CÁLCULO
INFORMÁTICA

EXAMEN ENERO 2012

SOLUCIONES

1. Sea la función f definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c}$$

(a) Sabiendo que corta al eje OX en $x = 1$ y que tiene un punto de inflexión en $(3, 2)$, calcula el valor de los coeficientes a, b, c.
(b) Obtén los puntos en los cuales la tangente a f es horizontal.

(a) Como corta al eje OX en $x = 1$:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c = 0$$

Como tiene un punto de inflexión en (3,2):

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow 27 + 9a + 3b + c = 2$$
$$f''(3) = 0 \Leftrightarrow 18 + 2a = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$a = -9\,, b = 24\,, c = -16$$

(b) La tangente a f es horizontal en x si $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene que:

$$x_1 = 2\,, x_2 = 4$$

2. Mediciones puntuales han determinado que una función desconocida f pasa por los puntos $(-2, -16)\,, (0, 0)\,, (1, -1)\,, (3, 9)$.
(a) Calcula, mediante diferencias divididas, una aproximación polinómica de f.
(b) Aproxima el valor de f en $x = 2$.

(a) Construimos la tabla de diferencias divididas:

-2	$\mathbf{-16}$			
		$\frac{0-(-16)}{0-(-2)} = \mathbf{8}$		
0	0		$\frac{-1-8}{1-(-2)} = \mathbf{-3}$	
		$\frac{-1-0}{1-0} = -1$		$\frac{2-(-3)}{3-(-2)} = \mathbf{1}$
1	-1		$\frac{5-(-1)}{3-0} = 2$	
		$\frac{9-(-1)}{3-1} = 5$		
3	9			

Entonces, el polinomio de Lagrange asociado a f relativo a los nodos $-2\,, 0\,, 1\,, 3$ es:

$$p_3(x) = -16 + 8 \cdot (x-(-2)) + (-3) \cdot (x-(-2)) \cdot (x-0) + 1 \cdot (x-(-2)) \cdot (x-0) \cdot (x-1)$$
$$p_3(x) = x^3 - 2x^2$$

(b) Aproximamos $f(2)$ a partir del polinomio anterior:

$$f(2) \approx p_3(2) = 0$$

3. Dada la función f definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x)}$$

(a) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 relativo a f centrado en $x_0 = 0$.
(b) Utiliza ese polinomio para aproximar $\ln(1'1)$, acotando el error cometido.

(a) Sabiendo que:

$$f(x) = \ln(1+x)\ , f'(x) = \frac{1}{1+x}\ , f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f(0) = \mathbf{0}\,, f'(0) = \mathbf{1}\,, f''(0) = \mathbf{-1}$$

Entonces, el polinomio de Taylor de grado 2 relativo a f centrado en $x_0 = 0$ es:

$$p_2(x) = 0 + 1 \cdot (x-0) + \frac{(-1)}{2!} \cdot (x-0)^2 = x - \frac{x^2}{2}$$

(b) La aproximación de $\ln(1'1)$ es:

$$\ln(1'1) = \ln(1+0'1) = f(0'1) \approx p_2(0'1) = 0'095$$

Una cota de error al aproximar $f(0'1)$ por $p_2(0'1)$ es:

$$|f(0'1) - p_2(0'1)| \leq \frac{\max\limits_{c\in[0,0'1]} |f'''(c)|}{3!} |0'1-0|^3 = \frac{2}{6} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{3000}$$

ya que:

$$f'''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} \Rightarrow \max_{c\in[0,0'1]} |f'''(c)| = |f'''(0)| = 2$$

4. Sea f la función definida por:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \cos(x)\,,\, si\ x < \frac{\pi}{2} \\ x^2 \cdot e^{-2x}\,,\, si\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(a) Razonar si f es integrable según Riemann en el intervalo $[-1, 5]$.
(b) Calcula:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

(a) La función f es integrable según Riemann, ya que es continua en el intervalo $[-1{,}5]$ salvo en $x = \frac{\pi}{2}$, donde presenta una discontinuidad de salto finito:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0\,,\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \frac{\pi^2}{4} \cdot e^{-\pi}$$

(b) Resolvemos primero la integral indefinida:

$$\int x^2 \cdot e^{-2x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^{-2x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{-e^{-2x}}{2} \end{bmatrix} = \frac{-x^2 \cdot e^{-2x}}{2} + \int x \cdot e^{-2x}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{-e^{-2x}}{2} \end{bmatrix} = \frac{-x^2 \cdot e^{-2x}}{2} - \frac{x \cdot e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx =$$

$$= \frac{-x^2 \cdot e^{-2x}}{2} - \frac{x \cdot e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c = \frac{-e^{-2x}}{4} \cdot (2x^2 + 2x + 1) + c$$

Entonces:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx + \lim_{t \to +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} x^2 \cdot e^{-2x}\,dx = [senx]_0^{\frac{\pi}{2}} + \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{-e^{-2x}}{4} \cdot (2x^2 + 2x + 1)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t} =$$

$$= 1 + \lim_{t \to +\infty} \frac{-e^{-2t}}{4} \cdot (2t^2 + 2t + 1) + \frac{e^{-\pi}}{4} \cdot (2\pi^2 + \pi + 1) = 1 + \frac{e^{-\pi}}{4} \cdot (2\pi^2 + \pi + 1)$$

ya que, aplicando L'Höpital:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{-e^{-2t}}{4} \cdot (2t^2 + 2t + 1) = \frac{-1}{4} \lim_{t \to +\infty} \frac{2t^2 + 2t + 1}{e^{2t}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{-1}{4} \lim_{t \to +\infty} \frac{4t + 2}{2e^{2t}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{-1}{4} \lim_{t \to +\infty} \frac{4}{4e^{2t}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0$$

5. Un matemático y un ingeniero discuten si es posible que la integral de una función acotada en un intervalo no acotado sea un número real. Mientras que el matemático se muestra claramente convencido el ingeniero muestras sus dudas, por lo que el primero propone, para convencer al segundo, la función f definida por:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}}\,,\, x \in [1, +\infty)$$

¿Convencerá el ingeniero con este ejemplo? ¿Quién tiene razón en la discusión? Razona tus respuestas y, si puedes, pruébalo.

La integral propuesta por el ingeniero efectivamente no da como resultado un número real:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}}dx = \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{3}\int_1^{t} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 2}}dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\sqrt{x^3 + 2}\right]_1^{t} = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{t^3 + 2} - \sqrt{3} = +\infty$$

Pero si tomamos, por ejemplo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} -e^{-t} + e^0 = 1$$

Por tanto, sí es posible que la integral de una función acotada en un intervalo no acotado sea un número real.

6. (a) Determina el carácter de la serie numérica:

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

(b) Determina el radio de convergencia de la serie de potencias:

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}}$$

(a) Aplicando, por ejemplo, el criterio del cociente, se deduce que la serie es divergente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1$$

(b) Aplicando, por ejemplo, el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n\cdot 2^n}\right|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt[n]{n}}}_{=L}\cdot|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{L} = \frac{1}{1/2} = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{R = 2}$$