## GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA - EXAMEN DE CÁLCULO

**Febrero 2011**

**Ejercicio 1 .-**

**Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{x-1}}$.**

**a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de $f$.**

**b) Calcúlense los extremos absolutos.**

**Solución a)**

Se verifica que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y además, $f$ es continua en su dominio por ser cociente de funciones continuas con denominador no nulo. Nótese que la función valor absoluto es continua en todo $\mathbb{R}$. Como $|x|$ no es derivable en $x = 0$, la función $f$ no va a ser derivable en dicho punto.

Para la derivabilidad, por aparecer un valor absoluto se descompone la función, resultando:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{x-1}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -\dfrac{x}{e^{x-1}} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $f$ es derivable y su derivada es $f'(x) = \dfrac{x-1}{e^{x-1}}$.

Si $x > 0$, $f$ es derivable y su derivada es $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^{x-1}}$.

Si $x = 0$ se utiliza la definición:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-\dfrac{h}{e^{h-1}} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-1}{e^{h-1}} = -e \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\dfrac{h}{e^{h-1}} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{e^{h-1}} = e \end{cases}$$

Como los límites laterales son distintos, $f$ no es derivable en $x = 0$.

Por lo tanto $\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ y derivable en } \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

**Solución b)**

Según las derivadas calculadas anteriormente y teniendo en cuenta que $f$ no es derivable en $x = 0$, se distinguen los casos:

Si $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow x = 1$ NO. Se verifica que $f'(x) < 0$, por lo que $f$ es decreciente.

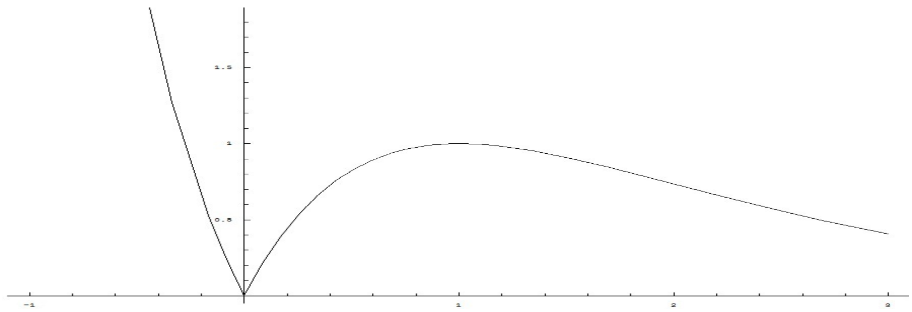
Si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow x = 1$, por lo que si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$, siendo $f$ creciente mientras que si $x > 1$, $f'(x) < 0$ siendo $f$ decreciente.

Por otra parte, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x-1}} \overbrace{=}^{\text{L'Hopital}} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0\,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{x-1}} \overbrace{=}^{\text{L'Hopital}} \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{e^{x-1}} = +\infty\,.$$

La gráfica de la función es



$\boxed{f \text{ no tiene máximo absoluto y tiene un mínimo absoluto en } x = 0.}$

**Ejercicio 2 .-**

**Se considera la función $f(x) = x \ln x$.**

**a) Calcúlese el polinomio de Taylor de grado 3 en un entorno del punto $x_0 = 1$.**

**b) Aproxímese con el polinomio de Taylor $f(3/2)$ y acótese el error cometido.**

**Solución a)**

Como $f \in C^{\infty}$ en un entorno de $x_0 = 1$, se puede calcular el polinomio de Taylor de cualquier grado en un entorno del punto. Derivando:

$$\left| \begin{array}{lcl} f(x) = x \ln x & | & f(1) = 0 \\ f'(x) = 1 + \ln x & | & f'(1) = 1 \\ f''(x) = \dfrac{1}{x} & | & f''(1) = 1 \\ f'''(x) = -\dfrac{1}{x^2} & | & f'''(1) = -1 \\ f^{(iv)}(x) = \dfrac{2}{x^3} & & \end{array} \right|$$

Aplicando la fórmula de Taylor $\boxed{P_3(x) = (x-1) + \dfrac{1}{2!}(x-1)^2 - \dfrac{1}{3!}(x-1)^3}$

**Solución b)**

$$\boxed{f(3/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^4} = \frac{29}{48}}$$

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}(x-1)^4 \right| \Rightarrow |R_3(3/2)| = \left| \frac{\frac{2}{\xi^3}}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right| = \frac{1}{4!\,2^3}\,\frac{1}{\xi^3} \overbrace{\leq}^{\xi \in \left(1, \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{4!\,2^3}\,.$$

Así: $\boxed{|R_3(3/2)| = \dfrac{1}{192}}$

**Ejercicio 3 .-**

**Calcúlese** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\, dt}{x^4}$.

**Solución**

Se tiene la indeterminación $\frac{0}{0}$ que se resuelve utilizando los teoremas de L'Hopital y Fundamental del Calculo. Además se entiende que el límite es $\lim\limits_{x\to 0^+}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt}{x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.\quad \text{Luego } \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt}{x^4}=+\infty}$$

---

**Ejercicio 4 .-**

**Se considera la función $f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,\ x\geq 0.$**

**a) Calcúlese $f'(x)$ y analícese su crecimiento o decrecimiento.**

**b) Aproxímese mediante los métodos del trapecio compuesto y Simpson $f(2)$.**

---

**Solución a)**

Por el Teorema Fundamental del Cálculo $\boxed{f'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2},\ x\geq 0}$ y $\boxed{f \text{ es creciente}}$

**Solución b)**

Utilizando tres nodos, 0, 1 y 2, se tienen:

Trapecio compuesto $\quad f(2)\simeq\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2-0}{2}\left(\frac{F(0)+F(2)}{2}+F(1)\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-4}}{2}+e^{-1}\right)$

Simpson $\quad f(2)\simeq\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2-0}{6}\left(F(0)+4F(1)+F(2)\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{3}\left(1+4e^{-1}+e^{-4}\right)$

---

**Ejercicio 5 .-**

**Calcular $\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$**

---

**Solución**

$$\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}\overbrace{=}^{\text{Impropia}}\lim_{k\to\frac{1}{3}^+}\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}=\lim_{k\to\frac{1}{3}^+}\int_{\frac{1}{3}}^{3}(3x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{3}\lim_{k\to\frac{1}{3}^+}\int_{\frac{1}{3}}^{3}3\,(3x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{k\to\frac{1}{3}^+}\left.\frac{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_K^3=\frac{1}{2}\lim_{k\to\frac{1}{3}^+}\left[(3x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_k^3=\frac{1}{2}\lim_{k\to\frac{1}{3}^+}\left[8^{\frac{2}{3}}-(3k-1)^{\frac{2}{3}}\right]=\boxed{2}.$$

---

**Ejercicio 6 .-**

**Estúdiese la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4e^{-n^2}$**

---

**Solución**

Por el criterio del cociente: $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{n^4}{e^{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n^4}\,\frac{1}{e^{2n+1}}=0<1$

Por lo tanto $\boxed{\text{la serie es convergente}}$