_5 < 0 \ \text{ si } \ x_1 > 7/3$$

$x_1 > 8$ y $x_1 > 7/3$ son las ecuaciones que limitan el crecimiento de x_1

Entonces no podrá se mayor del mínimo: máximo valor posible para $x_1 = \mathit{mín}\{8, 7/3\}$.

Si $x_1 = 7/3 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_4 = 17/3 \\ x_2 = x_3 = 0 \end{array}\right\}$ ***Sol. Fact. Básica adyacente*** de la anterior

y $Z = 6$ el valor de la función objetivo aumenta en 7 unidades

Ahora, de nuevo hay que comprobar si esta s.f.b. es óptima. Si no, hay que mejorarla.

RESUMEN (problema de maximización)

1. Empezar con una solución factible básica inicial obtenida a partir del sistema de restricciones en forma canónica.
2. Comprobar si la solución factible básica es óptima. Para ello calcular los beneficios relativos de las variables no básicas (éstos representan el cambio neto en el valor de la función del objetivo por unidad aumentada en dicha variable).
   Si estos beneficios relativos (de todas las variables no básicas) son ≤ 0, la solución actual es **óptima**. En otro caso, seguir (hasta que se cumpla lo anterior).
3. Seleccionar una variable no básica como nueva variable básica en la solución. La regla general será seleccionar la variable no básica con el **mayor** beneficio relativo.
4. Determinar la variable básica que sustituya a la no básica. Esto se hace mediante la **regla de la mínima proporción**:
   Examinamos las restricciones. Para aquellas en las que la variable no básica tiene coeficiente positivo, el límite que puede alcanzar dicha variable viene dado por el cociente entre la constante de la derecha de dicha restricción y ese coeficiente positivo.
5. Resolver el nuevo sistema y volver al paso 2.

Si por el contrario el problema es de minimización, cambiarían el paso 2 y el 3:

2. Si todos los beneficios relativos son $\geq$ **0**, la solución actual es óptima.
3. ...seleccionar la variable no básica con el **menor** ...

El método del Simplex por tablas.

Max $\quad Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \quad &= 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \quad + x_5 &= 7 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

	C_j	5	2	3	-1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$ (*ctes*)
-1	x_4	1	2	2	1	0	8
1	x_5	3	4	1	0	1	7

De la tabla se obtiene:
variables básicas = ctes, el resto (no básicas) = 0.

$x_4 = 8$
$x_5 = 7$
$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$$Z = C_B \bullet \bar{b} = (-1, 1) \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = -8+7 = -1$$

Para ver si la s.f.b. es óptima, necesitamos los beneficios relativos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_j = c_j - c_B \bar{P}_j$$

Columna de X_j

siendo C_B el vector de variables básicas, (-1,1), y c_j los coeficientes de la función del objetivo

Solución óptima si $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j$ (Regla de parada)

$$\bar{C}_1 = 5 - (-1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 - (-1+3) = 3$$

$$\bar{C}_2 = 2 - (-1,1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 - (-2+4) = 0$$

beneficio relativo

$$\bar{C}_3 = 3 - (-1,1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - (-2+1) = 4$$

(si x_3 crece una unidad, Z crece 4)

$\overline{C}_4 = \overline{C}_5 = 0$ (siempre son 0, no hace falta calcularlo)

Tabla 1

	C_j	5	2	3	-1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	x_4	1	2	2	1	0	8 →
1	x_5	3	4	1	0	1	7
	$\overline{c}_j$	3	0	4 ↑	0	0	Z = -1

$\overline{C}_j \geq 0 \Rightarrow$ la s.f.b actual no es óptima

Hay que calcular una s.f.b adyacente:

• Una v. no básica entra en la base
• Una v. básica sale de la base

Criterio de entrada: max $\{\overline{C}_j > 0\} \rightarrow \max\{3,4\} = 4 \Rightarrow$ entra x_3 (en la base)
Criterio de salida: mínima proporción

Min $\{8/2,\ 7/1\} = 8/2 \Rightarrow$ sale x_4

y el 2 es el pivote

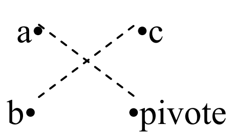
Tabla 2.

	C_j	5	2	3	-1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3	x_3	½	1	1	½	0	4
1	x_5	5/2	3	0	- ½	1	3 →
	$\overline{c}_j$	1 ↑	- 4	0	- 2	0	Z = 15

• Fila del privote → se divide por el pivote
• Cualquier otra fila = fila anterior – (elemento de la columna del pivote) x (nueva fila pivote)

✓ (3,4,1,0,1,7) – (1)(½,1,1,½,0,4) = (3,4,1,0,1,7)-(½,1,1,½,0,4) = (5/2,3,0,-½,1,3)
✓ (3,0,4,0,0) – (4)(½,1,1,½,0) = (3,0,4,0,0) - (2,4,4,2,0) = (1,-4,0,-2,0)
✓ $Z = C_B \cdot \overline{b} = (3,1)\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = 12+3 = 15$

Regla del cuadrado:



$$a' = a - \frac{b \bullet c}{pivote}$$

Nueva solución que se obtiene de la tabla:

$x_3 = 4$ $\qquad x_5 = 3$ $\qquad x_1 = x_2 = x_4 = 0$

$$Z = c_B \bullet \bar{b} = (3,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 + 3 = 15$$

Como $\bar{c}_1 > 0$ la tabla 2 no es óptima.

<u>Criterio de entrada:</u> $\max\{\bar{c}_j > 0\} \Rightarrow$ entra x_1

<u>Criterio de salid</u>a min {4/(½), 3/(5/2)} = min {8, 6/5} = 6/5 $\Rightarrow$ sale x_5 y pivote 5/2

<u>Tabla 3</u>.

	C_j	5	2	3	-1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3	x_3	0	2/5	1	3/5	-1/5	17/5
5	x_1	1	6/5	0	-1/5	2/5	6/5
	$\bar{C}_j$	0	-26/5	0	-9/5	-2/5	Z = 81/5

Todos los $\bar{c}_j$ son $\leq 0 \Rightarrow$ ésta es la solución óptima

$x_1 = 6/5$ $\qquad x_2 = 0$ $\qquad x_3 = 17/5$ $\qquad x_4 = x_5 = 0$

Z = 81/5 es el valor óptimo del problema

<u>Resumen (Problema de maximización).</u>

1. Expresar el problema en forma estándar.
2. Obtener una s.f. básica inicial y construir la 1ª tabla.
3. Construir la fila de los $\bar{c}_j$ ($\bar{c}_j = c_j - c_B \bar{P}_j$)
4. Si todos los $\bar{c}_j \leq 0$, la solución actual es óptima. En otro caso, hacer entrar en la base la variable con mayor valor $\bar{c}_j$ positivo.
5. Aplicar la regla de la mínima proporción para ver qué variable deja la base.
6. Efectuar el pivotaje para obtener la nueva tabla y la nueva solución factible básica.

7. Volver al paso 4.

Problema de minimización (ídem. Sólo cambia el punto 4)

4. Si todos los $\bar{c}_j \geq 0 \Rightarrow$ solución óptima. En otro caso, entra en la base aquella variable con valor $\bar{c}_j$ negativo más pequeño.

También puede tenerse en cuenta que **Min Z <=> Max (-Z)**

Se resuelve Max (-Z). La solución de los dos problemas será la misma, mientras que el valor de Z óptimo cambia en el signo.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{sujeto a} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
&\qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\
&\qquad\qquad x_1 - x_2 \leq 3 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

pasamos a la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 \\
&\text{sujeto a} \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
&\qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14 \\
&\qquad\qquad x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,5
\end{aligned}
$$

	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	-1	2	1	0	0	4
0	x_4	3	2	0	1	0	14
0	x_5	1	-1	0	0	1	3 →
	$\bar{C}_j$	3 ↑	2	0	0	0	Z = 0

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 14, x_5 = 3$ vértice A

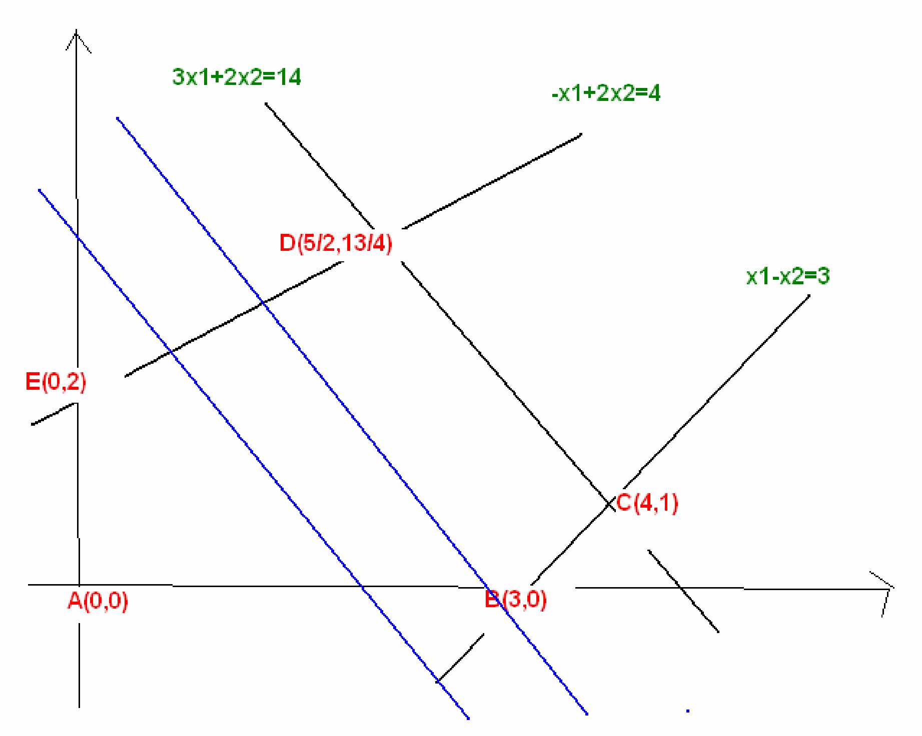
	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	0	1	1	0	1	7
0	x_4	0	5	0	1	-3	5 →
3	x_1	1	-1	0	0	1	3
	$\bar{C}_j$	0	5 ↑	0	0	-3	Z = 9

$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 7, x_4 = 5, x_5 = 0$ vértice B

	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	0	0	1	- 1/5	8/5	6
2	x_2	0	1	0	1/5	- 3/5	1
3	x_1	1	0	0	1/5	2/5	4
	$\bar{C}_j$	0	0	0	-1	0	Z = 14

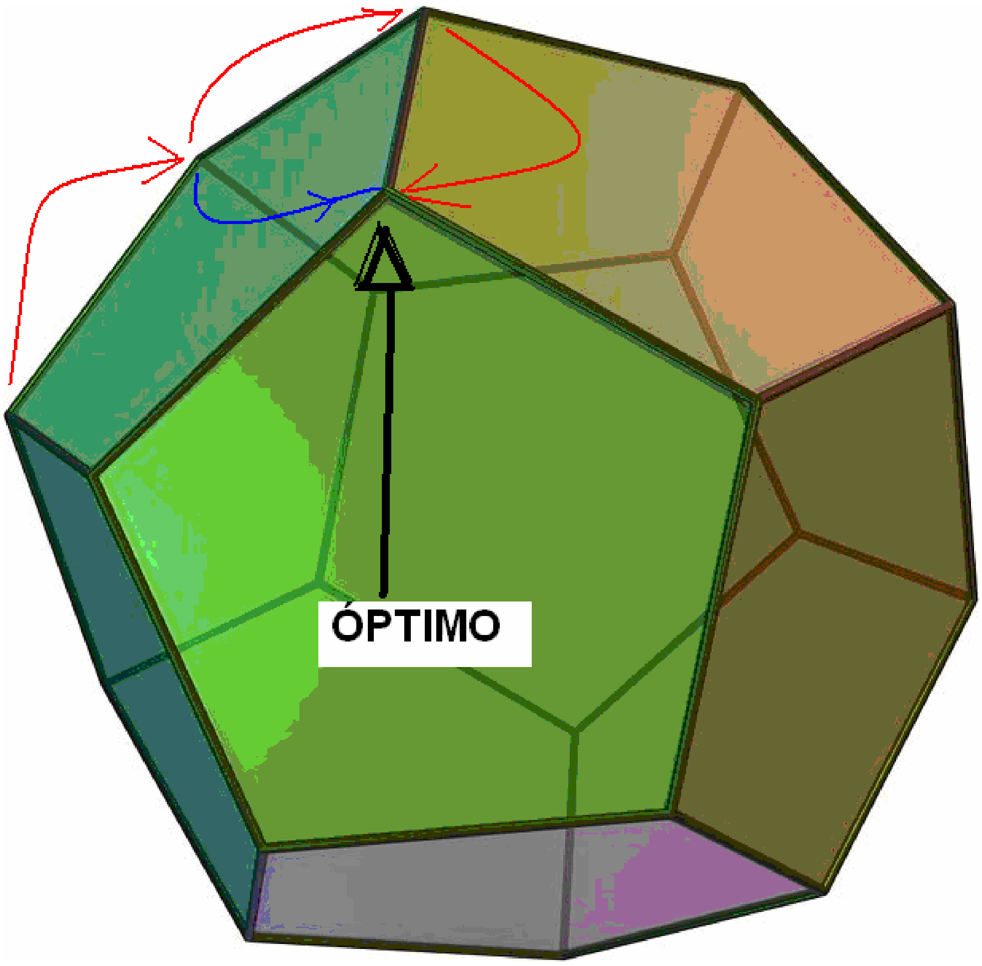
$x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 6,\ x_4 = x_5 = 0$ vértice C

$Z = 14$ Solución optima (todos los $\bar{C}_j \leq 0$)



Equivalencias

Tabla	→	Tabla siguiente
s.f.b.	→	s.f.b adyacente
vértice	→	vértice adyacente


ÓPTIMO

Óptimo alternativo.

En la tabla 3, x_5 tiene beneficio relativo cero. Esto significa:

$$\Delta x_5 = 1 \Rightarrow \Delta Z = 0$$

Si hacemos entrar en la base a x_5:

criterio de salida min $\{6/(8/5), 4/(2/5)\} = 30/8 \quad \Rightarrow$ sale x_3

Tabla 4:

	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_5	0	0	5/8	- 1/8	1	15/4
2	x_2	0	1	3/8	1/8	0	13/4
3	x_1	1	0	- 1/4	1/4	0	5/2
	$\bar{c}_j$	0	0	0	- 1	0	Z = 14

Solución óptima alternativa: $x_1 = 5/2, \quad x_2 = 13/4, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 15/4$

En general, una solución óptima alternativa viene indicada siempre que exista una variable no básica cuyo beneficio relativo ($\bar{c}_j$) es cero en la tabla óptima.

Si los $\bar{c}_j$ de las variables no básicas son $< 0 \Rightarrow$ óptimo único (maximizando)

Id. > 0 id. (minimizando)

Problemas de cálculo.

Empates en la selección de variables no básicas

Si existe más de una variable con $\bar{c}_j > 0$ máximo $\Rightarrow$ se coge uno cualquiera o el primero de todos (en un problema de maximización).

Si existe más de una variable con $\bar{c}_j < 0$ máximo $\Rightarrow$ se coge uno cualquiera o el primero de todos (minimización).

$\bar{c}_j$ . . . . • 7 .....•5•.....•7•.....•3•.....

<0 <0 <0

Empates en el criterio de salida.

(empate en la regla de la mínima proporción)

Ejemplo:

$$\text{Max } Z = 2x_4 + 3/2\, x_6$$

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & & + x_4 - x_5 & & = 2 \\ & x_2 & & + 2\, x_4 & + x_6 & = 4 \\ & & x_3 & + x_4 + x_5 & + x_6 & = 3 \end{array}$$

$$x_i \geq 0$$

	C_j	0	0	0	2	0	3/2	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	x_1	1	0	0	1	-1	0	2
0	x_2	0	1	0	2	0	1	4
0	x_3	0	0	1	1	1	1	3
	$\overline{C}_j$	0	0	0	2	0	3/2	Z = 0

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
2	x_4	1	0	0	1	-1	0	2
0	x_2	-2	1	0	0	2	1	0
0	x_3	-1	0	1	0	2	1	1
	$\overline{C}_j$	-2	0	0	0	2	3/2	Z = 4

Solución factible básica DEGENERADA

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
2	x_4	0	1/2	0	1	0	1/2	2
0	x_5	-1	1/2	0	0	1	1/2	0
0	x_3	1	-1	1	0	0	0	1
	$\overline{C}_j$	0	-1	0	0	0	1/2	Z = 4

Solución factible básica DEGENERADA

¿Debemos parar o seguir?

¿es posible?

Tabla n_1

•

•

•

•

Tabla $n_2 = n_1$

Esto último se llama **<u>ciclaje.</u>**

A día de hoy, sólo se conocen "dos" ejemplos de problemas que ciclen. (Descontando los que aparecen en los exámenes)

Resumen.

Empate en el criterio de salida ⇒ s.f.b. degenerada ⇒ + iteraciones ⇒ + trabajo ⇒ ciclaje (en la vida real continuar hasta llegar a la solución óptima).

Técnicas que evitan ciclaje ⇒ las hay pero no "suelen" utilizarse.

Probabilidad de encontrarse con un problema que cicle en la vida real = Probabilidad de encontrarse con un politico honrado = Probabilidad de que los extraterrestres te lleven en su platillo….

Soluciones no acotadas.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeto a: $x_1 - x_2 \leq 2$

$-3x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

	C_j	2	3	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_3	1	-1	1	0	2
0	x_4	-3	1	0	1	4 →
	$\bar{C}_j$	2	3 ↑	0	0	Z = 0

$x_1 = 0, x_2 = 0$ **(vértice A)**

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_3	-2	0	1	1	6
0	x_2	-3	1	0	1	4
	$\bar{C}_j$	11 ↑	0	0	-3	Z = 12

$x_1 = 0, x_4 = 4$ **(vértice B)**

Entra x_1, y ¿cuál sale?

Habría que calcular la regla de la mínima proporción, pero en x_1 son todos menores de cero, por tanto **solución no acotada**.

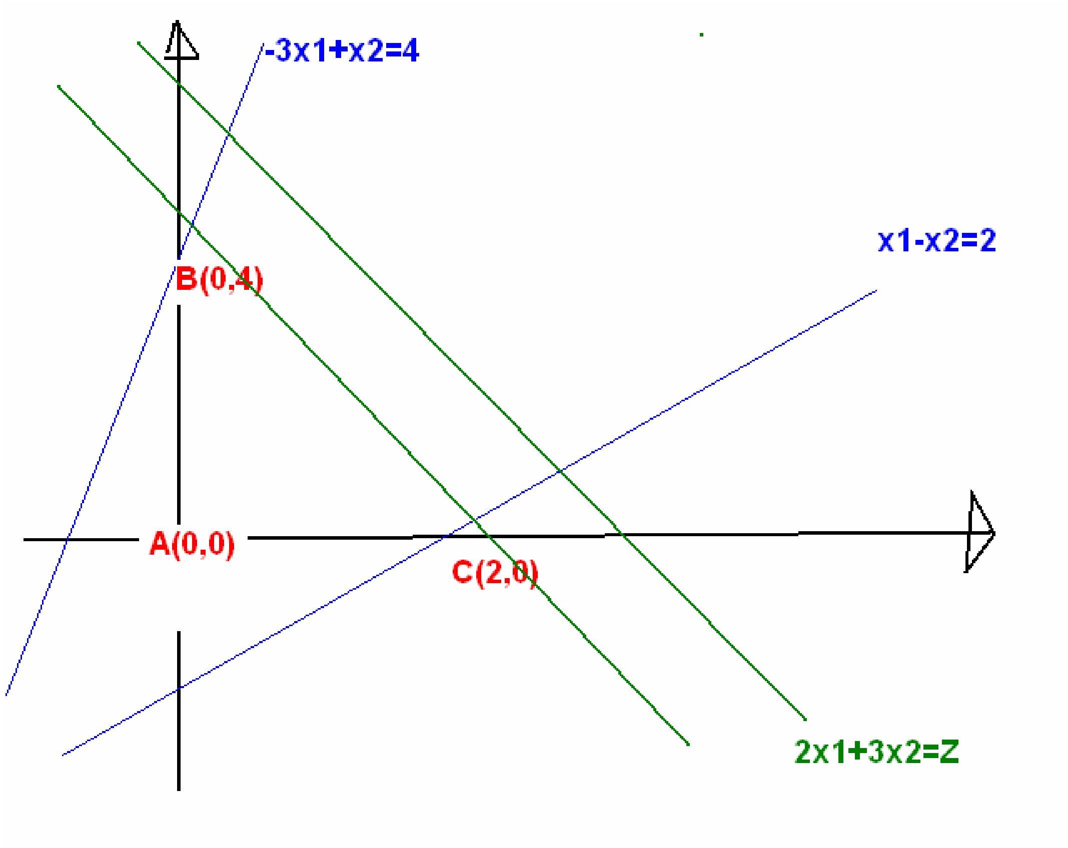
En forma de ecuaciones:

$$-2x_1 + x_3 + x_4 = 6$$
$$-3x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$x_4 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 6 + 2x_1 \\ x_2 &= 4 + 3x_1 \end{aligned}\right\}$$ Si x_1 crece, x_3 y x_2 nunca se hacen cero

Fallo en el criterio de salida $\Rightarrow$ solución no acotada.



Obtención de una solución factible básica inicial: Método de las Dos Fases y Método de las Penalizaciones.

1. **Método de ensayo y error (No se suele usar).**
2. **Uso de variables artificiales.**

Ejemplo:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$
$$2x_1 - x_3 = -1$$
$$x_i \geq 0$$

Pasamos a la forma estándar:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3$$
$$-2x_1 + x_3 = 1$$
$$x_i \geq 0$$

No tenemos una variable básica por ecuación, por lo tanto no podemos empezar a usar el simples. x_4 es variable básica, pero x_5 no es variable básica porque tiene coeficiente negativo.

Introducimos **variables artificiales:**

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + \mathbf{x_6} = 3 \\ -2x_1 + x_3 + \mathbf{x_7} = 1 \end{array}\right\} \text{Sistema artificial}$$
$$x_i \geq 0$$

El sistema artificial tiene una solución factible básica inicial

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad x_4 = 11 \qquad x_5 = 0 \qquad x_6 = 3 \qquad x_7 = 1$$

pero no es solución factible básica del problema de partida.

Ahora bien,
cualquier solución factible básica del sistema artificial con las variables artificiales **iguales a cero** es solución factible básica del sistema de partida.

Por tanto, hay que reducir las variables artificiales para que se hagan cero.

1. MÉTODO DE LAS PENALIZACIONES O DE LA M (PENALTY METHOD, BIG M).

Se le asigna a las variables artificiales un coste (penalización) muy alto en la función objetivo.

En nuestro ejemplo:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3 + M \cdot (\Sigma \text{ variables artificiales } x_6 \text{ y } x_7)$$

Siendo M un coste muy grande, $M>0$, $M \rightarrow \infty$

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3 + M x_6 + M x_7$$

(*Nota*) *Max Z* = $-3x_1 + x_2 + x_3 + (-M) \cdot (\Sigma$ variables artificiales$)$

Siendo M un beneficio muy pequeño, $M<0$, $M \rightarrow -\infty$

	C_j	-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	-4	1	2	0	-1	1	0	3
M	x_7	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$\bar{C}_j$	-3+6M	1-M	1-3M	0	M	0	0	Z = 4M

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	3	-2	0	1	0	0	-1	10
M	x_6	0	1	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$\bar{C}_j$	-1	1-M	0	0	M	0	3M-1	Z = M+1

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	3	0	0	1	-2	2	-5	12
1	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$\bar{C}_j$	-1	0	0	0	1	M-1	M+1	Z = 2

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
-3	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	4
1	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	9
	$\bar{C}_j$	0	0	0	1/3	1/3	M - 1/3	M - 2/3	Z = -2

$Z_{opt} = -2$

Notas:

1) Una vez que una variable artificial es reemplazada por una variable real, no es necesario mantenerla en las tablas
2) Cuando el método termina con una solución óptima en la que hay una o más variables artificiales en la base **mayores que cero** $\Rightarrow$ el problema original no tiene ninguna solución factible, porque no podemos encontrar ninguna solución con las variables del problema de partida
3) En el ordenador M = ? Si el método está programado en ordenador no se trabaja con la letra M. Hay que asignar un valor a la constante M.

2. MÉTODO DE LAS 2 FASES (TWO PHASES).

Se resuelve en dos fases:

Fase 1: Se resuelve el problema

Min W = $\sum$v.artificiales
Sujeto a **sistema artificial**

Si llegamos a que el valor mínimo es cero $\Rightarrow$ W = $\sum$v.artificiales($\geq$0) = 0 $\Rightarrow$ Todas son cero y tenemos una solución factible básica del sistema original.

En caso de que el valor mínimo sea positivo, W > 0 $\Rightarrow$ alguna v.artificial es >0 $\Rightarrow$ el problema original no tiene ninguna solución factible.

Fase 2: La tabla final de la fase 1 pasa a ser la inicial de la fase 2 cambiando la función del objetivo por la original. Se aplica el simplex.

Nota. La fase 1 puede terminar con W_{opt}=0 y alguna variable artificial en la base (que tendrá valor cero).

En este caso, se pasa a la fase 2 (escribiendo su C_j=0) y se procede a echarla de la base aunque para ello se viole el criterio de salida.

En el momento en que haya salido de la base eliminamos su columna.

Fase 1. (Min $W = x_6 + x_7$, sujeto a sistema artificial)

	C_j	0	0	0	0	0	1	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	-4	1	2	0	-1	1	0	3
1	x_7	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$\bar{C}_j$	6	-1	-3	0	1	0	0	W = 4

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	3	-2	0	1	0	0	-1	10
1	x_6	0	1	0	0	-1	1	-2	1
0	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$\bar{C}_j$	0	-1	0	0	1	0	3	W = 1

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_4	3	0	0	1	-2	2	-5	12
0	x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
0	x_3	-2	0	1	0	0	0	1	1
	$\bar{C}_j$	0	0	0	0	0	1	1	W = 0

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 12,\ x_5 = x_6 = x_7 = 0$

Fase 2. (y volvemos a la función objetivo inicial, es decir, valores iniciales de C_j)

	C_j	-3	1	1	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_4	3	0	0	1	-2	12
1	x_2	0	1	0	0	-1	1
1	x_3	-2	0	1	0	0	1
	$\bar{C}_j$	-1	0	0	0	1	Z = 2

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-3	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	4
1	x_2	0	1	0	0	-1	1
1	x_3	0	0	1	2/3	-4/3	9
	$\bar{C}_j$	0	0	0	1/3	1/3	Z = -2

$x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 9,\ x_4 = x_5 = 0 \qquad Z_{opt} = -2$

Ejemplo relativo a la nota anterior:

$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + x_3$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 - x_4 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_5 = 8 & (x_5 \text{ v.holgura}) \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 - x_4 + x_6 = 1 & (x_6 \text{ v.holgura}) \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + x_7 = 4 & (x_7 \text{ v.artificial}) \end{array}$$

Fase 1: Min $W = x_7$

	C_j	0	0	0	0	0	0	1	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_5	4	6	3	0	1	0	0	8
0	x_6	3	-6	-4	-1	0	1	0	1
1	x_7	2	3	-5	-1	0	0	1	4
	$\bar{C}_j$	-2	-3	5	1	0	0	0	W = 4

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_2	2/3	1	1/2	0	1/6	0	0	4/3
0	x_6	7	0	-1	-1	1	1	0	9
1	x_7	0	0	-13/2	-1	-1/2	0	1	0
	$\bar{C}_j$	0	0	13/2	1	1/2	0	0	W = 0

Final fase 1.

Fase 2

se mantiene

	C_j	2	1	1	0	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	x_2	2/3	1	1/2	0	1/6	0	0	4/3
0	x_6	7	0	-1	-1	1	1	0	9
0	x_7	0	0	-13/2	-1	-1/2	0	1	0
	$\bar{C}_j$	4/3	0	1/2	0	-1/6	0	0	Z = 4/3

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	x_2	0	1	25/42	2/21	9/126	-2/21	0	10/21
2	x_1	1	0	-1/7	-1/7	1/7	1/7	0	9/7
0	x_7	0	0	-13/2	-1	-1/2	0	1	0
	$\bar{C}_j$	0	0	29/42	4/21	-5/14	-4/21	0	Z = 64/21

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	x_2	0	1	0	1/273	1/39	-2/21	25/273	10/21
2	x_1	1	0	0	-11/91	2/13	1/7	-2/91	9/7
1	x_3	0	0	1	2/13	1/13	0	-2/13	0
	$\bar{C}_j$	0	0	0	23/273	-16/39	-4/21	29/273	Z = 64/21

No prestamos atención a esta columna

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	x_2	0	1	-1/42	0	1/42	-2/21		10/21
2	x_1	1	0	11/14	0	3/14	1/7		9/7
0	x_4	0	0	13/2	1	1/2	0		0
	$\bar{C}_j$	0	0	-23/42	0	-19/42	-4/21		Z = 64/21

óptima

<u>Comparación entre el Método Big M y el Método de las 2 fases</u>.

- ✓ Igual número de tablas en general.

  ⇓

- ✓ Igual número de cálculos en general.
- ✓ M ≡ "problemas" en el ordenador
- ✓ 2 fases ≡ "problemas" si hay una o más variables artificiales = 0 en la base en la última tabla de la 1ª fase.

Eficiencia computacional del Método del Simplex.

- ✓ El número de tablas es sensible al número de restricciones (Simplex revisado). La rapidez del simplex depende más del número de restricciones que del número de variables.

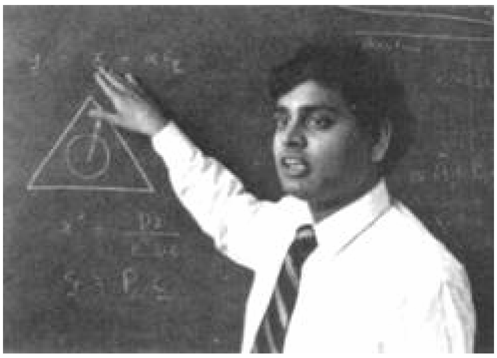
- ✓ Problema de minimizar con muchas variables:

  C_j > 0 >0 >0 ... <0

  la 1ª var con $\overline{C}_j$ <0 entra en la base

- ✓ **Otros métodos:**
  - ➢ Elipsoides (**KHACHIAN**).

  - ➢ Punto interior (Karmarkar).



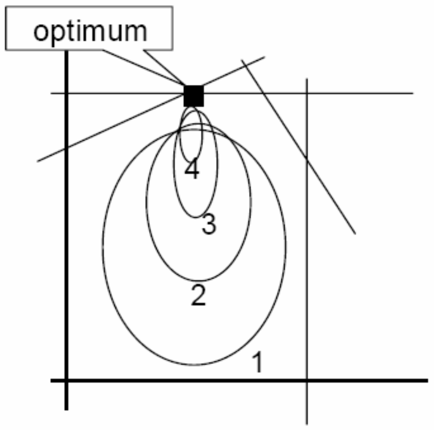


Figure 7.1: Illustration of Khatchian's ellipsoid method.

Khatchian (there are various spellings of this Russian name) introduced the first interior point method in 1979. It is called the ellipsoid method and it works by fitting multidimensional ellipsoids into the feasible region. The axes of the ellipsoid determine the direction for further movement, and the ellipsoids become gradually smaller and smaller as they move farther and farther into the optimum cornerpoint of the feasible region. See Figure 7.1 for an illustration. Khatchian's method was quite slow in practice, much slower than the simplex method, but it was a theoretical breakthrough.

Karmarkar's method appeared in 1984 and was a major development that was reported in newspapers worldwide. Karmarkar's method uses transformations from projective geometry to determine the direction for movement through the interior of the feasible region. It is a very efficient method for very large LPs, but the revised simplex method is faster for small to medium LPs. The reason for this is that each iteration of Karmarkar's method is very costly in terms of computing time, but a complete solution generally requires only a small number of iterations. This trade-off pays off for large LPs, but for smaller LPs, the very quick iterations of the revised simplex method generally arrive at the solution first.