Tema 3: Método del Simplex Revisado.

El método revisado o método del simples con multiplicadores: Conceptos básicos. Vector de Multiplicadores.

Se basa en los mismos principios que el simplex, pero en cada iteración no se calcula toda la tabla, y la información que se necesita para pasar de una solución factible básica a otra se obtiene directamente de las ecuaciones originales.

Información de interés:

* C_j
* columna de la v. que entra
* b

Ejemplo:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$$
$$x_1 - x_2 + x_5 = 3$$
$$x_i \geq 0$$

Tabla 2 $\quad \pi = C_B B^{-1} = (0,0,3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,3)$

Tabla 3 $\quad \pi = C_B B^{-1} = (0,2,3) \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 3/5 \\ 0 & 1/5 & -3 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = (0,1,0)$

	C_j	3	2	0	0	0	
C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	-1	2	1	0	0	4
0	x_4	3	2	0	1	0	14
0	x_5	1	-1	0	0	1	3
	$\bar{C}_j$	3	2	0	0	0	Z = 0

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	0	1	1	0	1	7
0	x_4	0	5	0	1	-3	5
3	x_1	1	-1	0	0	1	3
	$\bar{C}_j$	0	5	0	0	-3	Z = 9

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_3	0	0	1	-1/5	8/5	6
2	x_2	0	1	0	1/5	-3/5	1
3	x_1	1	0	0	1/5	2/5	4
	$\bar{C}_j$	0	0	0	-1	0	Z = 14

C_B	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	x_5	0	0	5/8	-1/8	1	15/4
2	x_2	0	1	3/8	1/8	0	13/4
3	x_1	1	0	-1/4	1/4	0	5/2
	$\bar{C}_j$	0	0	0	-1	0	Z = 14

Desarrollo del método.

El método del simplex revisado trabaja con la **idea fundamental** de que cualquier tabla del simplex correspondiente a una solución factible básica puede generarse directamente de las ecuaciones originales por medio de operaciones matriciales.

$$\begin{aligned} \text{Max (o Min)} \quad Z &= Cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$C = (C_1, C_2, ..., C_n)$ 1 x n $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ n x 1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m x n

m<n

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

m x 1

$$A = [\, P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n \,] \qquad P_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

m x 1

$\forall i = 1, ..., n$

Supongamos que tenemos una solución factible con variables básicas $x_1 \dots x_m$

La matriz básica B será:

$$B = (P_1 \quad \dots \quad P_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

matrix m x m

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \\ x_N \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ xm \\ x_{m+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$x_B \equiv$ variables básicas

$x_N \equiv$ variables no básicas $= 0$

La solución básica actual es $\boxed{x_B = \bar{b} = B^{-1}}b = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix}$

y $x_N = (\ 0\ ).$

$$Z = C \cdot X = (C_B\ C_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = (C_B, C_N) \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} = C_B\, x_B + \cancel{C_N\, x_N} = C_B\, \bar{b}$$

y cualquier columna:

$\bar{P}j = B^{-1} \bar{P}_j$ $\quad\forall$j de las variables no básicas

Se llama **vector de multiplicadores** al vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$

$$\pi = \underbrace{C_B}_{(1xm)}\ \underbrace{B^{-1}}_{(mxm)}$$

A partir de este vector, se pueden calcular los beneficios relativos:

$C_j = C_j - C_B P_j = C_j - C_B B^{-1} P_j = C_j - \pi P_j \quad \forall$j de variables no básicas

Ejemplo:

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ 2x_1 \quad - x_3 &= -1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Min } Z = -3x_1 + x_2 + x_3 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 &= 1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$A = [\, P_1 \quad P_2 \quad \ldots \quad P_6 \,]$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base inicial $\{x_4, x_6, x_7\} \Rightarrow B = (P_4 \; P_6 \; P_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = I \qquad \bar{b} = B^{-1}b = b$

La tabla 1 del método del simplex revisado será:

Base	B^{-1}			$\bar{b}$	
x_4	1	0	0	11	A completar más adelante
x_6	0	1	0	3	
x_7	0	0	1	1	

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = C_B B^{-1} = (C_4, C_6, C_7)\, B^{-1} = (0, M, M) \cdot I = (0, M, M)$

Los beneficios relativos de las variables no básicas:

$\bar{C}_j = C_j - \pi P_j \quad j = 1, 2, 3, 5$

$$\bar{C}_1 = -3 - (0, M, M)\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 + 6M$$

$$\bar{C}_2 = 1 - (0, M, M)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - M$$

$$\bar{C}_3 = 1 - (0, M, M)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 3M$$

$$\bar{C}_5 = 0 - (0, M, M)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

Entra x_3 en la base. La columna pivote es:

$$\bar{P}_3 = B^{-1}P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tabla 1.

Base	B^{-1}			$\bar{b}$	Var. que entra	Columna pivote $\bar{P}_3$
x_4	1	0	0	11		1
x_6	0	1	0	3	x_3	2
x_7	0	0	1	1		1

Regla mínima proporción min$\{^{11}/_1, {}^{3}/_2, {}^{1}/_1\} \Rightarrow$ sale x_7

Nueva base $\{x_4, x_6, x_3\} \Rightarrow B = [P_4 \quad P_6 \quad P_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = B^{-1}\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base	B^{-1}			$\bar{b}$	
x_4	1	0	-1	10	
x_6	0	1	-2	1	
x_3	0	0	1	1	

$\pi = C_B B^{-1} = (C_4, C_6, C_3)\bullet B^{-1} = (0, M, 1)\bullet B^{-1} = (0, M, -2M+1)$

$$\bar{C}_1 = -3 - (0, M, -2M+1)\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$\bar{C}_2 = 1 - M$

$\bar{C}_5 = M$

entra x_2 en la base $\bar{P}_2 = B^{-1}\ P_2 = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tabla 2.

Base	B^{-1}			$\bar{b}$	var que entra	$\bar{P}_2$
x_4	1	0	0	10		-2
x_6	0	1	0	1	x_2	1
x_3	0	0	1	1		0

Regla mínima proporción min$\{^{10}/_{-2},\ ^{1}/_{1},\ ^{1}/_{0}\} \Rightarrow$ sale x_6

Nueva base $\{x_4, x_2, x_3\} \Rightarrow B = [P_4\ \ P_2\ \ P_3] \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base	B^{-1}			$\bar{b}$	
x_4	1	2	-5	12	
x_2	0	1	-2	1	
x_3	0	0	1	1	

$$\pi = (0, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1, -1)$$

$\bar{C}_1 = -1 \Rightarrow$ entra x_1 $\quad \bar{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\bar{C}_5 = 1$

Tabla 3.

Base	B^{-1}			$\bar{b}$	Var que entra	$\bar{P}_1$
x_4	1	2	-5	12		3
x_2	0	1	-2	1	x_1	0
x_3	0	0	1	1		-2

Nueva base $\{x_1, x_2, x_3\}$

Tabla 4.

Base	B^{-1}			$\bar{b}$
x_1	$^1/_3$	$^2/_3$	$-^5/_3$	4
x_2	0	1	-2	1
x_3	$^2/_3$	$^4/_3$	$-^7/_3$	9

$$\pi = (-3, 1, 1)\begin{pmatrix} ^1/_3 & ^2/_3 & -^5/_3 \\ 0 & 1 & -2 \\ ^2/_3 & ^4/_3 & -^7/_3 \end{pmatrix} = [-^1/_3, ^1/_3, ^2/_3]$$

$\bar{C}_4 = {^1/_3}$

$\bar{C}_5 = {^1/_3}$

Por lo tanto, la tabla 4 es óptima y la solución óptima es:

$x_1 = 4$
$x_2 = 1$
$x_3 = 9$
$x_4 = x_5 = 0$

$$Z = C_B \bullet \bar{b} = (-3, 1, 1)\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} = -2$$

Ventajas del método revisado del Simplex doble el método del Simplex regular.

1. El simplex revisado trabaja sobre una tabla cuyo tamaño lo determina el número de restricciones.
2. Si se calcula B^{-1} en cada iteración directamente de los datos del principio, no se acumulan errores de redondeo.
3. Los conceptos teóricos del método ayudan a entender conceptos de teoría de la dualidad y análisis de sensibilidad.

Tema 4: Teoría de la Dualidad.

2 x 1

La teoría de la dualidad se centra en el hecho de que, asociado a cualquier problema de programación lineal, existe otro problema de programación lineal que se llama su **dual**, de manera que al resolver el primero se resuelve también el segundo sin coste computacional adicional.

Problemas primal-dual simétrico. Propiedades y relaciones de los problemas primal y dual.

Un **problema de programación lineal** está escrito **en forma simétrica** si todas las variables son no negativas, y todas las restricciones son desigualdades (si el problema es de maximizar, con $\leq$, y si es de minimizar, con $\geq$).

PRIMAL

Max $Z = Cx$	Min $Z = Cx$
$Ax \leq b$	$Ax \geq b$
$x \geq 0$	$x \geq 0$

$$\text{Max } Z = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0$$

DUAL

Min $W = by$
$yA \geq C$ $\quad\quad$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$
$y \geq 0$
$\downarrow$
Min $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq C_1$
$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq C_2$
$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq C_n$

$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$

Reglas generales de construcción del problema dual.

1. Definir una variable dual no negativa por cada restricción del problema primal.
2. Hacer que el vector de costes del problema primal pase a ser el vector de las constantes de la derecha del problema dual.
3. Hacer que el vector de constantes de la derecha del primal sea el vector de costes del dual.
4. La traspuesta de la matriz de coeficientes del primal es la matriz de coeficientes del dual.
5. Invertir la dirección de las desigualdades de las restricciones.
6. Invertir Maximizar por Minimizar (y viceversa).

Problema Primal $\longrightarrow$ **Problema Dual**

Max $Z = Cx$
$Ax \leq b$
$x \geq 0$

Min $W = by$
$yA \geq C$ siendo A la matriz
$y \geq 0$ traspuesta de la matriz A del problema primal ($y \cdot A \Leftrightarrow A^t \cdot y^t$)

A_{mxn}
x n variables $\rightarrow$ C n restricciones
b m restricciones $\rightarrow$ y m variables

Teoremas de la dualidad.

Teorema 1 (Teorema débil de la dualidad).
Consideremos los problemas de programación lineal primal-dual simétricos:

Max $Z = Cx$	$\leftrightarrow$	Min $W = yb$
$Ax \leq b$		$yA \geq C$
$x \geq 0$		$y \geq 0$

Se tiene que el valor de la función del objetivo del problema dual (para toda solución factible del dual) es siempre mayor o igual que el valor de la función del objetivo primal (en cualquier solución factible del problema primal).

Demostración.

Sean x_0 e y_0 solución factible del primal y dual, respectivamente

x_0 solución factible del problema primal $\Rightarrow Ax_0 \leq b$

$$x_0 \geq 0 \qquad (1)$$

y_0 solución factible del problema dual $\Rightarrow y_0 A \geq C$

$$y_0 \geq 0 \qquad (2)$$

(la solución factible cumple las restricciones)

$(1) \Rightarrow y_0 A x_0 \leq y_0 b$ (pues $y_0 \geq 0$)

$(2) \Rightarrow y_0 A x_0 \geq C x_0$ (pues $x_0 \geq 0$)

Entonces $\underbrace{Cx_0}_{Z_0 \text{ (primal)}} \leq y_0 A x_0 \leq \underbrace{y_0 b}_{W_0 \text{ (dual)}}$

(Z y W funciones objetivo)

Corolarios.

1) El valor de la función del objetivo Z del problema primal para cualquier solución factible del primal es una cota inferior para el valor mínimo de la función del objetivo dual.
2) Análogamente, el valor de la función del objetivo del problema dual para cualquier solución factible es una cota superior para el valor máximo de la función del objetivo primal.
3) Si el problema primal tiene solución no acotada entonces el problema dual no tiene ninguna solución factible.
4) Análogamente, si el problema dual tiene solución no acotada entonces el primal no tiene ninguna solución factible.
5) Si el problema primal tiene solución, y el dual no, entonces el primal es no acotado.
6) Si el problema dual tiene solución, y el primal no, entonces el dual es no acotado.
7) Si el primal no tiene solución $\Rightarrow$ el problema dual no tiene solución o es no acotado.
8) Si el problema dual no tiene solución $\Rightarrow$ el problema primal no tiene solución o es no acotado.

Ejemplo 1.

Primal $\quad$ $\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4\,x_4$

Sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20$$
$$x_i \geq 0$$

Dual $\quad$ $\text{Min } W = 20y_1 + 20y_2$

Sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$
$$2y_1 + y_2 \geq 2$$
$$2y_1 + 3y_2 \geq 3$$
$$3y_1 + 2y_2 \geq 3$$
$$y_i \geq 0$$

ej.

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$$
$$(1, 1, 1, 1) \quad \rightarrow Z(x_0) = 10$$

cualquier solución factible del problema dual verifica $W \geq 10 \Rightarrow W_{opt} \geq 10$

Ejemplo 2.

Primal $\quad$ $\text{Max } Z = x_1 + x_2$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$-2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$
$$x_i \geq 0$$

Dual $\quad$ $\text{Min } W = 2y_1 + y_2$

$$-y_1 + 2y_2 \geq 1$$
$$y_1 + y_2 \geq 1$$
$$y_1 - y_2 \geq 0$$
$$y_i \geq 0$$

El primal tiene solución (por ejemplo $x_0 = (0, 0, 0)$ es una solución factible del primal).

Pero el dual no tiene ninguna solución factible (si $y_i \geq 0$, $- y_1 - 2y_2$ siempre ≤ 0).

Por el corolario 5, el primal tiene solución no acotada.

Ejemplo 3.

Primal $\quad$ $\text{Min } Z = -2x_1 - 3x_2$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual $\quad$ $\text{Max } W = 2y_1 + y_2$

$$y_1 - y_2 \leq -2$$
$$-y_1 + y_2 \leq -3$$
$$y_i \geq 0$$

Ambos, primal y dual, no tienen soluciones factibles (corolarios 7 y 8).

Teorema 2 (Criterio de optimalidad).

Si existen soluciones factibles x_0 e y_0 para el problema primal y dual, respectivamente, tales que $Cx_0 = y_0b \Rightarrow x_0$ e y_0 son soluciones óptimas del problema primal y dual, respectivamente.

Demostración (ejercicio)

En el Ejemplo 1

Primal
$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4\,x_4 & \\ \text{Sujeto a} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20 \\ & x_i \ge 0 \end{array}$$

Dual
$$\begin{array}{ll} \text{Min } W = 20y_1 + 20y_2 & \\ \text{Sujeto a} & y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ & 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ & 2y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ & 3y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ & y_i \ge 0 \end{array}$$

si tomamos:

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = (0, 0, 4, 4) & Z_0 = 28 \\ & \\ y_0 = (1'2, 0'2) & W_0 = 28 \end{array}\right\} \quad x_0 \text{ e } y_0 \text{ óptimas del primal y dual respectivamente}$$

Teorema 3 (Teorema fundamental de la dualidad).

Si el problema primal y el dual tienen soluciones factibles, entonces los dos tienen soluciones óptimas cuyos valores de la función objetivo coinciden.

Teorema 4 (Teorema de las holguras complementarias).

Sean x_0 e y_0 soluciones factibles del problema primal y dual:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = Cx & \text{Min } W = yb \\ Ax \le b & yA \ge C \\ x \ge 0 & y \ge 0 \end{array}$$

x_0 e y_0 son soluciones óptimas $\Leftrightarrow (y_0A - C)x_0 + y_0(b - Ax_0) = 0$

Demostración.

$(y_0A - C)x_0 + y_0(b - Ax_0) = 0 \Leftrightarrow y_0Ax_0 - Cx_0 + y_0b - y_0Ax_0 = 0 \Leftrightarrow - Cx_0 + y_0b = 0 \Leftrightarrow Cx_0 = y_0b$

Entonces x_0 e y_0 óptimas $\Leftrightarrow Cx_0 = y_0 b$

"$\Rightarrow$" por el teorema 3 de la dualidad

"$\Leftarrow$" por el teorema 2

Condiciones de holguras complementarias.

Supongamos x_0 solución factible del problema primal e y_0 solución factible del problema dual:

$Ax_0 \leq b$ n variables $\qquad$ $y_0A \geq C$ m variables

$x_0 \geq 0$ m ecuaciones $\qquad$ $y_0 \geq 0$ n ecuaciones

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)A \geq (C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Si lo escribimos con holguras:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ \ldots \\ U_m^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (*)$$

siendo $U_i^0 \geq 0 \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, m$ el vector de holguras

$$(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)A - (V_1^0, V_2^0, \ldots, V_n^0) = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (**)$$

siendo $V_i^0 \geq 0 \; \forall i = 1, 2, \ldots, n$ el vector de holguras

(*) $\quad Ax_0 + U_0 = b \Rightarrow U_0 = b - Ax_0$

(**) $\quad y_0A - V_0 = C \Rightarrow V_0 = y_0A - C$

El teorema 4 dice:

x_0 e y_0 son soluciones óptimas óptimas $\Leftrightarrow (y_0A - C)x_0 + y_0(b - Ax_0) = 0 \Leftrightarrow V_0x_0 + y_0U_0 = 0$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (V_1^0, V_2^0, \ldots, V_n^0) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{pmatrix} + (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) \begin{pmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ \ldots \\ U_m^0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} V_j^0 x_j^0 + \sum_{j=1}^{m} y_j^0 U_j^0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} V_j^0 x_j^0 = 0 & j=1\ldots n \\ y_j^0 U_j^0 = 0 & j=1\ldots m \end{cases}$$

sistema o condiciones de holguras complementarias

$V_j^0 \cdot x_j^0 = 0$ $\qquad$ $y_j^0 U_j^0 = 0$

v. primal j-ésima $\qquad$ holgura primal

holgura dual j-ésima $\qquad$ v. dual j-ésima

Se obtiene:

1) Si $x_j^{\,0} > 0 \Rightarrow V_j^{\,0} = 0$
2) Si $V_j^{\,0} > 0 \Rightarrow x_j^{\,0} = 0$
3) Si $y_j^{\,0} > 0 \Rightarrow U_j^{\,0} = 0$
4) Si $U_j^{\,0} > 0 \Rightarrow y_j^{\,0} = 0$

Ejemplo 1:

Max $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4\,x_4$

Sujeto a
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \longrightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + U_1 = 20$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \longrightarrow 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + U_2 = 20$$
$$x_i \geq 0 \qquad x_i,\, U_i \geq 0$$

Min $W = 20y_1 + 20y_2$

Sujeto a
$$y_1 + 2y_2 \geq 1 \longrightarrow y_1 + 2y_2 - V_1 = 1$$
$$2y_1 + y_2 \geq 2 \longrightarrow 2y_1 + y_2 - V_2 = 2$$
$$2y_1 + 3y_2 \geq 3 \longrightarrow 2y_1 + 3y_2 - V_3 = 3$$
$$3y_1 + 2y_2 \geq 3 \longrightarrow 3y_1 + 2y_2 - V_4 = 4$$
$$y_i \geq 0 \qquad y_i,\, V_i \geq 0$$

La solución óptima del dual es:

$y_1^{0} = 1'2$
$y_2^{0} = 0'2$
$W_0 = 28$

Condiciones de holgura complementarias:

$U_1^{\,0}\, y_1^{0} = 0$
$U_2^{\,0}\, y_2^{0} = 0$
$x_1^{\,0}\, V_1^{0} = 0$
$x_2^{\,0}\, V_2^{0} = 0$
$x_3^{\,0}\, V_3^{0} = 0$
$x_4^{\,0}\, V_4^{0} = 0$

$y_1^{0} = 1'2 > 0 \Rightarrow \mathbf{U_1^{\,0} = 0}$
$y_2^{0} = 0'2 > 0 \Rightarrow \mathbf{U_2^{\,0} = 0}$
$y_1^{0} + y_2^{0} = 1'6 > 1 \Rightarrow V_1^{0} > 0 \Rightarrow \mathbf{x_1^{\,0} = 0}$
$2y_1^{0} + y_2^{0} = 2'6 > 2 \Rightarrow V_2^{0} > 0 \Rightarrow \mathbf{x_2^{\,0} = 0}$
$2y_1^{0} + 3y_2^{0} = 3 \Rightarrow V_3^{0} = 0 \Rightarrow \mathbf{x_3^{\,0} \geq 0}$
$3y_1^{0} + 2y_2^{0} = 4 \Rightarrow V_4^{0} = 0 \Rightarrow \mathbf{x_4^{\,0} \geq 0}$

Y nos queda del sistema de ecuaciones del problema primal:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_3^{\,0} + 3x_4^{\,0} = 20 \\ 3x_3^{\,0} + 2x_4^{\,0} = 20 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_3^{\,0} = 4 \\ x_4^{\,0} = 4 \end{array}$$

$x_0 = (0, 0, 4, 4)$ $Z_{opt} = 28$ (que tiene que coincidir con el valor óptimo de la función objetivo dual)

Problemas asimétricos primal-dual.

Consideremos un problema de programación lineal no simétrico, por ejemplo:

Primal

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 2x_1 - 3x_2 \\ &\text{Sujeto a} \quad 6x_1 - 3x_2 \leq 15 \\ &\qquad\qquad 2x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ &\qquad\qquad - x_1 + 4x_2 = -1 \\ &\qquad\qquad x_1 \text{ cq signo}, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Cualquier problema no simétrico puede convertirse en uno equivalente que sí lo sea

$$\left(\begin{aligned} \text{Max } Z &= Cx \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}\right)$$

$x_1 = x_1' - x_2'$ $x_1', x_2' \geq 0$

$x_2 = - x_3'$ $x_3' \geq 0$

$- x_1 + 4x_2 = -1 \Rightarrow$ $- x_1 + 4x_2 \geq -1 \rightarrow x_1 - 4x_2 \leq 1$

$- x_1 + 4x_2 \leq -1$

$2x_1 + 3x_2 \geq 5 \rightarrow - 2x_1 - 3x_2 \leq -5$

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 2x_1' - 2x_2' - 3x_3' \\ &\text{Sujeto a} \quad 6x_1' - 6x_2' + 3x_3' \leq 15 \\ &\qquad\qquad -2x_1' + 2x_2' + 3x_3' \leq -5 \\ &\qquad\qquad x_1' - x_2' + 4x_3' \leq 1 \\ &\qquad\qquad - x_1' + x_2' - 4 x_3' \leq -1 \\ &\qquad\qquad x_i' \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} &\text{Min } W = 15w_1 - 5w_2 - w_3 + w_4 \\ &\text{Sujeto a} \quad 6w_1 - 2w_2 + w_3 - w_4 \geq 2 \\ &\qquad\qquad -6w_1 + 2w_2 - w_3 + w_4 \geq -2 \\ &\qquad\qquad 3w_1 + 3w_2 + 4w_3 - 4w_4 \geq 3 \\ &\qquad\qquad w_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} \text{Min } W &= wb \\ wA &\geq C \\ w &\geq 0 \end{aligned}\right)$$

Llamamos $y_1 = w_1 \geq 0$

$y_2 = - w_2 \leq 0$

$y_3 = w_3 - w_4 \geq 0$

$\text{Min } W = 15y_1 + 5y_2 - y_3$

Sujeto a $\left.\begin{array}{l} 6y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ -6y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -2 \\ 3y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6y_1 + 2y_2 + y_3 = 2 \\ 3y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq 3 \end{array}$

$\text{Min } W = 15y_1 + 5y_2 - y_3$

$6y_1 + 2y_2 + y_3 = 2$

$3y_1 - 3y_2 + 4y_3 \geq 3$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \leq 0$, y_3 cq signo

$\text{Max } Z = 2x_1 - 3x_2$

$6x_1 - 3x_2 \leq 15$

$2x_1 + 3x_2 \geq 5$

$- x_1 + 4x_2 = -1$

x_1 cq signo, $x_2 \leq 0$

PRIMAL (Maximizar)	**DUAL (Minimizar)**
• A matriz de coeficientes	• Traspuesta
• Vector de constantes de la derecha	• Vector de coeficientes de la f. objetivo
• Vector de coeficientes de la f. objetivo	• Vector de constantes de la derecha
• i-ésima restricción con =	• Variable i-ésima de cualquier signo
• i-ésima restricción con ≤	• Variable i-ésima ≥ 0
• i-ésima restricción con ≥	• Variable i-ésima ≤ 0
• Variable j de cualquier signo	• Restricción j con =
• Variable j ≥ 0	• Restricción j con ≥
• Variable j ≤ 0	• Restricción j con ≤

Ejercicio 1.

Primal

Max $Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$

$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 2$

$3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$, x_3 cq signo

Dual

Min $W = 2y_1 + y_2 + 4y_3$

$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1$

$3y_1 - y_2 + y_3 \leq 4$

$-5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \leq 0$, y_3 cq signo

Ejercicio 2.

Primal

Min $Z = 2x_1 + x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2$

$x_2 + x_3 \leq 3$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$, x_3 cq signo

Dual

Max $W = y_1 + 2y_2 + 3\, y_3$

$y_1 + y_2 \leq 2$

$y_1 - y_2 + y_3 \geq 1$

$-y_1 + y_2 + y_3 = -1$

y_1 cq signo, $y_2 \geq 0$, $y_3 \leq 0$

Los teorema del 1 al 4 de la teoría de la dualidad también se aplican a los problemas asimétricos, con las modificaciones correspondientes.

En el **Ejercicio 2**:

$x_1^{\,0} = 2$

$x_2^{\,0} = 0$ solución factible primal

$x_3^{\,0} = 1$

$y_1^0 = 1$

$y_2^0 = 0$ solución factible dual

$y_3^0 = 0$

Por el teorema 1 de la dualidad $Z_0 \geq W_0 \Rightarrow Cx_0 = 3 > y_0 b = 1$

En el Ejercicio 1:

$x_1^{\,0} = 0$

$x_2^{\,0} = 0$ solución factible primal
$x_3^{\,0} = 4$
$Z_0 = 12$

$y_1^{\,0} = 0$
$y_2^{\,0} = 0$
$y_3^{\,0} = 3$
$W_0 = 12$

Por el teorema 2 ambas son soluciones óptimas.

Si el problema viene en forma estándar:

Max $Z = Cx$	(Min)	su dual es	Min $W = yb$
$Ax = b$			$yA \geq C$
$x \geq 0$			y cq signo
			Max $W = yb$
			$yA \leq C$
			y cq signo

<u>Cálculo de la solución óptima del problema dual a partir de la tabla óptima del problema primal</u>.

Consideremos el problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{rl} \text{Min } Z = Cx & \\ Ax = b & \\ x \geq 0 & \end{array} \qquad \text{(dual)} \qquad \begin{array}{rl} \text{Max } W = yb & \\ yA \leq C & \\ y \text{ cq signo} & \end{array}$$

Sea $x_0 = \begin{pmatrix} x_B \\ \\ x_N \end{pmatrix}$ la solución óptima del primal.

$x_B = B^{-1}b$, siendo B la base óptima

$\overline{C}_j = C_j - \pi P_j \geq 0 \quad \forall j$ por ser solución óptima donde $\pi = C_B B^{-1}$

En notación matricial $C - \pi A \geq 0 \Leftrightarrow \pi A \leq C \Rightarrow$ el vector π es una solución factible del problema dual.

Además $W(\pi) = \pi b = C_B B^{-1} b = C_B x_B = Z_{\text{óptimo}} \Rightarrow$ π es óptima del problema dual.

<u>Ejemplo:</u>

Primal

Min $Z = -3x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$

$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$

$-2x_1 + x_3 = 1$

$x_i \geq 0$

Dual

Max $W = 11y_1 + 3y_2 + y_3$

$y_1 \quad - 4y_2 - 2y_3 \leq -3$

$-2y_1 + y_2 \qquad \leq 1$

$y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1$

$y_1 \leq 0$, $y_2 \geq 0$, y_3 cq signo

Resolvemos el problema primal: la solución óptima es $B = [P_1 \ P_2 \ P_3]$

$x_1 = 4$

$x_2 = 1$

$x_3 = 9$

$Z_0 = -2$

$$\pi = C_B B^{-1} = (-3, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (-3, 1, 1) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2/3 & 4/3 & -7/3 \end{pmatrix} = [-1/3, 1/3, 2/3]$$

Se comprueba que π es solución factible del problema dual y que

$W(\pi) = 11(-1/3) + 3(1/3) + 1(2/3) = -2$

Cómo ver la solución dual óptima en la tabla óptima del simplex del problema primal.

Base		Solución ($\bar{b}$)
•		
•		
•		
$\bar{C}_j$		

Sean $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ los índices de las variables básicas de la primera tabla del Simplex:

1ª tabla

Base	x_1	x_2	…	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{im}	…	x_n	$\bar{b}$
x_{i1}	•	•		1	0		0		•	
x_{i2}	•	•		0	1		0		•	
…	…	…		…	…		…			…
x_{im}	•	•		0	0		1		•	

En cualquier tabla, B^{-1} aparece en las columnas de las variables básicas iniciales.

En particular, en la última tabla:

Base	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{im}
	$\bar{C}_{i1}$	$\bar{C}_{i2}$	…	$\bar{C}_{im}$

– – –

$(C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{im}) = (C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{im}) - \pi[P_{i1} \ldots P_{im}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow (C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{im}) - \pi\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi = (C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{im}) - (\overline{C}_{i1}, \overline{C}_{i2}, \ldots, \overline{C}_{im})$$

Tema 5: Método del Simplex Dual.

Conceptos fundamentales. Bases factibles dual y primal.

Consideremos un problema de programación lineal estándar:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= Cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad A_{mxn} \qquad \begin{aligned} A &= (P_1 \ldots P_n) \\ C &= (C_1, \ldots, C_n) \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad m<n$$

Sea $B \subset A$ una submatriz de A formada por m columnas de A linealmente independientes. Se dice que B es una **base factible primal** (o base factible del problema primal) si $B^{-1}b \geq 0$.

Sea $B \subset A$ una submatriz de A formada por m columnas de A linealmente independientes. Se dice que B es una **base factible dual** (o base factible del problema dual) si:

$C - C_B B^{-1} A \geq 0$ $\quad$ ($C - C_B B^{-1} A \leq 0$ si el p. primal fuese de maximizar)

Consecuencias de las definiciones.

- Que B sea factible primal significa que se le puede asociar una solución:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \text{con } x_B = B^{-1}b \geq 0$$

- Que B sea factible dual significa que $C - C_B B^{-1} A \geq 0 \Rightarrow C \geq C_B B^{-1} A$.

Llamando $y_B = C_B B^{-1} \rightarrow C \geq y_B A \Leftrightarrow y_B A \leq C \Rightarrow y_B$ así definida es una solución factible del problema dual. Además $C - y_B A \geq 0$

como los beneficios relativos del problema primal se calculan como

$\overline{C} = C - \pi A, = C - C_B B^{-1} A = C - y_B A \geq 0 \Rightarrow x_B = B^{-1} b$ es una solución factible y óptima del problema primal.

Luego como $W_o = y_B b = C_B B^{-1} = C_B x_B = Z_{opt}$
y_B y x_B son soluciones óptimas del primal y dual.

Resumiendo, si una matriz B es a la vez una base factible primal y dual, sus soluciones asociadas $x_B = B^{-1} b$ e $y_B = C_B B^{-1}$ son óptimas del primal y dual, respectivamente.

Desarrollo del método dual del Simplex.

Consideremos el ejemplo

$$\text{Min } Z = x_1 + 4x_2 + 3x_4$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 3$$
$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2$$
$$x_i \geq 0$$

Introducimos variables de holgura x_5 y x_6:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3$$
$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - x_6 = 2$$
$$x_i \geq 0$$

Multiplicamos por -1:

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -3$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + x_6 = -2$$
$$x_i \geq 0$$

	C_j	1	4	0	3	0	0	
C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	x_5	-1	-2	1	-1	1	0	-3
0	x_6	2	1	-4	-1	0	1	-2
	$\overline{C}_j$	1	4	0	3	0	0	

$B = [P_5\ P_6] = I \Rightarrow B^{-1} = I \Rightarrow b = B^{-1}\, b \not\geq 0$ pero $C - C_B B^{-1a} = \overline{C} = (1,4,0,3,0,0) \geq 0$

Luego B **no es factible primal** (porque $\not\geq 0$), pero sí **factible dual**.

Si tenemos, por tanto, una tabla del Simplex Dual donde $\overline{C}_j \geq 0$ y $\overline{b} \geq 0 \Rightarrow$ estaríamos ante la solución óptima.

Situación general.

Base	x_1	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_s	…	x_n	$\bar{b}$
x_1	1					$y_{1,m+1}$	…	y_{1s}	…	y_{1n}	$\bar{b}_1$
…		$\ddots$		0							…
x_r			1			$y_{r,m+1}$	…	y_{rs}	…	y_{rn}	$\bar{b}_r$ Alguno menor que cero
…		0		$\ddots$							
x_m					1	$y_{n,m+1}$	…	y_{ns}	…	y_{mn}	$\bar{b}_m$
$\bar{C}_j$	0	0	- - - - - -	- - - - - -	0	$\bar{C}_{m+1}$	…	$\bar{C}_s$	…	$\bar{C}_n$	≥ 0 (min)

El método del simplex dual va a calcular una solución factible básica dual adyacente, reemplazando una variable básica por una variable no básica.

1. Selección de la variable básica que deja la base.

Se elige la variable básica con el mayor valor negativo $\bar{b}_i$.

Sea $b_r = \underset{b_i < 0}{\underline{\min}} \{b_i\} \Rightarrow x_r$ deja la base, y la fila r es la fila pivote.

2. Selección de la variable no básica que entra en la base (Regla de la máxima proporción).

Entra en la base x_s tal que $\frac{\bar{c}_s}{y_{rs}} = \max\limits_{y_{rj}<0} \frac{\bar{c}_j}{y_{rj}}$

y el valor y_{rs} es el pivote para construir la nueva tabla.

En nuestro ejemplo:

1) El mayor valor negativo de los $\bar{b}_i$ es -3 $\Rightarrow$ x_5 deja la base

2) Variable no básica

Variable no básica	y_{ij}	$\bar{C}_j$	$\bar{C}_j/y_{ij}$
x_1	-1	1	-1
x_2	-2	4	-2
x_4	-1	3	-3

max {-1, -2, -3} = -1 $\Rightarrow$ x_1 entra en la base y el pivote es -1. Aquí el pivote es negativo.

Tabla 2 del m.s.d.

	C_j	1	4	0	3	0	0	
C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
1	x_1	1	2	-1	1	-1	0	3
0	x_6	0	-3	-2	-3	2	1	-8 →
	$\bar{C}_j$	0	2	1	2	1	0	

sale x_6

proporciones:	y_{ij}	$\bar{C}_j$	
x_2	-3	2	-2/3 = -0'66
x_3	-2	1	-1/2 = -0'5
x_4	-3	2	-2/3 = -0'66

max {-0'66, -0'5} = -0'5 $\Rightarrow$ entra x_3 y el pivote es -2.

Tabla 3 del m.s.d.

C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$	
1	x_1	1	$^7/_2$	0	$^5/_2$	-2	$-^1/_2$	7	≥ 0
0	x_3	0	$^3/_2$	1	$^3/_2$	-1	$-^1/_2$	4	≥ 0
	$\bar{C}_j$	0	$^1/_2$	0	$^1/_2$	2	$^1/_2$	Z = 7	

Tabla óptima $\Leftrightarrow$ $\bar{C}_j$ y $\bar{b} \geq 0$

Solución óptima del problema de programación lineal.

OBSERVACIONES.

1.-) ***Resolución de problemas de maximización por el método del simplex dual.***

*La regla de salida es igual

* Cambia la regla de entrada, que ahora va a ser de la mínima proporción

Entra en la base x_s tal que $$\frac{\bar{c}_s}{y_{rs}} = \min_{y_{rj}<0} \frac{\bar{c}_j}{y_{rj}}$$

2.-) ***¿Qué sucede si falla el criterio de entrada?*** Es decir, todos los y_{ij} de la fila de la variable que sale son ≥ 0.

Entonces el problema no tiene solución. ¿Por qué: ejercicio?

3.-) ***¿Cómo se puede saber, utilizando el método del simplex dual, que el problema original tiene solución no acotada?*** Ejercicio: pensarlo usando los corolarios 1-8 del teorema 1 de la dualidad

Tema 6: Análisis de Sensibilidad y Programación Paramétrica

1. Análisis de sensibilidad.

Se refiere al estudio de los cambios en la solución óptima y en el valor óptimo de Z debido a cambios en los datos del problema inicial, pero sin resolver el problema de nuevo desde el principio.

Ejemplo.

Una compañía fabrica 3 productos A, B y C. Los beneficios por unidad de estos productos son 2, 3 y 1 respectivamente, y para su fabricación son necesarios 2 recursos: trabajo y material. Supongamos que los valores óptimos a fabricar de los productos A, B y C se obtienen resolviendo el problema:

Max $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

Sujeto a:

$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$ (trabajo)

$\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3$ (material)

$x_i \geq 0$

$x_i \equiv$ "unidades a fabricar del producto i"

Tabla1	C_j	2	3	1	0	0	
C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
0	x_4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	1
0	x_5	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	3
	$\bar{C}_j$	2	3	1	0	0	$Z = 0$
Tabla2							
0	x_4	$1/4$	0	$-1/4$	1	$-1/4$	$1/4$
3	x_2	$1/4$	1	$7/4$	0	$3/4$	$9/4$
	$\bar{C}_j$	$5/4$	0	$-17/4$	0	$-9/4$	$Z = 27/4$
Tabla3							
2	x_1	1	0	-1	4	-1	1
3	x_2	0	1	2	-1	1	2
	$\bar{C}_j$	0	0	-3	-5	-1	$Z = 8$

$x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $Z_{opt} = 8$ Solución óptima

$P_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$ $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C = (2,3,1,0,0)$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Max} \quad Z = Cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ 1 x n $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \\ x_n \end{pmatrix}$ n x 1

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ m x n m<n $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ m x 1

$A = [\,P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n\,]$ $P_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ m x 1 $\forall i = 1, \dots, n$

Supongamos que tenemos una solución factible obtenida a partir de una base B

La solución básica

$$x_B = \bar{b} = B^{-1}b \qquad Z = C_B\bar{b}$$

cualquier columna:

$\overline{P_j} = B^{-1}P_j$ **$\forall$j de las variables no básicas**

$\pi = C_B\ B^{-1}$

Los beneficios relativos:

$\overline{c}_j = c_j - \pi P_j = c_j - c_B B^{-1} P_j = c_j - c_B \overline{P}_j$ $\forall$j de variables no básicas

1. Modificaciones en los coeficientes de la función del objetivo.

1.1 Cambio en el C_j de una variable no básica.

Variable no básica de interés → x_3 (forma parte del problema pero no está en la base)

$\overline{C}_3 = -3$ Mientras $\overline{C}_3<0$ la solución actual (x_1 y x_2 en la base) sigue siendo óptima

$$\overline{C}_3 = C_3 - C_B\overline{P}_3 = C_3 - (2,3)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = C_3 - 4$$

columna de x_3 en la tabla óptima

$\overline{C}_3 = C_3 - 4 \le 0 \Leftrightarrow C_3 \le 4$ $\Rightarrow$ si $C_3 > 4$ entra x_3 en la base

Si, por ejemplo $C_3 = 6 \Rightarrow \overline{C}_3 = 2$ y haríamos una tabla más:

C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}$
2	x_1	1	$^1/_2$	0	$^7/_2$	$-^1/_2$	2
6	x_3	0	$^1/_2$	1	$-^1/_2$	$^1/_2$	1
	$\overline{C}_j$	0	-1	0	-4	-2	Z = 10

<u>óptima</u>

1.2 Cambio en el C_j de una variable básica.

Analicemos, por ejemplo, como se altera la tabla óptima modificando C_1:

x_1 y x_2 están en la base $\Rightarrow \overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$

$$\overline{C}_3 = C_3 - C_B\overline{P}_3 = 1 - (C_1,3)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = C_1 - 5$$

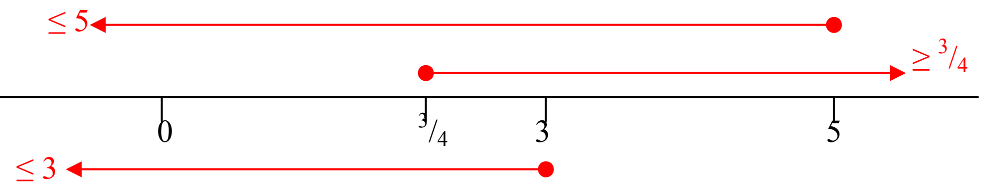
$$\overline{C}_4 = 0 - (C_1,3)\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = -4C_1 + 3$$

$$\overline{C}_5 = 0 - (C_1,3)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = C_1 - 3$$

La tabla 3 seguirá siendo óptima mientras $\overline{C}_3$, $\overline{C}_4$ y $\overline{C}_5 \leq 0$ (estamos maximizando).

$$\left.\begin{array}{l} \overline{C}_3 \leq 0 \Leftrightarrow C_1 - 5 \leq 0 \Leftrightarrow C_1 \leq 5 \\ \\ \overline{C}_1 \leq 0 \Leftrightarrow -4C_1 + 3 \leq 0 \Leftrightarrow C_1 \geq {}^3/_4 \\ \\ \overline{C}5 \leq 0 \Leftrightarrow C_1 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow C_1 \leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

si $C_1 \in [{}^3/_4,3]$ la tabla 3 sigue siendo óptima, si nos salimos del intervalo $[{}^3/_4,3]$ la tabla ya no es óptima



Si, por ejemplo $C_1 = 1$ la solución de la tabla 3 ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$) sigue valiendo, pero cambia $Z_{opt} = C_B\overline{b} = (1,3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 7$

1.3 Cambio en C_j tanto de variables básicas como no básicas.

Hagamos, por ejemplo, $C_1=1$, $C_2=4$, $C_3=2$
En la tabla 3 hay que cambiar

$\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$ (el $\overline{C}_j$ de las variables básicas siempre es 0)

$$\overline{C}_3 = 2 - (1,4)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = -5 < 0$$

$$\overline{C}_4 = 0 - (1,4)\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{C}_5 = 0 - (1,4)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -3 < 0$$

La solución de la tabla 3 sigue siendo óptima. Ahora Z_{opt} = 9 y tendríamos una solución óptima alternativa haciendo entrar a x_4. Si alguno de los $\overline{C}i$ fuese > 0 la tabla no sería óptima y habría que seguir calculando tablas.

<u>En general, hay que recalcular la fila de los $\overline{C}_j$</u>. Si la tabla deja de ser óptima, habría que continuar con el simplex.

<u>2. Modificaciones en las constantes de la derecha de las restricciones.</u>

Como, en cada tabla del simplex:

Base = { $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}$ } $\Rightarrow B = [P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}]$

$$x_B = \bar{b} = B^{-1}b$$ es el vector solución

Supongamos que en el problema del ejemplo se puede realizar 1 hora más de trabajo (b_1 crece una unidad).

$b_1 = 1 \rightarrow b_1 = 2$ $\qquad$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

En la tabla óptima, $B = (P_1\ P_2)$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Luego $\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Así, la nueva solución óptima es:

$x_1 = 5$
$x_2 = 1$
$x_3 = 0$
$Z_{opt} = 13$

Entonces, por unidad aumentada en la disponibilidad del recurso 1, el beneficio que se obtiene es: 13-8 = 5 unidades.

Definición- Se llama **precio sombra, marginal o de equilibrio** de la restricción (recurso) **i** al cambio que se produce en el valor de la función del objetivo por unidad aumentada en la disponibilidad del recurso **i**.

Se prueba que los precios sombra de los recursos i = 1, …, m son la solución óptima y_i^{opt} del dual i = 1, …, m

En nuestro caso:

$$(y_1^{opt}, y_2^{opt}) = \pi = C_B B^{-1} = (2,3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (5,1)$$

Ahora bien, para que los precios sombra no den información errónea, debemos calcular cuál es el campo de variación de los b_i en el que la solución sigue siendo óptima.

Lo calculamos, por ejemplo, para b_1:

$$b^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para que la tabla 3 siga siendo óptima, es preciso que $B^{-1}b^* \geq 0$

$$B^{-1}b^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4b_1 - 3 \\ -b_1 + 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4b_1 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \geq {}^3/_4 \\ -b_1 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow b_1 \leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Si $b_1 \in [^3/_4, 3]$ la solución seguirá siendo óptima

$x_1 = 4b_1 - 3 \qquad x_2 = -b_1 + 3 \qquad x_3 = 0$

$Z_{opt} = 2(4b_1 - 3) + 3(-b_1 + 3) = 5b_1 + 3$

Sea, por ejemplo $b_1 = 4$, ahora $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix} \not\geq 0$

La tabla 3 queda:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	0	-1	4	-1	13
x_2	0	1	2	-1	1	-1
$\bar{C}_j$	0	0	-3	-5	-1	

Esta tabla no es factible primal, pero sí factible dual $\Rightarrow$ aplicamos el Método del Simplex Dual:

x_2 deja la base y entra x_4

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	
x_1						9	≥ 0
x_4						1	≥ 0
						$Z_{opt} = 18$	

3. Modificaciones en la matriz de coeficientes de las restricciones.

3.1Adición de una nueva actividad (variable).

Supongamos que la compañía puede sacar a la venta un nuevo producto D, que requiere 1 unidad de trabajo y 1 unidad de material, con beneficio/unidad = 3.

Esto equivale a añadir una variable x_6 y una columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la tabla 1.

La tabla 3 seguirá siendo óptima si es $\bar{C}_6 \leq 0$:

$$\bar{C}_6 = C_6 - \pi P_6 = 3 - (5,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$$

Luego la solución de la tabla 3 sigue siendo óptima. Si $\bar{C}_6 > 0$ se aplicaría el simples.

3.2 Variaciones en las condiciones de las variables existentes.

3.2.1 Cambios correspondientes a una variable no básica.

Se hace como en 3.1

3.2.2 Cambios correspondientes a variables básicas.

Mejor resolver el problema de nuevo, porque al cambiar la matriz básica B se cambian todas las columnas de la tabla.

3.3 Adición de nuevas restricciones.

Supongamos que se añade una restricción referente a los servicios administrativos, de tal modo que los productos A, B y C requieren 1, 2 y 1 hora de servicios respectivamente, mientras las horas totales disponibles son 10.

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$

Si la solución óptima de la tabla 3 satisface la restricción, sigue siendo óptima:

$1 \bullet 1 + 2 \bullet 2 + 1 \bullet 0 \leq 10$, cumple la restricción

Si la restricción fuese $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$:

$1 \bullet 1 + 2 \bullet 2 + 1 \bullet 0 \nleq 4$

Añadimos la nueva restricción a la tabla 3:

C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
2	x_1	1	0	-1	4	-1	0	1
3	x_2	0	1	2	-1	1	0	2
0	x_6	1	2	1	0	0	1	4
	$\bar{C}_j$	0	0	-3	-5	-1	0	

(3ªF – 1ªF - 2•(2ªF))

C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
	x_1	1	0	-1	4	-1	0	1
	x_2	0	1	2	-1	1	0	2
	x_6	0	0	-2	-2	-1	1	-1
	$\bar{C}_j$	0	0	-3	-5	-1	0	
	x_1							2
	x_2							1
	x_5							1

		$Z_{opt} = 7$

En la tabla 3, $Z_{opt} = 8 \rightarrow \Delta Z_{opt} = -1$

Esto siempre es cierto: al añadir una restricción a un problema de programación lineal el nuevo valor de la función del objetivo es igual o peor que el anterior.

Observaciones.

Tiempo de resolución de un p.p.l $\equiv f(m^3)$, siendo m el número de restricciones

A) Quitar restricciones inactivas o secundarias.

B) Resolver

C) Añadir y comprobar si las restricciones de A) son verificadas por la solución óptima.

Programación paramétrica.

1. **Costes (Beneficios) paramétricos**

$$Z = [C + \lambda C^*]\, x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$C = (C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$

Primero se resuelve el problema para $\lambda = 0$. Sea B la base óptima:

$\overline{C}_j \leq 0$ (Maximizando) $\qquad \overline{C}_j = C_j - C_B\overline{P}_j$

$$\overline{C}_j(\lambda) = (C_j + \lambda C_j^*) - (C_B + \lambda C_B^*)\overline{P}_j = (C_j - C_B\overline{P}_j) + \lambda\,(C_j^* - C_B^*\,\overline{P}_j) = \overline{C}_j + \lambda\overline{C}_j^*$$

Ejemplo:

$$\text{Max } Z = (2 + \lambda)x_1 + (3 - \lambda)x_2 + (1 + \lambda)x_3$$
$${}^1/_3x_1 + {}^1/_3x_2 + {}^1/_3x_3 \leq 1$$
$$^1/_3x_1 + {}^4/_3x_2 + {}^7/_3x_3 \leq 3$$
$$x_i \geq 0$$

	C_j^*	1	-1	1	0	0
	C_j	2	3	1	0	0

C_B^*	C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{B}$
1	2	x_1	1	0	-1	4	-1	1
-1	3	x_2	0	1	2	-1	1	2
		$\bar{C}_j$	0	0	-3	-5	-1	$Z = 8 = C_B\bar{b}$
		$\bar{C}_j^*$	0	0	4	-5	-2	$Z^* = -1 = C_B^*\bar{b}$

Por ejemplo, $\bar{C}_3^* = C_3^* - C_B^*\bar{P}_3 = 1 - (1,-1)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = 4$

$Z(\lambda) = Z + \lambda Z^* = 8 - \lambda$

$\bar{C}_3(\lambda) = -3 + 4\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq {}^3/_4$

$\bar{C}_4(\lambda) = -5 - 5\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -1$

$\bar{C}_5(\lambda) = -1 + 2\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq {}^1/_2$

La solución sigue siendo óptima si $\lambda \in [-1, {}^1/_2]$.

Si $\lambda > {}^1/_2 \Rightarrow C_5(\lambda) > 0$ ($\Rightarrow$ entra x_5 y sale x_2)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_1	1	1	1	3	0	3
x_5	0	1	2	-1	1	2
$\bar{C}_j$	0	1	-1	-6	0	Z = 6
$\bar{C}_j^*$	0	-2	0	-3	0	Z* = 3

La solución es óptima si $\bar{C}_2(\lambda), \bar{C}_3(\lambda), \bar{C}_4(\lambda) \leq 0 \rightarrow$ ocurre si $\lambda \geq {}^1/_2$ y $Z = 6 + 3\lambda$

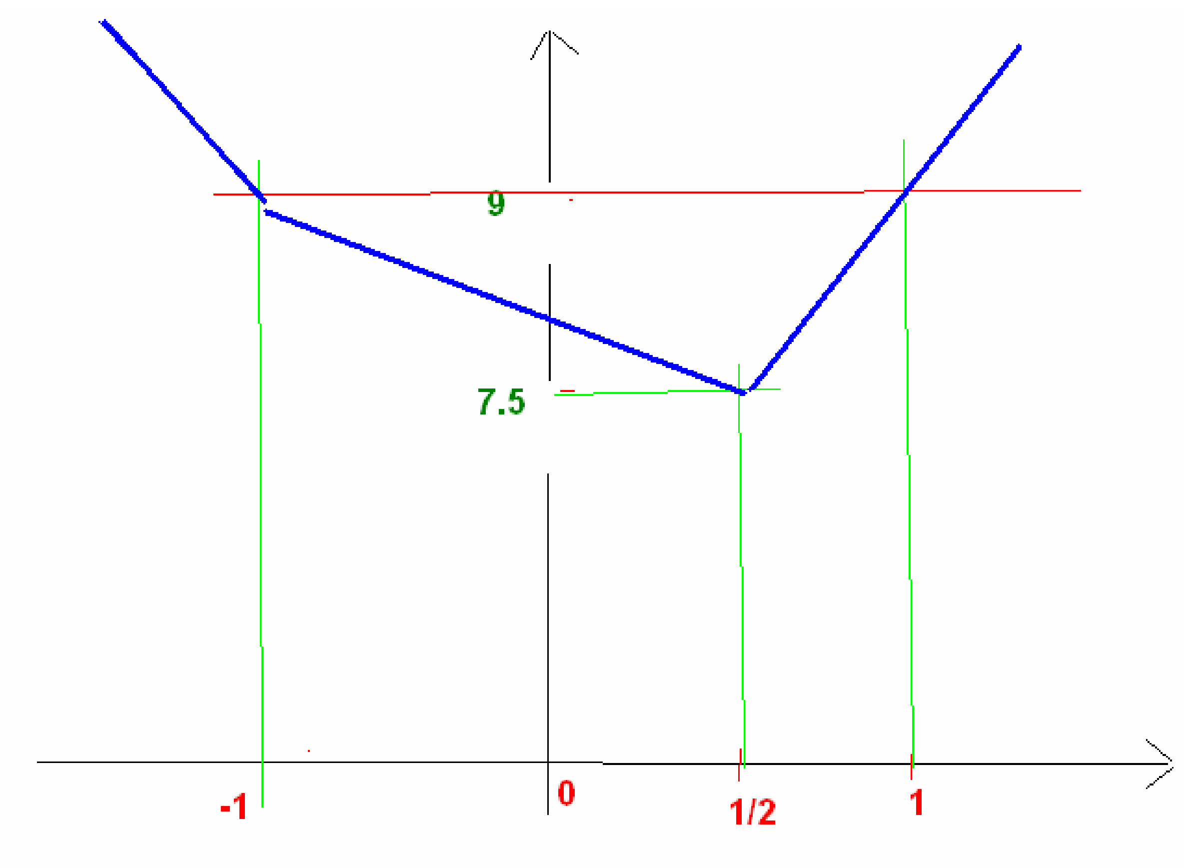
Para $\lambda < -1$ $\bar{C}_4(\lambda) > 0$ ($\Rightarrow$ sale x_1 y entra x_4)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	$^1/_4$	0	$-^1/_4$	1	$-^1/_4$	$^1/_4$

x_2	$^1/_4$	1	$^7/_4$	0	$^3/_4$	$^9/_4$
$\bar{C}_j$	$^5/_4$	0	$-^{17}/_4$	0	$-^9/_4$	$Z = {}^{27}/_4$
$\bar{C}_j^*$	$^5/_4$	0	$^{11}/_4$	0	$^3/_4$	$Z^* = -^9/_4$

$Z(\lambda) = {}^{27}/_4 - {}^9/_4\lambda$

Solución óptima si $\bar{C}_1(\lambda), \bar{C}_3(\lambda), \bar{C}_5(\lambda) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1$



2. Variación paramétrica del vector de recursos.

$$Z = Cx \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad b^* = \begin{pmatrix} b_1^* \\ \dots \\ b_m^* \end{pmatrix}$$
$$Ax = b + \alpha b^*$$
$$x \geq 0$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

Primero resolvemos para $\alpha = 0$. Sea B la base óptima:

$$x_B = \bar{b} = B^{-1}b$$

Para $b + \alpha b^*$, $x_B = \bar{b} = B^{-1}(b + \alpha b^*) = B^{-1}b + \alpha B^{-1}b^* = \bar{b} + \alpha \bar{b}^*$

Si $\bar{b} + \alpha \bar{b}^* \geq 0$ la base B seguirá siendo óptima.

Ejemplo:

Hagamos $b^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b + \alpha b^* = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 3-\alpha \end{pmatrix}$

Resolver para $\alpha = 0$:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$
x_1	1	0	-1	4	-1	1	5
x_2	0	1	2	-1	1	2	-2
$\bar{C}_j$	0	0	-3	-5	-1	$Z = 8 = C_B \bar{b}$	$\boxed{Z^* = 4 = C_B \bar{b}^*}$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1 + 5\alpha \quad \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq -{}^1/_5$
$x_2 = 2 - 2\alpha \quad \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$
$Z_{opt} = 8 + 4\alpha$
$\alpha \in [-{}^1/_5, 1]$

Si $\alpha > 1$ $\Rightarrow$ $x_2 < 0$ y la solución actual no es factible, pero sí factible dual. Usando el Método del Simplex Dual obtenemos:

C_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$
2	x_1	1	4	7	0	3	9	-3
0	x_4	0	-1	-2	1	-1	-2	2
	$\bar{C}_j$	0	-5	-13	0	-6	Z = 18	Z* = -6

$x_1 = 9 - 3\alpha \quad \geq 0$ si $\alpha \leq 3$
$x_2 = -2 + 2\alpha \quad \geq 0$ si $\alpha \geq 1$
$Z = 18 - 6\alpha \quad \alpha \in [1,3]$

Si $\alpha > 3$ $\Rightarrow$ $x_1 < 0$ y la solución actual no factible. Como en la fila de x_1 no hay coeficientes negativos, el problema es NO FACTIBLE.

Si $\alpha < -{}^1/_5$ $\Rightarrow$ $x_1 < 0$ ($\Rightarrow$ por el Método del Simplex Dual sale x_1 y entra x_5)

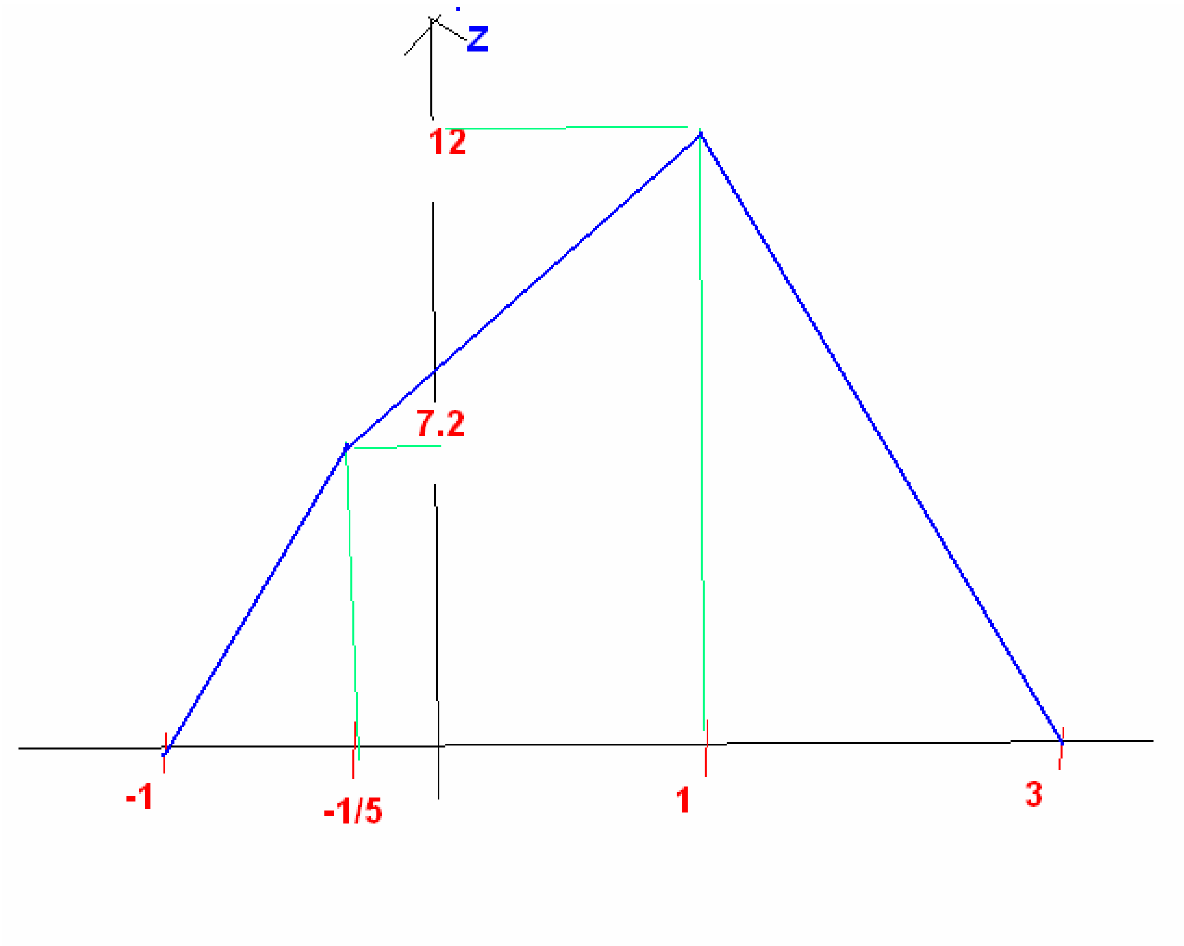
base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$	$\bar{b}^*$
x_5	-1	0	1	-4	1	-1	-5

x_2	1	1	1	3	0	3	3
$\overline{C_j}$	-1	0	-2	-9	0	Z = 9	Z* = 9

$$\left.\begin{array}{ll} x_2 = 3 + 3\alpha & \geq 0 \\ x_5 = -1 - 5\alpha & \geq 0 \end{array}\right\} \text{si } -1 \leq \alpha < -{}^{1}/_{5}$$

$Z = 9 + 9\alpha$

Si $\alpha < -1 \Rightarrow x_2 < 0 \rightarrow$ problema NO FACTIBLE



Tema 7. Programación lineal entera.

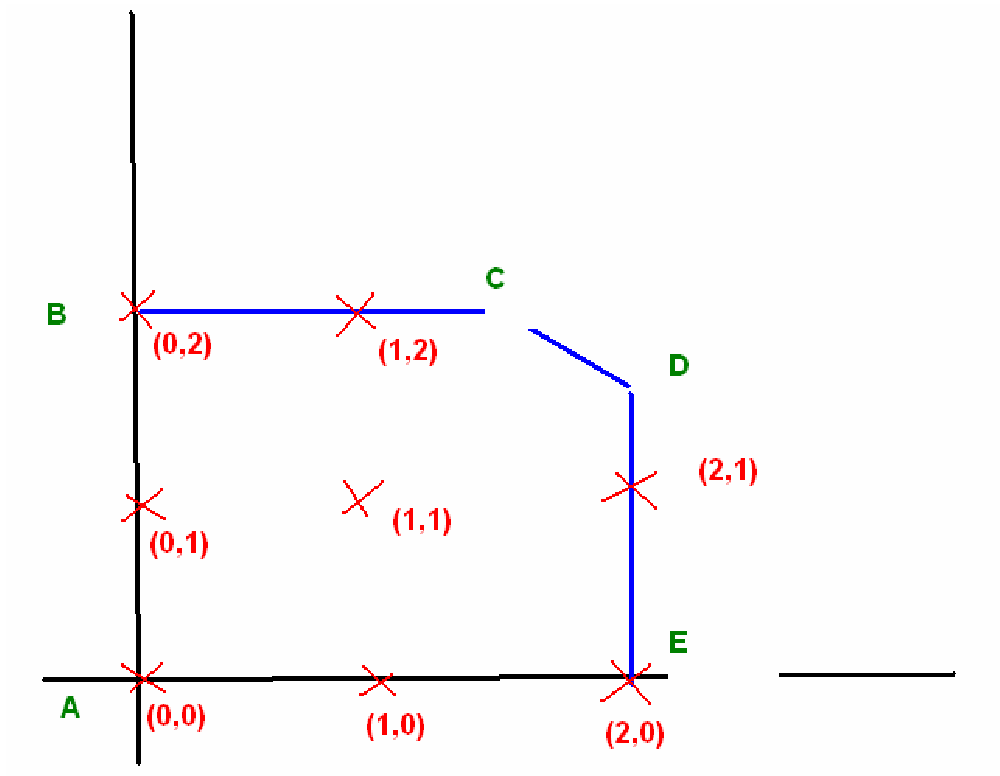
Un p.p.l. entera es aquel en el que todas las variables de decisión (programación entera pura) o algunas de ellas (programación entera mixta) toman exclusivamente valores enteros.

Una forma de tratar este problema es el redondeo (quedarse con la parte entera por arriba ó abajo teniendo cuidado de que la solución que así se obtenga sea factible)

Algoritmo de ramificación y acotación (Branco and Bound Algorithm).

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } Z = 3x_1+2x_2 \\ &\text{Sujeto a} \quad x_1 \leq 2 \\ &\quad x_2 \leq 2 \\ &\quad x_1 + x_2 \leq 3.5 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros.} \end{aligned}$$

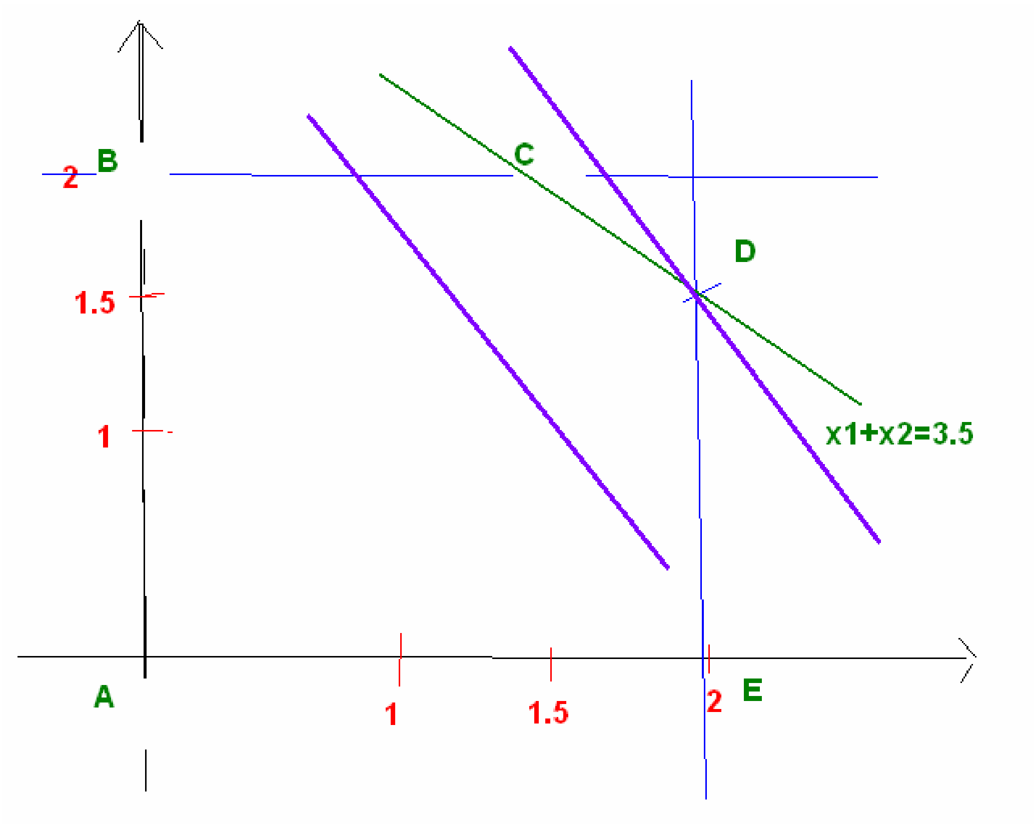
Soluciones enteras



$Z=3x_1+2x_2$
Z(0,0)=0
Z(0,1)=2
Z(0,2)=4
Z(1,0)=3
Z(1,1)=5
Z(1,2)=7
Z(2,0)=6
Z(2,1)=8 óptimo

Algoritmo.

Primero resolvemos el problema olvidándonos de la restricción de variables enteras (PL-1)



Región factible ABCDE
óptimo $x_1=2,\ x_2=1.5\quad Z_{Optimo}=9$

Sabemos que añadir las restricciones de que las variables sean enteras no puede mejorar la función del objetivo. Tenemos así que $Z_0=9$ es una cota superior para el valor óptimo del problema inicial.

Creamos ahora 2 nuevos problemas

$$x_2=1.5 \longrightarrow x_2\leq 1$$
$$x_2=1.5 \longrightarrow x_2\geq 2$$

PL-2

Maximizar $Z = 3x_1+2x_2$

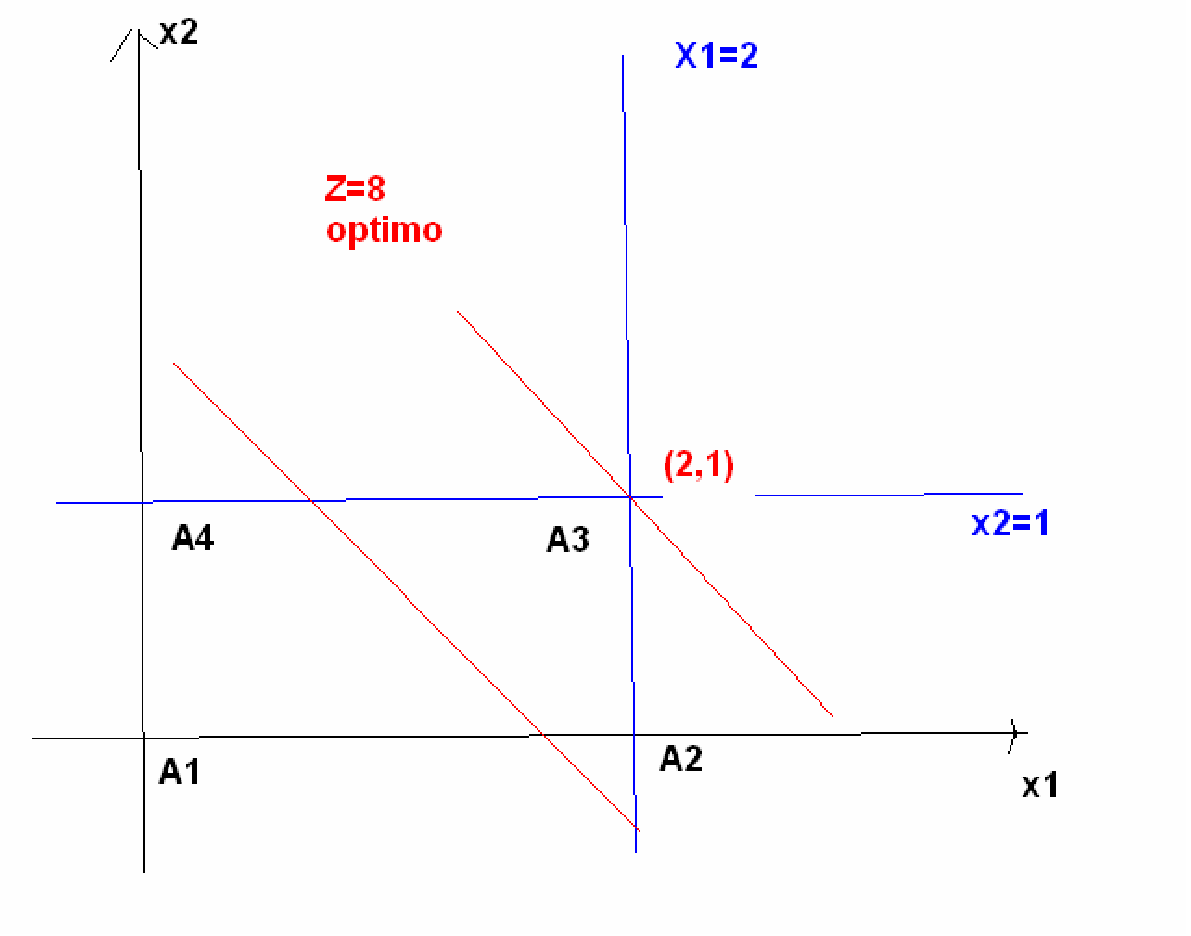
$$x_1 \leq 2$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1+x_2 \leq 3.5$$
$$x_2 \leq 1$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$

PL-3

Maximizar $Z = 3x_1+2x_2$

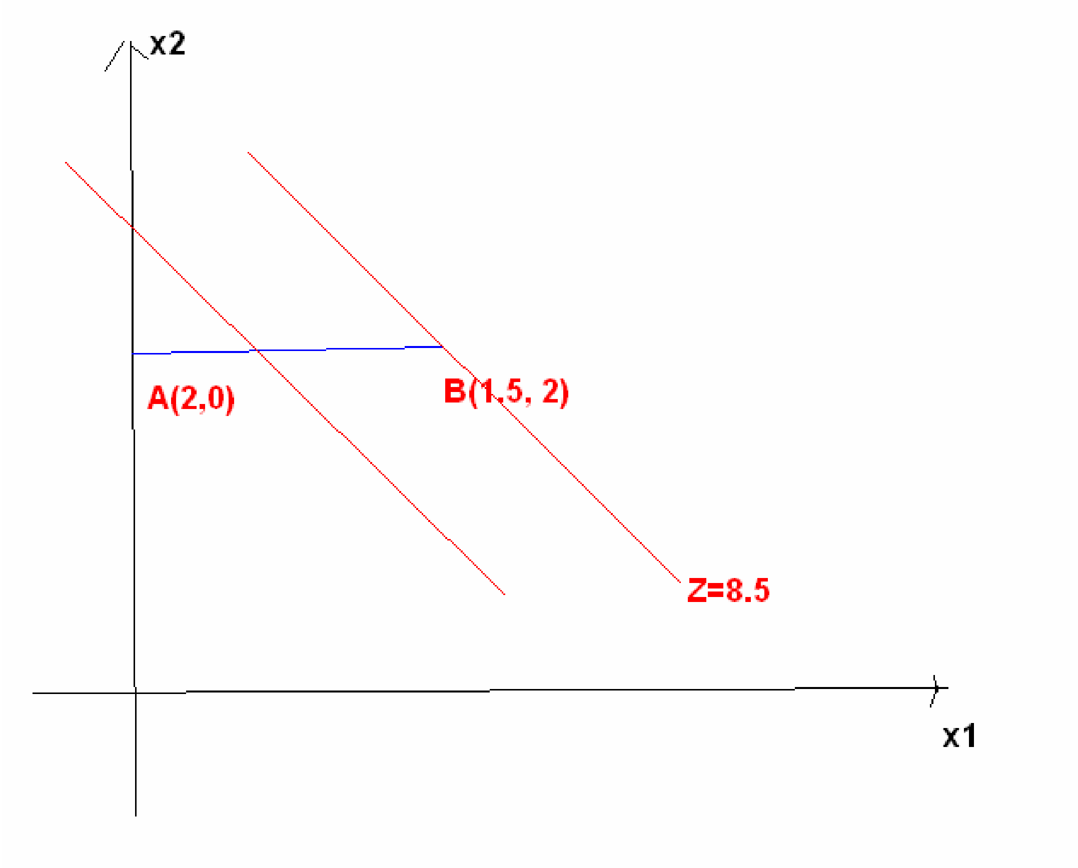
$$x_1 \leq 2$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1+x_2 \leq 3.5$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$

PL-2



PL-3

Región factible = segmento AB



La solución óptima de PL-2 es
$x_1 = 2$, $x_2 = 1$ $Z_{Optimo} = 8$

Así tenemos una s.f. entera de PL-1 (Fijarse que cada solución entera factible de PL-1 está contenida en PL-2 ó en PL-3). Aunque PL-2 pueda contener otras soluciones enteras, sus valores de la función objetivo no pueden ser más grandes que 8, $\Rightarrow$ *Z=8 es una cota inferior del valor máximo de Z en el PL-1.*

Luego $8 \leq Z_{optimo} \leq 9$

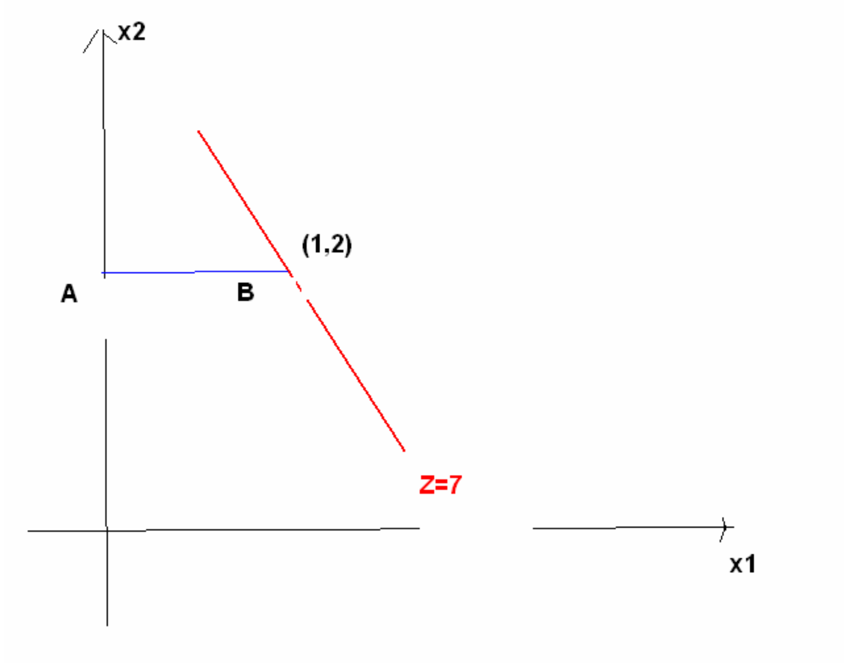
En PL-3 la solución óptima es
$x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$ $Z_{Optimo} = 8.5$
x_1 no es factible (no es entero) para PL-1 pero Z=8.5>8, $\Rightarrow$ hay que construir 2 nuevos problemas

PL-4
PL-3 + restricción $x_1 \leq 1$

PL-5
PL-3 + restricción $x_1 \geq 2$

PL-5 No tiene región factible.

PL-4

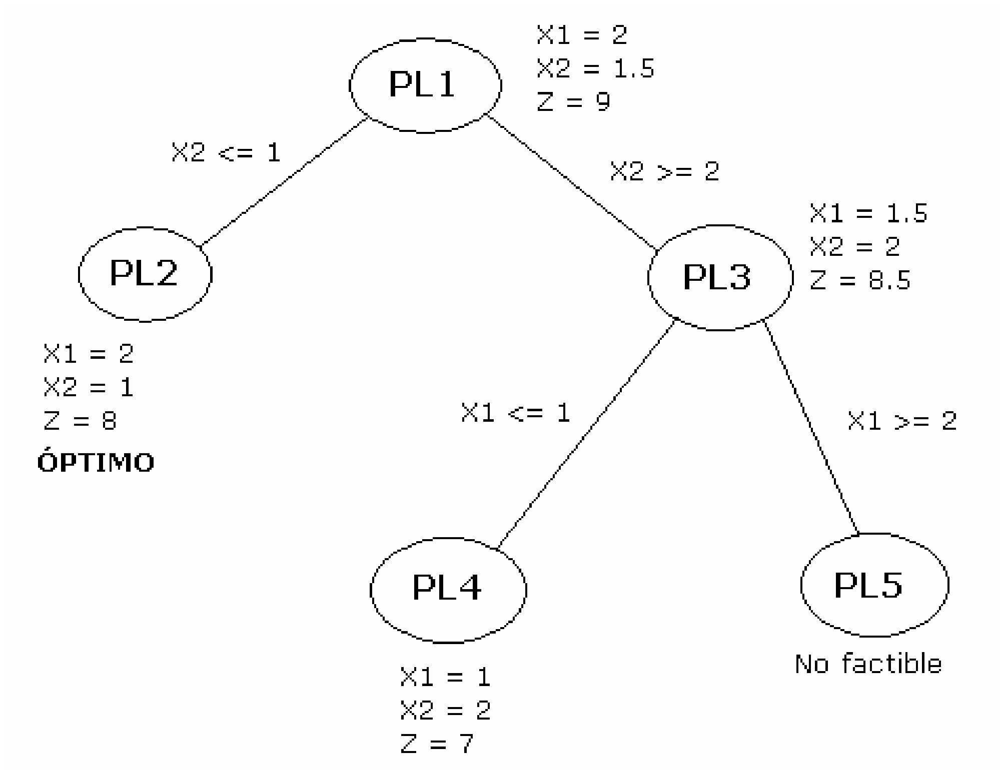


Solución óptima entera:

$x_1=1$, $x_2=2$ $Z_{Optimo}=7$ pero es peor que 8.

Por tanto la solución óptima es la de PL-2 $x_1=2$, $x_2=1$ $Z_{Optimo}=8$

El árbol obtenido es el siguiente:



DETALLES GENERALES

· MIP (Mixed Integer Program)

Maximizar Z = CX
Sujeto a
AX = b
$X \geq 0$
Xj entera para j perteneciente a I = {índices de las variables enteras}

· Se resuelve el MIP sin condiciones enteras. A este problema le llamamos **PL-1** con solución óptima Z_1. Supongamos que la solución óptima toma valores no enteros en alguna variable entera, y por lo tanto no es solución del MIP. Sí es, en cambio, una cota superior del valor óptimo de Z en el MIP.

Se elige una variable entera Xj que dio no entera. Si Xj = βj, se construyen 2 nuevos problemas:

PL-2:	**PL3:**
Maximizar Z = CX	Maximizar Z = CX
AX = b	AX = b
$\mathbf{Xj \leq \beta j^-}$	$\mathbf{Xj \geq \beta j+}$
$X \geq 0$	$X \geq 0$

· Para elegir la variable Xj en la que hacer la bifurcación hay las siguientes reglas:

1). A ojo o al azar.

2). Por prioridades, según...

· La variable representa una decisión importante en el problema.

· Su coste (o beneficio) es más grande que en las demás variables.

· Decisión según resolución anterior del problema.

· Como **PL-2** y **PL-3** son **PL-1** con una nueva restricción añadida, podemos usar el MSD (Método del Simplex Dual) para encontrar sus soluciones óptimas.

· Supongamos que las soluciones óptimas de **PL-2** y de **PL-3** siguen siendo fraccionarias. El siguiente paso consiste en seleccionar **PL-2** o **PL-3** para hacer una nueva ramificación. Para ello:

a). Se elige aquel problema cuyo valor óptimo sea el mejor.

b). Se selecciona el problema resuelto más recientemente (Last-in-First-out rule, LIFO)

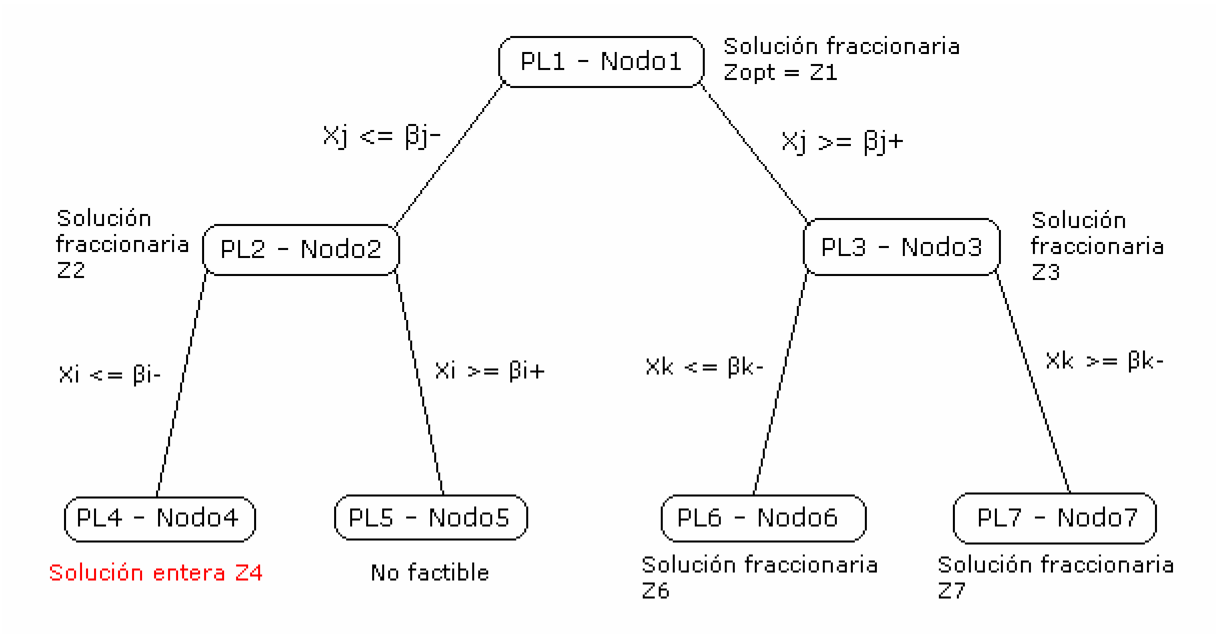
· Continuamos así la sucesión de ramificaciones y resolución de p.p.l hasta resolver uno que tenga solución entera. El valor de la función objetivo en este caso será una cota inferior del valor óptimo del MIP original. En este momento podemos dejar de considerar todos aquellos nodos cuyos valores de Z no sean mejores que la cota inferior. Se dice que esos nodos han sido **saturados**.

· **DEFINICIÓN**: un nodo intermedio está explícita o implícitamente saturado siempre que se satisfaga una de las siguientes condiciones:

1). La solución óptima del p.p.l correspondiente es entera.

2). El p.p.l correspondiente es no factible.

3). El valor óptimo de Z para el p.p.l correspondiente no es mejor que la cota inferior actual.



· Del árbol mostrado en la figura superior:

· El Nodo 4 está saturado. Cualquier solución del problema MIP no puede ser mejor que esta.

· El Nodo 5 está saturado por ser no factible.

· Supongamos que $Z_6 < Z_4$, el Nodo 6 está saturado implícitamente.

· En el caso de que $Z_7 > Z_4$, habría que ramificar a partir del Nodo7.

· Notas

- La eficacia del método radica en la rapidez con que se saturen los nodos.

- Es importante mantener el número de variables enteras **lo menor posible**.

- Proporcionar cotas ajustadas superiores e inferiores de Zoptimo.

- Al contrario que un p.p.l general, la adición de nuevas restricciones a un MIP generalmente reducirá el tiempo de computación, especialmente cuando las nuevas restricciones contengan variables enteras.

- A veces llega con que:

[(CotaSuperior Z - CotaInferior Z) / CotaSuperior Z] < [% pequeño del óptimo continuo]

Tema 8: Problemas Especiales de Programación Lineal.

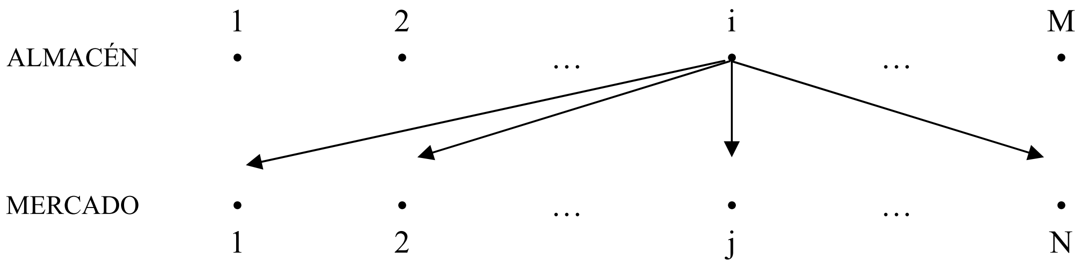
Problemas de Transporte.

Consideremos:

M almacenes con existencias $a_1, a_2, \dots, a_M$
N mercados con demandas $b_1, b_2, \dots, b_N$

Sea $C_{ij} \equiv$ coste por unidad enviada del almacén i al mercado j
$i = 1\dots M$ $\quad\quad j = 1\dots N$

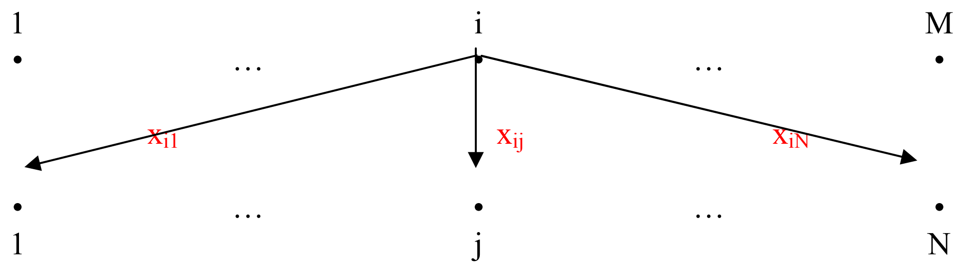
Se trata de calcular la cantidad a enviar desde cada almacén hasta cada mercado minimizando el coste total del transporte.



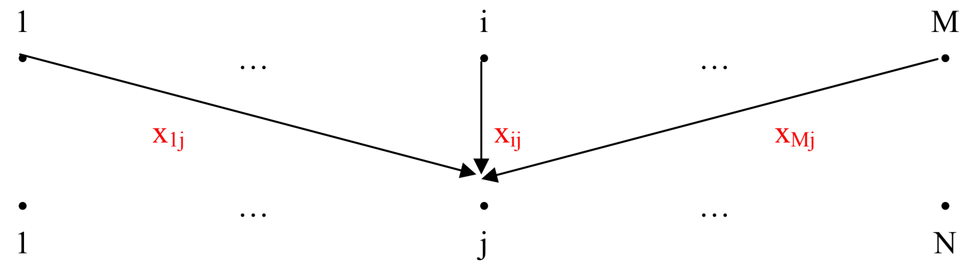
Sea x_{ij} = "nº de unidades o cantidad enviada desde el almacén i al mercado j"

Función objetivo: Min $Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\, x_{ij}$

Sujeto a:
Las restricciones vienen dadas por las capacidades de los almacenes y las exigencias de los mercados.



$$\underbrace{x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{iN}}_{\text{cantidad total enviada desde el almacén i-ésimo}} \le \underbrace{a_i}_{\text{existencia en el almacén i-ésimo}} \quad \forall i=1,2,\dots,M$$



$$\underbrace{x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{Mj}}_{\text{cantidad total que recibe el mercado j}} \geq \underbrace{b_j}_{\text{cantidad demandada por el mercado j}} \qquad \forall j=1,2,\ldots,N$$

Queda $\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\, x_{ij}$

sujeto a: $\quad \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq a_i \qquad i=1\ldots M$

$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \geq b_j \qquad j=1\ldots N$

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$

M+N restricciones MxN variables

Es evidente que el problema es factible (tiene solución) si:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{M} a_i}_{\text{almacenado}} \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{N} b_j}_{\text{demandado}}$$

Si $\sum_{i=1}^{M} a_i = \sum_{j=1}^{N} b_j$ se tiene un **problema de transporte estándar**:

$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\, x_{ij}$

sujeto a:

$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = a_i \qquad i=1\ldots M$

$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = b_j \qquad j=1\ldots N$

$x_{ij} \geq 0 \ \forall i,j$

Desarrollaremos técnicas de resolución para problemas de este tipo, por ello, si no se cumple que:

$$\sum a_i = \sum b_j$$

por ejemplo si:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i > \sum_{j=1}^{N} b_j \qquad (\text{ I })$$

(La cantidad enviada es mayor que la cantidad demandada. Habrá una cierta cantidad que no se enviará. Se crea entonces un mercado ficticio, llamado N+1, con demanda precisamente igual a esa cantidad).

$$\begin{array}{cccccc}
a_1 & a_2 & & a_M & & \\
\bullet & \bullet & \dots & \bullet & & \\
 & & & & & \\
\bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \\
 & & & & & \\
b_1 & b_2 & & b_N & \underbrace{b_{N+1}}_{\text{mercado ficticio}} & = \underbrace{\sum_{i=1}^{M} a_i - \sum_{j=1}^{N} b_j}_{\text{exceso de mercancía}} \ \text{con } C_{i,N+1} = 0 \ \forall i=1\dots N
\end{array}$$

El problema se reescribe:

$x_{i,N+1}$ $i=1,\dots,M$ $\hookrightarrow$ lo que sobra en el almacén i

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N+1} C_{ij}\, x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{N+1} x_{ij} = a_i \qquad i=1\dots M$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = b_j \qquad j=1\dots N+1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$$

Si:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i < \sum_{j=1}^{N} b_j \qquad (\text{ II })$$

(La cantidad enviada es menor que la demandada. No se cumplirán todas las demandas y habrá una cierta pérdida en algún mercado. Se crea entonces un almacén ficticio, llamado M+1, con la cantidad que falta).

almacén ficticio

$$a_1 \qquad a_2 \qquad \qquad a_M \qquad \underbrace{a_{M+1}}_{} = \sum_{j=1}^{N} b_j - \sum_{i=1}^{M} a_i$$

con $C_{M+1,j} = 0$ y $x_{M+1,j}$ es la la pérdida en el mercado j

• • … • •

• • … •

$b_1 \qquad b_2 \qquad \qquad b_N$

El problema se reescribe:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\, x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = a_i \qquad i=1\ldots M+1$$

$$\sum_{i=1}^{M+1} x_{ij} = b_j \qquad j=1\ldots N$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$$

El **problema de Transporte estándar** puede expresarse en forma de tabla con los datos (a_i, b_j, C_{ij}).

Almacenes	Mercados 1	2	3	…	N	Existencias
1	x_{11} C_{11}	x_{12} C_{12}	x_{13} C_{13}		x_{1N} C_{1N}	a_1
2	x_{21} C_{21}	x_{22} C_{22}	x_{23} C_{23}		x_{12N} C_{2N}	a_2
…						…
i	x_{i1} C_{i1}	x_{i2} C_{i2}	x_{i1} C_{i3}		x_{iN} C_{iN}	a_i
…						…
M	x_{M1} C_{M1}	x_{M2} C_{M2}	x_{M3} C_{M3}		x_{MN} C_{MN}	a_M

Demandas	b_1	b_2	b_3	…	b_N	

Sumas x_{ij} por filas = existencias $\Rightarrow$ **RESTRICCIONES DE ALMACENAJE**
Sumas x_{ij} por columnas = demandas $\Rightarrow$ **RESTRICCIONES DE DEMANDAS**

Obtención de una solución factible básica inicial:

El problema de transporte tiene **M+N** restricciones $\Rightarrow$ una solución factible básica necesita, en principio, **M+N variables básicas**.

Ahora bien, dado que $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = \sum_{i=1}^{M} a_i$

(sumamos todas las ecuaciones $\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = a_i$)

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = b_j \qquad \forall j=1\ldots N$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = \sum_{j=1}^{N} b_j = \sum_{i=1}^{M} a_i$$

Sistema de ecuaciones / suma de las M primeras filas = suma de las N restantes $\Rightarrow$ 1 ecuación es linealmente dependiente de las demás $\Rightarrow$ El problema de transporte estándar tiene M+N-1 restricciones linealmente independientes $\Rightarrow$ Una solución factible básica necesita **M+N-1 variables básicas**.

Hay diferentes métodos para resolver la solución factible básica inicial, nosotros sólo vemos 2.

ALGORITMO DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

(1) **Obtención de una solución factible básica inicial**

↓

(2) **Comprobar si es óptima**

NO ↓ SI → FIN

(3) **Se mejora obteniendo otra solución factible**

básica

(1) Hay varios métodos: esquina noroeste, coste mínimo, de Vogel, de aproximación de Russell…
(2) Método U-V

(3) Algoritmo de Steeping-Stone

Método de la esquina noroeste.

Consiste en elegir como variables básicas (>0) aquellas que ocupen la esquina noroeste en la tabla de transporte estándar.

	M_1	M_2	M_3	M_4	capacidades	
A_1	2	2	2	1	3	$= a_1$
						+
A_2	10	8	5	4	7	$= a_2$
						+
A_3	7	6	6	8	5	$= a_3$
demandas	4	3	4	4	15	
	‖	‖	‖	‖		
	b_1 +	b_2 +	b_3 +	b_4		

Elegimos $x_{11} = \min\{3,4\} = 3$

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	3	0	0	0	3-3=0
A_2					7
A_3					5
	4-3=1	3	4	4	

Elegimos $x_{21} = \min\{a_2, b_1'\} = \min\{7,1\} = 1$
b_1' es el b_1 después de restarle lo que enviamos

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	3	0	0	0	0
A_2	1				7-1=6
A_3	0				5
	1-1=0	3	4	4	

Elegimos $x_{22} = \min\{a_2', b_2\} = \min\{6,3\} = 3$

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	3	0	0	0	0
A_2	1	3			6-3=3
A_3	0	0			5
	0	0	4	4	

Elegimos $x_{23} = \min\{b_2', a_3\} = \min\{3,4\} = 3$

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	3	0	0	0	0
A_2	1	3	3	0	0
A_3	0	0			5
	0	0	4-3=1	4	

Elegimos $x_{33} = \min\{a_3', b_3\} = \min\{1,5\} = 1$

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	3	0	0	0	0
A_2	1	3	3	0	0
A_3	0	0	1	4	5-1=4
	0	0	0	4	

M+N-1 = 4+3-1 = 6 variables básicas > 0.

$Z = 3\bullet2 + 1\bullet10 + 3\bullet8 + 3\bullet5 + 1\bullet6 + 4\bullet8 = 93$

Método del coste mínimo.

Consiste en ir eligiendo como variables básicas (>0) aquellas que tengan menor coste.

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	2	2	2	1	3
A_2	10	8	5	4	7
A_3	7	6	6	8	5
	4	3	4	4	

Menor coste $C_{14} = 1$ $x_{14} = \min\{3,4\} = 3$

	M_1	M_2	M_3	M_4	

A_1	0	0	0	3	0
A_2					7
A_3					5
	4	3	4	1	

Menor coste de celdas sin ocupar $C_{24} = 4$ $x_{24} = \min\{7,1\} = 1$

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	0	0	0	3	0
A_2				1	7 6
A_3				0	5
	4	3	4	1 0	

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	0	0	0	3	0
A_2			4	1	6 2
A_3			0	0	5
	4	3	4 0	0	

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	0	0	0	3	0
A_2		0	4	1	2
A_3		3	0	0	5 2
	4	3 0	0	0	

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	0	0	0	3	0
A_2	2	0	4	1	2
A_3	2	3	0	0	2
	4	0	0	0	

$Z = 79$

Método de Steeping-Stone (Mejora de la solución factible básica inicial).

Primero es preciso saber si la solución factible básica inicial es óptima o no. En el ejemplo anterior:

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A_1	0 2	0 2	0 2	3 1	3

A_2	2 / 10	0 / 8	4 / 5	1 / 4	7
A_3	2 / 7	3 / 6	0 / 6	0 / 8	5
	4	3	4	4	

Actualmente $x_{11} = 0$, si hacemos $x_{11} = 1$

	M_1	M_4
A_1	+1	-1
A_2	-1	+1

$\overline{C}_{11}$ = C_{11}•(cambio en x_{11}) + C_{14}•(cambio en x_{14}) + C_{21}•(cambio en x_{21}) + C_{24}•(cambio en x_{24}) = 2•(1) + 1•(-1) + 10•(-1) + 4•(+1) = -5

beficio
relativo
de C_1

Se pueden calcular todos los beneficios relativos de las variables no básicas simultáneamente, mediante el **método U-V** o MODI (Modified Distribution Method).

Método U-V.

Se calculan números:

U_i $\forall i=1\ldots M$

V_j $\forall j=1\ldots N$ tales que: $C_{ij} = U_i + V_j$ para cada variable básica

Se tendrá que $\overline{C}_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$ para cada variable no básica.

	M_1	M_2	M_3	M_4
A_1	2	2	2	• 1
A_2	• 10	8	• 5	• 4
A_3	• 7	• 6	6	8

A1 M4

$$\left.\begin{array}{l} U_1 + V_4 = 1 \\ U_2 + V_1 = 10 \\ U_2 + V_3 = 5 \\ U_2 + V_4 = 4 \\ U_3 + V_1 = 7 \\ U_3 + V_2 = 6 \end{array}\right\}$$

Hacemos

$U_1 = 0 \rightarrow V_4 = 1 \rightarrow U_2 = 3 \rightarrow V_1 = 7$ y $V_3 = 2$

$U_3 = 0 \rightarrow V_2 = 6$

$\overline{C}_{11} - (U_1 + V_1) = 2 - (0+7) = -5$

$\overline{C}_{12} = 2 - (0 + 6) = -4$

$\bar{C}_{13} = 2 - (0 + 2) = 0$

$\bar{C}_{22} = 8 - (3 + 6) = -1$

$\bar{C}_{33} = 6 - (0 + 2) = 4$

$\bar{C}_{34} = 8 - (0 + 1) = 7$

	$V_1 = 7$	$V_2 = 6$	$V_3 = 2$	$V_4 = 1$
$U_1 = 0$	2	2	2	• 1
$U_2 = 3$	• 10	8	• 5	• 4
$U_3 = 0$	• 7	• 6	6	8

Las casillas sin marca • serán las variables no básicas.

2-7-0 = -5 2-6-0 = -4

	$V_1 = 7$	$V_2 = 6$	$V_3 = 2$	$V_4 = 1$
$U_1 = 0$	-5 / 2	-4 / 2	0 / 2	0 / 1
$U_2 = 3$	0 / 10	-1 / 8	0 / 5	0 / 4
$U_3 = 0$	0 / 7	0 / 6	4 / 6	7 / 8

Menor beneficio relativo negativo -5 $\Rightarrow x_{11}$ entra en la base:

$+ \theta$	$3 - \theta$	3

$2 - \theta$		4	$1 + \theta$	7
2	3			5
4	3	4	4	

Máximo valor para $\theta = 2$, porque sino en x_{21} pasaría a ser negativo y no puede ser.

(Steeping-Stone)

Nueva solución factible básica:

2			1
0		4	3
2	3		

$Z = 69$

Miramos si es óptima (método U-V)

	$V_1 = 2$	$V_2 = 1$	$V_3 = 2$	$V_4 = 1$
$U_1 = 0$	× 2	1 2	0 2	× 1
$U_2 = 3$	5 10	4 8	× 5	× 4
$U_3 = 5$	× 7	× 6	-1 6	2 8

Solución no óptima; entra x_{33} en la base:

$2 + \theta$			$1 - \theta$
		$4 - \theta$	$3 + \theta$
$2 - \theta$	3	$+ \theta$	

Máximo valor posible para $\theta = 1$

3			
		3	4
1	3	1	

$Z = 68$

y se comprueba que es la óptima.

Problemas de Asignación.

Formulación general de un problema de asignación estándar:

Se tienen N máquinas y N trabajos diferentes. Cada máquina puede realizar un único trabajo y cada trabajo sólo puede efectuarlo una máquina. Se supone que el coste de realización de cada trabajo por cada máquina varía. El problema consiste en resolver qué trabajo realiza cada máquina de manera que el coste total de realización de los N trabajos sea mínimo.

M_1 M_2 … M_N N máquinas

T_1 T_2 … T_N N trabajos

$M_{ij} \equiv$ la máquina i realiza el trabajo j con coste C_{ij}, i = 1…N, j=1,…N

Si la máquina i no puede realizar el trabajo j se escribirá $C_{ij} = M$ con $M \to \infty$

Una manera intuitiva de resolver este problema es enumerar todas las posibilidades y calcular Z en ellas. ¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Ej// Para 2 máquinas y 2 trabajos:

	T_1	T_2
M_1	C_{11}	C_{12}
M_2	C_{21}	C_{22}

1ª asignación: $M_1 \to T_1$
$M_2 \to T_1$
Coste = $C_{11} + C_{22}$

2ª asignación: $M_1 \to T_2$
$M_2 \to T_1$
Coste = $C_{21} + C_{12}$

Formulamos el problema de asignación como un problema de programación lineal.

$$\text{Sea } x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la máquina i realiza el trabajo j} \\ 0 & \text{no} \end{cases}$$

Dado que cada máquina realiza un único trabajo:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}}_{} = 1 \qquad i = 1\ldots N$$

suma de trabajos que realiza la máquina i

Dado que cada trabajo se le asigna a una única máquina:

$$\sum^{N} x_{ij} = 1 \qquad j = 1\ldots N$$

$i=1$

cantidad de máquinas que realizan el trabajo j

Función objetivo:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\, x_{ij}$$

	T_1	T_2	…	T_N	
M_1	C_{11}	C_{12}		C_{1N}	1
M_2	C_{21}	C_{22}		C_{2N}	1
…					
M_N	C_{N1}	C_{N2}		C_{NN}	1
	1	1		1	

Tabla de costes de asignación estándar

En general en un problema de transporte necesitaríamos 2N-1 variables básicas > 0, cuando en los problemas de asignación sólo habrá N variables > 0. No usaremos ni transporte ni simplex porque trabajaríamos con soluciones degeneradas.

Formulación general de un problema de asignación no estándar:

a) Hay más máquinas que trabajos → creamos "trabajos" ficticios con coste de realización cero.
b) Hay más trabajos que máquinas → creamos "máquinas" ficticias con coste de realización trabajo/máquina ficticia = 0.

Método o Algoritmo Húngaro (König).

El principio básico radica en que la asignación óptima no cambia si se suma o se resta una constante a una fila o columna de la tabla de costes de asignación estándar.

El método consiste en restar una cantidad a las filas y/o columnas de manera que se encuentre una asignación óptima a simple vista. Iniciamos el algoritmo examinando cada fila (columna) de la matriz de costes para identificar el elemento más pequeño. Esa cantidad se le resta a todos los elementos de dicha fila (columna). Esto origina una tabla que contiene al menos un cero en cada fila (columna).

Ahora se intenta realizar una asignación factible usando las celdas con coste cero. Si es posible, se tendrá una asignación óptima.

Ejemplo:

	T_1	T_2	T_3	T_4	
M_1	10	9	8	7	→ mínimo = 7

M_2	3	4	5	6	$\rightarrow$	mínimo = 3
M_3	2	1	1	2	$\rightarrow$	mínimo = 1
M_4	4	3	5	6	$\rightarrow$	mínimo = 3

A cada x_{ij} le restamos el mínimo de su fila:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	3	2	1	0
M_2	0	1	2	3
M_3	1	0	0	1
M_4	1	0	2	3

Utilizando los ceros intentamos realizar una asignación factible:

$M_1 \rightarrow T_4$
$M_2 \rightarrow T_1$
$$\left.\begin{array}{l} M_3 \rightarrow T_2 \\ \quad\ \rightarrow T_3 \\ M_4 \rightarrow T_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} M_3 \rightarrow T_3 \\ M_4 \rightarrow T_2 \end{array}$$

y ésta es la asignación óptima.
Ejemplo:
4 máquinas, 4 trabajos

	T_1	T_2	T_3	T_4		
M_1	10	9	7	8	$\rightarrow$	mínimo = 7
M_2	5	8	7	7	$\rightarrow$	mínimo = 5
M_3	5	4	6	5	$\rightarrow$	mínimo = 4
M_4	2	3	4	5	$\rightarrow$	mínimo = 2

Cogemos el mínimo por filas y se lo restamos:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	3	2	0	1
M_2	0	3	2	2
M_3	1	0	2	1
M_4	0	1	2	3

$M_2 \rightarrow T_1$
$M_4 \rightarrow T_1$

Como dos máquinas estarían realizando el mismo trabajo no sería una asignación óptima. Cogemos el mínimo por columnas:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	3	2	0	0
M_2	0	3	2	1
M_3	1	0	2	0
M_4	0	1	2	2

$M_1 \rightarrow T_3$
$\quad\ \rightarrow T_4$
$M_2 \rightarrow T_1$
$M_3 \rightarrow T_2$
$\quad\ \rightarrow T_4$
$M_4 \rightarrow T_1$

Lo que se hace ahora es trazar líneas de modo que se cubran todas las celdas con ceros. El teorema de König establece que el número mínimo de líneas necesario es igual al número máximo de trabajos que pueden asignarse usando dichas celdas.

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	3	2	0	0
M_2	0	3	2	1
M_3	1	0	2	0
M_4	0	1	2	2

Ahora se selecciona el elemento más pequeño no cubierto por las líneas, que en este ejemplo es el 1. Se resta este número de todos los elementos no cubiertos, y se le suma a los cubiertos que sean intersección de dos líneas.

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	4	2	0	0
M_2	0	2	1	0
M_3	2	0	2	0
M_4	0	0	1	1

Es equivalente a restar 1 de la 2ª y 4ª fila y sumar 1 a la 1ª columna, por lo que la asignación óptima no varía.

$M_1 \rightarrow T_3$
$\quad\rightarrow T_4$

$M_2 \rightarrow T_1$
$\quad\rightarrow T_4$

$M_3 \rightarrow T_2$
$\quad\rightarrow T_4$

$M_4 \rightarrow T_1$
$\quad\rightarrow T_2$

Las asignaciones serían:

$M_1 \rightarrow T_3$		$M_1 \rightarrow T_3$
$M_2 \rightarrow T_1$		$M_2 \rightarrow T_4$
$M_3 \rightarrow T_4$	ó	$M_3 \rightarrow T_2$
$M_4 \rightarrow T_2$		$M_4 \rightarrow T_1$

$Z_{opt} = 20$