CÁLCULO
INFORMÁTICA

EXAMEN ENERO 2013

SOLUCIONES

1. Aproxima $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/4}$ mediante el polinomio de Taylor de orden 1 centrado en $x_0 = 0$ relativo a $f(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/4}}$. Acota el error cometido.

$$f(x) = (1+x)^{-1/4} \Longrightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{-1}{4}(1+x)^{-5/4} \Longrightarrow f'(0) = \frac{-1}{4}$$
$$f''^{(x)} = \frac{5}{16}(1+x)^{-9/4} > 0$$
$$f'''^{(x)} = \frac{-45}{64}(1+x)^{-13/4} < 0$$

Buscamos el valor de x tal que $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4}$:

$$\frac{1}{(1+x)^{1/4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} \Leftrightarrow 1 + x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el polinomio de Taylor y la aproximación pedida son:

$$p_1(x) = 1 - \frac{x}{4} \Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \approx p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$$

La cota de error viene dada por:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - p_1\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{\max_{c\in[0,1/2]} |f''(c)|}{2!} \cdot \left|\frac{1}{2} - 0\right|^2 = \frac{5/16}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{128}$$

ya que $f''(x) > 0$ y $f'''(x) < 0$, si $x \in [0, 1/2] \Longrightarrow f''$ es decreciente y el máximo se alcanza en $c = 0$.

2. (a) Prueba que la ecuación $cosx = 0$ tiene una única solución en $[0, \pi]$.
(b) Aproxima dicha raíz mediante el algoritmo de Newton calculando una iteración, tomando como iterante inicial $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

(a) Como $f(x) = cosx$ es continua en $[0, \pi]$ y $f(0) \cdot f(\pi) = -1 < 0$, el teorema de Bolzano asegura la existencia de, al menos, una raíz α de la ecuación en dicho intervalo.
Además, como $f'(x) = -senx < 0$, $\forall x \in (0, \pi)$, f es decreciente en dicho intervalo y la raíz es única.

(b) Aplicando el método de Newton:

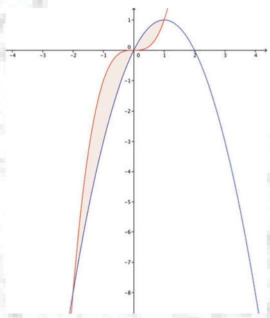
$$\alpha \approx x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{4} - \frac{cos\left(\pi/_4\right)}{-sen\left(\pi/_4\right)} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}/_2}{\sqrt{2}/_2} = \frac{\pi}{4} + 1$$

3. Definida la función $\boldsymbol{\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x}\, dx\,, p} > 0$; calcula $\boldsymbol{\Gamma(2)}$.

$$\int x \cdot e^{-x}\, dx = \begin{bmatrix} u = x\,, du = dx \\ dv = e^{-x}dx\,, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c = \frac{-(x+1)}{e^x} + c$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t x \cdot e^{-x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{-(x+1)}{e^x}\right]_0^t = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-(t+1)}{e^t}\right)}_{=0 \text{ aplicando L'Hôpital}} - (-1) = 1$$

4. Calcula el volumen que se origina cuando el área limitada por las gráficas de las funciones **f** y **g** gira alrededor del eje OX, donde $\mathbf{f(x) = x^3}$ y $\mathbf{g(x) = 2x - x^2}$.



$$x^3 = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,, x = 1\,, x = -2$$

Podemos calcular el volumen generado por la función g (en azul) y restarle el volumen generado por la función f (en rojo). Así obtenemos el volumen pedido.

$$V_g = \pi \int_{-2}^{1} (2x - x^2)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{1} (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \pi \left[\left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{-32}{5} - 16 - \frac{32}{3}\right)\right] = \frac{168\pi}{5}$$

$$V_f = \pi \int_{-2}^{1} (x^3)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{1} x^6\, dx = \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{1} = \pi \left[\left(\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{-128}{7}\right)\right] = \frac{129\pi}{7}$$

$$V_g - V_f = \frac{531\pi}{35}$$

5. Consideramos la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot (n+2) \cdot x^n}{n+1}$$

Calcular el radio y el campo de convergencia.

Aplicando, por ejemplo, el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n \cdot (n+2) \cdot x^n}{n+1}\right|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}}}_{L=2} \cdot |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{L}$$

Radio de convergencia: $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$

Vemos que pasa en los extremos:

$$x = \frac{-1}{2} : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot (n+2) \cdot (-1/2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$$

$$x = \frac{1}{2} : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot (n+2) \cdot (1/2)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

Ambas series divergen, ya que no cumplen la condición necesaria de convergencia.
Campo de convergencia: $C = \left(-1/2, 1/2\right)$

6. Sabemos que un cuerpo se calienta a una velocidad proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente:

$$\boldsymbol{\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_a - T)}$$

donde $\boldsymbol{k}$ es una constante que debe determinarse en cada caso.
En pleno Agosto, en Sevilla, a $\boldsymbol{50^o}$ a la sombra, un turista se compra un helado que está a una temperatura de $\boldsymbol{5^o}$. Lo llaman al móvil y pasa un minuto hablando. Prueba el helado y determina que está a $\boldsymbol{20^o}$. En ese momento un municipal le regaña por ir en pantalón corto y pasa otro minuto disculpándose. ¿A qué temperatura tomará el helado?

Resolvemos la ecuación diferencial, donde $T_a = 50$:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (50 - T) \Leftrightarrow \frac{dT}{(50-T)} = k\,dt \Leftrightarrow \int \frac{dT}{(50-T)} = \int k\,dt \Leftrightarrow -ln|50 - T| = kt + c \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{*} \ln(50 - T) = -kt + c \Leftrightarrow (50 - T) = e^{-kt+c} \underbrace{\Leftrightarrow}_{**} T(t) = 50 - c \cdot e^{-kt}$$

donde, en *, podemos quitar el valor absoluto ya que la temperatura inicial es de 5^o, con lo cual $50 - T > 0$.

Utilizando las condiciones $T(0) = 5\,, T(1) = 20$ se obtiene la solución de la ecuación diferencial:

$$\left.\begin{array}{r} 5 = 50 - c \Rightarrow c = 45 \\ 20 = 50 - 45 \cdot e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow T(t) = 50 - 45 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

Entonces, para $t = 2$, se obtiene la temperatura a la que el turista tomará el helado:

$$T(2) = 50 - 45 \cdot \frac{4}{9} = 50 - 20 = 30^o$$